LAS CONTRIBUCIONES DE GAUSS A LA FíSICA: UN PANORAMA

MARIANO SANTANDER

1. Apuntes biográficos

Johann Friedrich Carl Gauss nace el 30 de Abril de 1777. En 1784 comienza en la escuela primaria con un maestro competente llamado Büttner, cuyo asistente en aquellos años, Martin Bartels, llegó a ser después profesor de la Universidad de Kazan. Son bien conocidas algunas anécdotas de ese periodo, en el que parece ya clara una privilegiada inteligencia. Ayudado por Büttner, ingresa en 1788 en la escuela secundaria, en la que el énfasis se centraba en la formación clásica, latín y alemán. En 1791, un Gauss de 14 años es presentado al Duque C.W. Ferdinand de Brunswick–Wolfenbüttel quien, impresionado, le concede un apoyo económico para proseguir sus estudios, apoyo que se mantendrá hasta la muerte del Duque.

Con este soporte, entre 1792 a 1795, Gauss estudia en el *Collegium Carolinum*, una institución de excelencia creada por el gobierno de Hannover unos años antes para la formación de las élites dirigentes. El colegio disponía de una destacada biblioteca con obras de Newton, Euler y Lagrange, entre otros, que a buen seguro Gauss debió de leer, lo que le aseguró una buena base en Matemáticas. La estancia en el colegio le permitió además atravesar una barrera social que en otras circunstancias habría sido, en aquella época, infranqueable.

En 1795 Gauss comienza sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Göttingen, contra los deseos del Duque, que prefería la del ducado en Helmstedt. La elección de Gauss parece haberse debido a que Göttingen disponía de una muy buena biblioteca, y de una sólida reputación de orientación científica: esta Universidad había sido fundada, según el modelo de Oxford y Cambridge, por Jorge IV, Rey de Inglaterra y

Príncipe de Hannover, y era bastante independiente de las jerarquías políticas y eclesiásticas, algo que por entonces era una novedad.

La mejor contribución de sus profesores parece haber sido dejarle estudiar de manera independiente. A los 19 años obtiene su primer éxito, que estimula su dedicación a las Matemáticas: la construcción mediante regla y compás del polígono de 17 lados, cuya publicación anuncia el canciller Zimmermann, el factótum del Duque. Esta construcción representa, sobre todo conceptualmente, un avance sobre los resultados conocidos en la antigüedad, y debe verse como un aspecto de las profundas investigaciones en Aritmética en las que Gauss estaba ya inmerso. Intereses concretos de Gauss en esa época incluyen la media aritmético-geométrica, la distribución de los números primos, la determinación de la fecha de la Pascua en cualquier año futuro mediante un algoritmo .... También merece mención su amistad con (Wolfgang) Bolyai Farkas, un estudiante húngaro de Filosofía y Matemáticas, con quien se mantuvo en contacto epistolar hasta 1853.

En 1798 Gauss deja Göttingen y se instala en Brunswick, donde continuará hasta 1807. En 1799 presenta su Tesis Doctoral en la Universidad de Helmsted, que le concede el grado de Doctor *in absentia*, bajo la supervisión (nominal?) de J.F. Pfaff. En 1801 publica, sufragado de nuevo por el Duque, una de sus obras fundamentales, las *Disquisitiones Aritmeticae.*

En el aspecto personal, en 1805 Gauss se casa con Johanna Osthoff, con la que tiene dos hijos, Joseph y Wilhelmine. Desgraciadamente en 1809 Johanna muere, así como su tercer hijo Louis poco después. Se casa de nuevo en 1810 con Friderica Wilhelmine (Minna) Waldeck, con la que tendrá otros tres hijos: Eugen, Wilhelm y Theresa.

En el aspecto científico, entre 1796 y 1801 la atención de Gauss parece haberse centrado en la Matemática pura. En breve las cosas iban a cambiar. En esa época Gauss inicia correspondencia con, entre otros, Wilhelm Olbers, H.C. Schumacher y Friedrich Wilhelm Bessel, y su campo de intereses se amplía incluyendo la Astronomía, área a la que hará impresionantes contribuciones. En 1807 se traslada a Göttingen, en donde su dedicación principal, entre 1807 y 1820, es la Astronomía. La mayor parte de la siguiente década, entre 1821 y 1831, Gauss se aplica con impresionante dedicación al trabajo de levantamiento topográfico del reino de Hannover, que se extendió entre 1822 y 1844.

En aquel momento la fama de Gauss ya era considerable, y para desánimo de casi todos sus contemporáneos, Gauss considera y rechaza (en torno a 1825) una invitación para trasladarse a Berlín y encabezar desde allí una reforma de la educación superior a la francesa. Gauss decide continuar en Göttingen, y a pesar de no trasladarse a Berlín, parece que su influencia siguió siendo muy grande en términos reales.

Su segunda esposa, Minna, muere en 1831, y hay constancia de unas relaciones muy tensas con los dos hijos varones de su segundo matrimonio, que finalmente emigraron a Estados Unidos.

El final de la dedicación de Gauss a la Topografía y a la Geodesia (y, en paralelo, a la fundación de la Geometría diferencial moderna), marca unos nuevos derroteros, ahora hacia la Física. Gauss, que siempre había estado interesado en esa ciencia, conoce a Wilhelm Weber en 1828 y se implica, junto con Weber, en nuevos proyectos experimentales. En la misma época tuvo también contacto con Alexander von Humboldt, concibiendo ambos un proyecto de estudio del campo magnético terrestre a escala mundial.

En 1837 ocurre un suceso conocido como el *asunto de los siete de Göttingen*. Ese año muere Guillermo IV de Inglaterra, y le sucede la reina Victoria; sin embargo la ley sálica impide que Victoria reine en Hannover, hasta entonces parte de la corona inglesa. Se produce una ruptura y un tío de Victoria, Ernesto Augusto, Duque de Cumberland, pasa a reinar en Hannover. Un año después, el nuevo Rey declara abolida la Constitución, lo que origina una reacción en la que siete profesores, entre ellos Weber y Ewald, orientalista y yerno de Gauss, firman una protesta formal. Ernesto Augusto reacciona afirmando que puede encontrar nuevos profesores con la misma facilidad que bailarinas de ballet, y los siete firmantes pierden su empleo. Gauss no hizo nada públicamente a favor de los firmantes, aunque parece que intervino privadamente para encontrarse con que el nuevo rey supeditaba la eventual permanencia de Weber y Ewald a unas condiciones humillantes e inaceptables. Para Gauss, la marcha de Weber marca el final de la etapa de colaboración intensa, aunque hasta 1840 se mantuvieron los proyectos comunes: la Revista y el Atlas de Geomagnetismo.

Hay bastantes datos de los últimos quince años de la vida de Gauss, bien resumidos y presentados en la concisa pero completa obra de W.K. Bühler, *Gauss: A Biographical Study* (Springer, 1981), que sigue siendo una excelente fuente. Mencionaré unos pocos, que dan cierta idea de la personalidad del Gauss maduro. Sobre 1838 comienza a estudiar ruso para leer directamente a Lobachewski, lo que ya puede hacer en 1841, leyendo también a Pushkin. En esos años trabaja en el diseño de un sistema de pensiones para las viudas de los profesores de la Universidad de Göttingen y durante cinco años elabora análisis de viabilidad y mantenibilidad, usando datos actuariales sobre índices de mortalidad, y concluye que el sistema existente podría mantenerse incluso con un aumento en las pensiones. Según W. Sartorius, un geólogo por medio del cual nos ha llegado mucha información sobre el último Gauss, habría sido un inmejorable Ministro de Finanzas, y de hecho el capital que Gauss dejó al morir era del orden de 150 veces su sueldo anual, lo que consiguió a base de inversiones en los mercados de valores.

En 1849 se celebra en Göttingen el semicentenario de su tesis doctoral, y entre 1850 y 1855, Gauss se dedicó esencialmente a la lectura, tanto de periódicos como de literatura. Asistió a la lección de habilitación de Riemann en 1854, de la que se conserva, a través de Weber, el registro de la opinion de Gauss, exaltado y elogioso hacia las ideas de Riemann; seguramente Gauss era el único entre la audiencia en disposición de apreciar realmente el contenido de la visionaria lección de Riemann.

Gauss murió el 23 de Febrero de 1855 y fue enterrado en Göttingen, sin que en su tumba se grabara la construcción del polígono de 17 lados, como había sido su deseo.

1.1. La Obra de Gauss. Las Obras completas de Gauss, bajo el título *Carl Friedrich Gauss' Werke* fueron publicadas en doce volúmenes entre 1862 y 1929. El plan inicial, establecido por F. Schering, se completó, casi setenta años después, bajo la dirección de F. Klein, quien incluyó además el material nuevo que había salido a la luz durante el tiempo que ocupó la edición. Con vistas a tener una radiografía rápida del volumen relativo de las contribuciones de Gauss a los diferentes campos, es interesante listar los títulos de los doce volúmenes: *Teoría de Números:* Vols I y II; *Análisis:* Vol III; *Probabilidad y Geometría:*

Vol IV; *Física Matemática:* Vol V; *Astronomía:* Vols VI y VII; *Addenda:* Vol VIII; *Geodesia:* Vol IX; *Varia y ensayos sobre la obra de Gauss:* Vols X y XI y *Varia y Magnetismo Terrestre:* Vol XII.

En una primera evaluación superficial, vemos que la contribución de Gauss a la Matemática pura ocupa cuatro volúmenes, los mismos que sus contribuciones a la Física. Quizás es necesario decir que el actual y desafortunado *divorcio* entre las Matemáticas y la Física, que hoy es evidente sin ir más lejos en nuestros planes de estudio, en la época de Gauss no sólo no existía sino que tampoco hubiera resultado inteligible: los grandes de todas las épocas han contribuido con brillantez, sin preocuparse demasiado de si su contribución era a la Física o a las Matemáticas. Y Gauss se movió con gran soltura desde la Matemática pura, pasando por la Física matemática, hasta el campo más aplicado de la Física, la instrumentación.

Las muchas contribuciones propiamente matemáticas de Gauss caen fuera del tema que quiero presentar aquí, por lo que omitiré mencionarlas, excepto cuando tengan alguna vertiente física destacada, y me centraré en sus contribuciones a la Física. Aun así, las aportaciones de Gauss son tan amplias que lo que se esbozará será apenas un breve panorama.

2. Gauss en Astronomía Teórica

Sabemos que Gauss tuvo interés en Astronomía desde su época del *Carolinum*, donde descubrió por su cuenta la ley de Bode. En Göttingen se debió familiarizar con el problema básico de la Astronomía matemática: el cálculo de órbitas de los cuerpos celestes a partir de observaciones posiblemente escasas y probablemente inexactas, realizadas además quizás por diferentes observadores. También se sabe que trabajó en el movimiento de la Luna, un tema que para Newton había sido una *pesadilla*.

Hacia 1800, el avance de la tecnología en los instrumentos ópticos y la acumulación de observaciones había producido los primeros mapas fiables de estrellas. Y el descubrimiento de Urano en 1781 por Herschel había establecido a la Astronomía como el paradigma del triunfo de la ciencia newtoniana. Se iniciaba así el siglo XIX con las perspectivas abiertas por la Ilustración apoyadas en un triunfo incontrovertible de la Revolución científica.

La noche del 1 de enero de 1801, Giuseppe Piazzi había descubierto un nuevo astro, que observó hasta el 11 de febrero, cuando dejó de ser visible al acercarse demasiado al Sol. En junio de 1801 Zach, director del observatorio de Seeberg, el centro de la investigación astronómica en Alemania, publicó sus datos orbitales, que lo calificaban como un nuevo planeta. Recibió el nombre de Ceres. La reaparición de Ceres se esperaba a finales de 1801 o principios de 1802. Gauss, animado por Zach, se embarcó, recién publicadas sus *Disquisitiones*, en el cálculo de la órbita, lo que completó en un par de meses. En septiembre Zach publicó varias previsiones, entre otras la de Gauss, que difería bastante de la suya propia. El 7 de diciembre de 1801 Zach, y el 1 de enero de 1802 Olbers, reencontraron a Ceres en posiciones muy cercanas a las previstas por Gauss. La publicación de la noticia, en febrero de 1802, confirió casi inmediatamente fama a Gauss en toda Europa: recibió una invitación para ser Director del Observatorio de San Petesburgo y comenzó su contacto con astrónomos como Olbers, Zach y Bessel, que se mantendría toda su carrera.

La determinación de una órbita a partir de observaciones era por entonces un ya viejo problema para el que se habían desarrollado técnicas basadas directamente en las leyes de Kepler. Esencialmente, las técnicas previas a Gauss tenían en común partir de una estimación inicial de la órbita, como aproximación de orden 0, cuyos elementos orbitales se iban afinando sucesivamente con las nuevas observaciones. Cualquier órbita está determinada (teóricamente) por tres observaciones de la posición del astro sobre la esfera celeste y del instante de la observación, los únicos datos accesibles, pero la no linealidad intrínseca presente en la ecuación de Kepler hace que una solución cerrada y explícita no sea posible. Se requiere pues una buena elección de una *órbita de prueba*, seguida de una serie de modificaciones de esta órbita por ensayo y error para mejorar el ajuste al conjunto completo de observaciones. Esta es la parte realmente difícil, y además en ella el éxito depende, de manera *incontrolada*, del acierto en la etapa anterior. Por ejemplo, en la predicción de la existencia de Neptuno, aparte del indiscutible mérito de LeVerrier y de Adams, hubo también mucha suerte. La excentricidad de la órbita real de Neptuno es muy pequeña, con lo que una órbita circular, que fue la suposición inicial de los cálculos de LeVerrier y de Adams —hecha en parte por motivos pragmáticos, ya que facilitaba el cálculo subsiguiente hasta hacerlo factible—, resultó ser a la postre una muy buena elección para la órbita de prueba.

¿Qué era nuevo en el enfoque de Gauss? Básicamente, dos ideas. Una, la técnica para obtener una estimación inicial de la órbita, a partir de un número mínimo de observaciones (tres) y sin introducir ninguna condición ni hipótesis adicional, esto es, sin presuponer si la órbita es una elipse, una hipérbola, etc. El método, basado en la comparación de áreas de sectores de cónicas versus sus triángulos cordales, conduce a una ecuación de octavo grado, cuyo uso exige también sofisticación y habilidad de cálculo. La otra idea es el uso del método de mínimos cuadrados, del que hablaré después, para ajustar óptimamente la órbita modificada al conjunto completo de observaciones. Hasta 1809, en un artículo y en *Theoria Motus...* Gauss no publicó los detalles del cálculo, que había ido puliendo entre 1801 y 1809 con los nuevos asteroides Pallas, Vesta, Juno así como con algunos cometas.

El redescubrimiento de Ceres puso a Gauss en contacto con los mejores observadores, especialmente Olbers, quien ahora es más recordado por haber puesto el dedo en un problema básico de la Cosmología: la llamada 'paradoja de Olbers', una pregunta aparentemente estúpida, pero que contiene una auténtica carga de profundidad: ¿Porqué es oscuro el cielo nocturno? Volviendo a Gauss, es obligado mencionar otra característica persistente en toda su obra: incluso en sus contribuciones más aparentemente aplicadas, se tiene la impresión de que para Gauss la distancia entre los cálculos tediosos y los aspectos de investigación de Matemática pura es casi inexistente. El cálculo original de la órbita de Ceres era básicamente heurístico e incluía, como casi todos los cálculos de Gauss, un uso habilísimo de interpolaciones y aproximaciones sucesivas, usando series de Taylor y trigonométricas con un virtuosismo extremado. Y la evolución y afinamiento de los cálculos de órbitas estaban muy estrechamente conectadas con su trabajo en paralelo sobre funciones elípticas y sobre la función hipergeométrica. Es notable el pragmatismo de Gauss; usaba cualquier herramienta a mano, como desarrollos en serie (y truncación) de los elementos de la perturbación, integración numérica cuando los desarrollos eran complicados o lentamente convergentes, e incluso anticipó las series de Fourier, introduciendo muchas ideas cuya justificación completa dista de ser trivial, pero que aplicó sin embargo de manera maestra. Comentemos, por ejemplo, la idea del anillo: las perturbaciones que produce un planeta sobre otros planetas o cometas resultan ser esencialmente equivalentes a las de un anillo de la misma masa total que el planeta, situado sobre la órbita y con la masa distribuida según el tiempo que invierte el planeta en cada segmento de su propia órbita. Usando este modelo, Gauss determinó la masa de Júpiter, vía sus perturbaciones sobre Pallas.

Gauss marca el inicio de la Astronomía moderna también en el planteamiento de un nuevo estándar de exigencia, precisión y fidelidad en las observaciones astronómicas y en su reducción. El método de mínimos cuadrados resultó ser una herramienta básica en este programa: inicialmente sólo una técnica, conforme su justificación probabilista fue siendo más clara, se transformó en uno de los pilares de la filosofía natural de Gauss.

Durante este periodo, Gauss realiza también experimentos sobre la modificación de la gravedad por la rotación terrestre, la determinación de la longitud geográfica, la identificación de cometas y el análisis de dificultades en la óptica del telescopio de Brunswick. Este último aspecto está seguramente en el origen de su interés en la óptica. El ciclo de Brunswick en la vida de Gauss se cierra en 1809, con la publicación de su *Theoria Motus ...* y la muerte de Johanna y de su tercer hijo, un golpe del que Gauss nunca se recuperó totalmente.

2.1. El Observatorio de Göttingen. En los primeros años del siglo XIX, F. Olbers promueve en el gobierno de Hannover la construcción de un Observatorio Astronómico en Göttingen. Inicialmente no tiene éxito, pero en un segundo intento consigue su objetivo y propone que se ofrezca a Gauss su dirección. Gauss acepta, declinando la oferta de San Petesburgo y se traslada a Göttingen en 1808; permanecerá alli el resto de su vida. En el ínterin se encuadra la guerra franco-prusiana (en la que murió el Duque Ferdinand) y la dominación napoleónica del reino de Hannover, que duró hasta 1814. A esta turbulenta situación atribuyen los biógrafos de Gauss su postura posterior básicamente muy conservadora. De aquellos años data una curiosa historia. Gauss había mantenido correspondencia con un francés, Monsieur LeBlanc, sobre tópicos avanzados de teoría de números y geometría de superficies. M. LeBlanc era realmente el seudónimo empleado por una mujer, Sophie Germain, para asegurar la atención que deseaba para sus ideas. Ante la invasión de Hannover por las tropas francesas y preocupada ante la eventualidad de que Gauss sufriera algún daño, encargó a un oficial del ejército francés conocido suyo que se ocupara personalmente de evitarlo. Sólo cuando el oficial visitó a Gauss, éste descubrió que su corresponsal francés no había sido realmente un hombre.

Gauss permaneció como Director del Observatorio realizando observaciones personalmente hasta su muerte, y la instrumentación del observatorio fue adquirida y su fabricación supervisada por Gauss, quien así estuvo en contacto directo con los mejores fabricantes de instrumentos del mundo. Desde el Observatorio, Gauss continuó con sus aportaciones teóricas: En 1818 obtiene y publica el método del anillo para el estudio de las perturbaciones en las órbitas planetarias, y en 1827, tras las primeras determinaciones de paralajes de estrellas por Bessel, Gauss se ocupó del movimiento propio del Sistema solar.

3. Geodesia y Topografía con la Geometría como fondo

Entre 1818 y 1832, Gauss dirigió un vasto proyecto para topografiar el reino de Hannover. Se trata de un problema práctico con implicaciones políticas y militares, además de las propiamente científicas. La iniciativa había sido de Schumacher en 1818: enlazar con la triangulación danesa. Enseguida se convirtió en un proyecto completo y ambicioso, que ocupó a Gauss durante diez años. Gauss intervino directamente en casi todos los aspectos de diseño, de toma de medidas y de su reducción y control.

La historiografía ha prestado gran atención a las medidas realizadas por Gauss en un *Gran Triángulo* dentro de la triangulación de Hannover. Se trata del triangulo determinado por tres cumbres, Brocken, Hohenhagen e Inselberg, con lados BH 69 km, HI 85 km y BI 105 km. Era la primera vez que se realizaban medidas topográficas a tan gran distancia y con tan gran precisión. La suma de los ángulos del triángulo se midió con un error del orden de 0,2 a 0,6 segundos de arco, lo que desde cualquier punto de vista es una auténtica proeza observacional. La pregunta natural en este contexto es si Gauss *pretendía* hacer, a través de esas medidas, una comprobación experimental sobre la validez de la Geometría euclidiana. Gauss siempre fue bastante circunspecto sobre este punto, sobre el que no existe actualmente consenso inambiguo. Lo más probable es que Gauss pretendiera que este triángulo jugara un papel de control en varios aspectos de la triangulación y que por ello pusiera especial cuidado en su medida; consta que esos datos 'experimentales' le proporcionaron un espléndido banco de pruebas para usar la técnica de mínimos cuadrados en la reducción y análisis de los datos. Pero parece difícil de aceptar que Gauss no considerara (siquiera para él mismo) los resultados como una buena prueba empírica de la adecuación de la Geometría euclidiana al espacio físico.

3.1. Gauss en Geodesia y Geometría. Como consecuencia de su dedicación a la topografía del reino de Hannover, Gauss produce dos obras importantes en Geodesia: *Bestimmung* ... (1828) y ... *Höheren Geodäsie* I (1843) y II (1846), y un ensayo para el *Premio de Copenhague* sobre las matemáticas implicadas en la cartografía (1822). Se introducen allí las bases de lo que luego se ha llamado la proyección de Gauss-Krüger, basada en la aplicación inteligente de las transformaciones conformes a la cartografía. Esta proyección es una variante de la proyección de Mercator transversa, que en la actualidad se ha impuesto como el sistema de referencia global que cubre la mayor parte de la superficie de la Tierra, la red UTM (Universal Transverse Mercator).

Pero la contribución fundamental para la evolución posterior de la moderna Geometría diferencial es la famosísima *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), auténtico documento fundacional, cuyas fuentes de inspiración se encuentran sin duda mezcladas con consideraciones de geodesia y de astronomía. Gauss crea en ese trabajo la Geometría diferencial de superficies, iniciando un programa contemplado en gran medida de manera visionaria por Riemann, y completado por el trabajo de muchos matemáticos en las siguientes décadas. En los casos más sencillos (los de curvatura constante) aparecen las geometrías homogéneas: euclidiana, esférica e hiperbólica (Bolyai-Lobachewski), que también pueden estudiarse de la manera sintética tradicional a la Euclides. El mero descubrimiento de que la Geometría euclidiana no es la única posible resultó ser una de las aventuras intelectuales más largas de la historia; Gauss va mucho mas allá de estos espacios homogéneos: introduce y reconoce a la cantidad que hoy se denomina curvatura (gaussiana) de una superficie como el invariante básico de la Geometría, y considera de una tacada tanto la Geometría euclidiana como la muchísimo más general en la que la curvatura no es constante, haciendo aparecer las tres geometrías de curvatura constante como intermedias entre la geometría plana euclidiana y las más generales, de curvatura variable.

Curiosamente, este trabajo, que mira directamente hacia el futuro, aparece casi al mismo tiempo que el descubrimiento de la geometría (hiperbólica) de Bolyai y Lobachewski, que quizás puede verse como la culminación de un problema del pasado, la aventura de las paralelas. La identificación entre la geometría de curvatura constante negativa y la geometría de Bolyai–Lobachewski requirió aún otros treinta años, y fue completada por Beltrami, aunque los elementos básicos de tal conexión estaban disponibles para Gauss, quien se interesaba tanto en problemas de tipo empírico (la adecuación de la Geometría euclidiana a la realidad física, una de las motivaciones de Lobachewski) como en los aspectos axiomáticos (la independencia del postulado de las paralelas, lo que interesaba más a Bolyai Janos, el hijo de Farkas).

Parece también que Gauss había meditado muy extensamente sobre estas cuestiones —desde sus estudios universitarios y quizás antes. Sophie Germain, quien mantuvo correspondencia con Gauss, había propuesto, motivada por la física de las membranas elásticas, la curvatura media como medida de la curvatura de una superficie y Gauss la tenía en alta estima. Hoy sabemos que la curvatura media mide aspectos extrínsecos de la geometría de una superficie, mientras que la curvatura gaussiana describe su geometría intrínseca. Al enfatizar el interés de los aspectos intrínsecos y permitir su distinción de los extrínsecos, Gauss abre el camino primero a la extensión a un espacio curvo n-dimensional debida a Riemann y, tras otro medio siglo, a la teoría de Einstein de la gravedad (Relatividad general). Pero discutir esto nos llevaría demasiado lejos.

3.2. Gauss y la Instrumentación: el heliotropo. Una contribución importante de Gauss a la instrumentación, básica para el éxito del proyecto cartográfico, fue la invención del heliotropo (1821). Se trata de un instrumento para facilitar la visibilidad de y desde estaciones lejanas. La idea es muy simple: se trata de reflejar la luz solar hacia la estación que se observa, de manera que una observación más precisa sea posible y fácil incluso con condiciones atmosféricas no completamente favorables y sobre distancias en las que antes la observación era inimaginable. En diversas formas el heliotropo subsistió hasta el advenimiento de la aerofotogrametría, que en la actualidad ha reemplazado, junto con la fotografía desde satélites, a los levantamientos topográficos a gran escala como el que dirigió Gauss en Hannover.

4. Gauss en Mecánica: más principios de mínimo

Por razones físicas, matemáticas y filosóficas, el cálculo variacional fue uno de los temas centrales en el siglo XVIII, y Gauss no se resistió a su hechizo. En 1829 aparece otra publicación corta de Gauss sobre Mecánica, en la que propone un nuevo principio extremal de la Mecánica, *el principio de mínima ligadura.* Gauss introduce, para un sistema mecánico de partículas, una cantidad que da una medida de la ligadura del sistema, $\sum m_i(\delta x_i)^2$, y enuncia como principio básico que el movimiento *real* del sistema mecánico minimiza esta cantidad. Este principio contiene y es más general que el de los desplazamientos virtuales de D'Alembert. Posteriormente Jacobi introdujo otro principio variacional pertinente en el movimiento de un sistema mecánico, a través de lo que hoy se conoce como métrica de Jacobi. En palabras del propio Gauss:

> *Es muy notable que los movimientos libres, cuando no pueden coexistir con las condiciones necesarias, resultan ser modificados por la Naturaleza exactamente de la misma manera que el matemático, según el método de los mínimos cuadrados, reconcilia observaciones ligadas entre sí por dependencias necesarias. Podría proseguirse más allá con esta analogía, pero no pretendo hacerlo ahora. . .*

Esta cita registra una constante en el pensamiento de Gauss: las ideas matemáticas son realizadas en la Naturaleza a través de una serie de principios básicos, que muestran profundas analogías en campos aparentemente diversos. Ingredientes esenciales en esta Filosofía natural son en Gauss la ley de fuerzas de Kepler/Coulomb, la teoría del potencial, los principios extremales y el principio de mínimos cuadrados. Gauss hizo mucho por la idea de la inteligibilidad matemática de la Naturaleza.

En su *Principia Generalia ... fluidorum in statu aequilibri* (1829), introduce un problema variacional asociado a la determinación de la figura de equilibrio de la superficie de un fluido, teniendo en cuenta la gravedad y las fuerzas de capilaridad y de adhesión al recipiente (hoy diríamos intermoleculares). Previamente Laplace había estudiado este problema, partiendo de ciertos hechos tomados como hipótesis (por ejemplo, el ángulo de contacto en la interfase). En contraste, Gauss deriva esas condiciones de su principio de mínima ligadura y en el curso de la derivación aparece por vez primera el teorema de la divergencia de Gauss. Las leyes de la capilaridad siguen como consecuencias, y también aparece un fenómeno hoy bien conocido: la competición entre efectos en los sistemas no lineales, que Gauss describe concisamente:

> *... Lo que obtenemos como resultado de una investigación delicada y difícil, es una condición de equilibrio que es accesible al sentido común, y que muestra el ajuste que ocurre cuando hay varias fuerzas prevalentes en conflicto.*

Dentro del mismo orden de ideas, Gauss trabaja en la formalización y propiedades matemáticas de la atracción newtoniana, originando la llamada *teoría del potencial*. Es en ese contexto en el que aparece la famosa *Ley de Gauss*: El flujo del campo gravitatorio a través de una superficie cerrada arbitraria es proporcional a la masa total contenida en el interior. Este resultado reduce a cálculos elementales desarrollos que antes requerían técnicas elaboradas, la marca de fábrica de los avances importantes. No quiero dejar de mencionar los trabajos de Gauss sobre la atraccion newtoniana de elipsoides y sobre la llamada *forma de Gauss de las ecuaciones de Lagrange*, conveniente para estudiar los cambios en los elementos orbitales bajo perturbaciones conocidas y que aún continúa en uso en ciertas aplicaciones de Mecánica celeste.

5. Gauss en Probabilidad aplicada

Una de las contribuciones más conocidas de Gauss, especialmente entre los no matemáticos, es sin duda el método de mínimos cuadrados.

La primera versión madura del método aparece publicada en *Theoria combinationis ... erroribus minimis ...* I (1821) y II (1823), aunque sus raíces en Gauss datan de mucho antes. Es importante entender que el método no es simplemente una receta conveniente para ajustar de manera óptima datos experimentales, impresion errónea que puede derivarse de algunas exposiciones demasiado pragmáticas. Por el contrario, la significación profunda del método depende de la ley de distribución de probabilidad de los errores en las observaciones. Gauss propone la distribución normal, conocida como campana de Gauss, y es sólo a través de esa relación cuando el método de mínimos cuadrados adquiere todo su significado. En varios lugares Gauss insiste en la importancia de emplear datos reales, y usa como ejemplos datos de sus observaciones en astronomía y en el levantamiento topográfico de Hannover (especialmente el Gran Triángulo).

Históricamente, la primera publicación de la idea parece ser la de Legendre (1806). Se sabe sin embargo que Gauss ya lo había usado varios años antes, ya que lo menciona en cartas a Olbers que datan de 1802. La conexión del metodo de Legendre con consideraciones probabilistas la hizo Laplace, pero Gauss entendió también esta relación de manera independiente. Es muy notable, y relativamente poco conocido, que el método de mínimos cuadrados tuvo un tercer descubridor independiente en Estados Unidos: Robert Adrain, matemático de origen irlandés emigrado a USA, propuso el método y descubrió su conexión con la ley de distribución de errores, publicando estos resultados en 1807, también en relación con la compensación de las redes topográficas.

6. Gauss en Óptica

La Dióptrica, que estudia la forma, disposición, diseño y defectos de las lentes y sistemas de lentes y sus limitaciones intrínsecas, es seguramente el campo más especializado de investigación empírica que Gauss abordó. Su interés proviene de las necesidades y dificultades de la observación astronómica: en 1807, Repsold, un reputado fabricante de instrumentos, le consulta sobre un objetivo doble acromático, iniciando así una larga colaboración. Gauss se interesó, entre otras cosas, en disminuir la aberración cromática de un sistema de lentes. La línea iniciada por esta colaboración propició, andando el tiempo, el importantísimo desarrollo industrial de la óptica en Alemania: Reichenbach, Fraunhoffer y Steinheil fueron los antecesores de Carl Zeiss en Jena, fábrica cuyo director científico fue E. Abbe, conocido en óptica por el establecimiento del límite efectivo de ampliación de un microscopio óptico, y que había estudiado con Riemann. La línea común, prolongada hacia atrás, lleva a Gauss.

La publicacion más importante de Gauss en este campo es la *Dioptrische ...* (1840), que estudia la trayectoria de la luz a través de un sistema de lentes en la aproximación llamada paraxial, en la que las lentes se suponen infinitamente delgadas y los rayos infinitamente cercanos al eje óptico. En esta aproximación todo sistema es equivalente a una sola lente *efectiva*. Este trabajo trata desde luego de las etapas básicas en el diseño de sistemas ópticos, pero su interés actual es conceptualmente reducido, y matemáticamente es bastante elemental: de hecho, Gauss vaciló sobre su publicación.

7. Gauss en Electricidad

Las investigaciones de Gauss en Electricidad se enmarcan dentro de su colaboración con Wilhelm Weber, que fue la más extensa y duradera que tuvo Gauss en su vida científica. Se inició a través de Alexander von Humboldt, que en 1828 persuadió a Gauss para que asistiera a una Convención en Berlín. Allí conoce a Weber, quien en 1831 y a propuesta de Gauss, se incorpora al claustro de Göttingen. En 1838, tras el *asunto de los siete*, Weber abandona Göttingen. Volverá en 1848, cuando Gauss ya había abandonado la investigación en electricidad.

El interés de Gauss por la electricidad mantuvo consistentemente una doble cara: al lado de aspectos empíricos, prácticos, hasta de ingeniería, aparecen penetrantes investigaciones teóricas, con bastantes relaciones con su trabajo anterior en Astronomía. Estas relaciones proceden de una sorprendente analogía: El potencial Newtoniano $V(r) = -GM/r$ responsable del movimiento en el Sistema solar es formalmente idéntico al potencial de Coulomb $V(r) = kQ/r$ que describe los efectos electrostáticos. Todas las herramientas matemáticas desarrolladas en la teoría del potencial newtoniano son aplicables, *mutatis mutandis*, a la electricidad. Pero adicionalmente, la maestría de Gauss en diversas técnicas matemáticas (incluyendo los resultados básicos del análisis complejo) significó la posibilidad de plantear y responder correctamente cuestiones importantes. Por ejemplo, Gauss hace un uso extensivo de las funciones esféricas, introducidas por Legendre, y establece el papel esencial de la ley de Coulomb como base de la electrostática, analizando también las modificaciones que deberían llevar a una auténtica electrodinámica. Una gran parte del contenido del capítulo sobre electricidad de cualquier texto de Física general, en la forma en que se presenta, se debe a Gauss. Propició el uso de medidas absolutas en Electromagnetismo y el establecimiento sistemático del sistema métrico (ampliado) que derivó en el actual sistema Internacional de Unidades (Gauss lo usaba con unidades mm s g). Descubrió, en 1833, las leyes hoy conocidas como Leyes de Kirchoff para los circuitos, y desarrolló una electrodinámica basada en una acción a distancia. Se sabe que un Riemann muy joven participó en algunos experimentos, y que uno de los temas en los que trabajó Riemann y de los que no han quedado datos era el desarrollo de una teoría matemática de la electrodinámica, continuando el esquema de Gauss-Weber.

7.1. Gauss y la Instrumentación: el telégrafo. Como otra consecuencia práctica de sus investigaciones en Electricidad, Gauss y Weber desarrollaron dos modelos de telégrafo entre 1833 y 1838. Las señales se observaban en el receptor mediante la desviación de una aguja magnética (una brújula) a derecha o izquierda, según el voltaje aplicado en el extremo emisor. Desarrollaron un código e instalaron el telégrafo entre el laboratorio de Weber y el Observatorio Astronómico, separados unos 1500 m. El telégrafo funcionó (con reparaciones en el hilo que se rompía frecuentemente) hasta que un rayo alcanzó al sistema y lo destruyó.

Gauss parece haber sido consciente de las posibilidades que abrían las comunicaciones eléctricas: sugirió que en las líneas de ferrocarril (entonces comenzando una rápida expansión) un raíl se usara como conductor para facilitar las comunicaciones a larga distancia. El invento de Gauss y Weber no era el primer intento de comunicación eléctrica a distancia, ni fue el que sobrevivió, privilegio que correspondió al sistema de Morse. Se sabe que algunos colegas lo consideraban como una aberración frívola y acientífica. Pero Weber profetizaba en 1835:

> *. . . Cuando el globo terráqueo esté cubierto con una red de ferrocarriles y de alambres telegráficos, esta red prestará servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano, en parte como un medio de transporte, en parte como un medio para la propagación de ideas y sensaciones, con la velocidad de la luz, . . .*

Ciento setenta años después tenemos Internet.

En su correspondencia tardía con Olbers, Gauss menciona la posibilidad de un motor eléctrico, pero Gauss parece pensar que la potencia que tal motor podría proporcionar era bajísima.

7.2. La electrodinámica gaussiana. La electrodinámica gaussiana es relativamente poco conocida. Es una teoría modelada en la gravitación de Newton, basada en una acción a distancia, y con fuerzas dependientes no sólo de la posición, sino también de la velocidad y de la aceleración. La razón de este desconocimiento es, quizás, que en la época en que Gauss construía esta teoría, el consenso científico sobre el electromagnetismo ya había tomado partido, decididamente, por el camino seguido por Faraday y Maxwell, que aparte de sus impresionantes éxitos predictivos es también conceptualmente más satisfactorio, al evitar la acción a distancia.

Este desconocimiento no ayuda a una evaluación realista. K. Schwarzschild mostró, a comienzos del siglo XX, que las ideas de Gauss podían conducir a una teoría viable, y recientemente se ha sugerido que también la teoría de Gauss-Weber de acción a distancia podría haber conducido, eventualmente, a la relatividad. Desde luego en esa teoría aparece una cantidad con dimensiones de velocidad, llamada constante de Weber, que debido a la presencia de coeficientes espúreos desafortunadamente no coincidía numéricamente con la velocidad de la luz, aunque sí en su orden de magnitud. Sea ello como fuere, lo que es cierto es que en este campo la línea de trabajo de Gauss se apartaba directamente de la filosofía contraria a la acción a distancia, mandato conceptual que tantos buenos frutos brindó posteriormente.

8. Gauss en Magnetismo y Geomagnetismo

En 1832, y en paralelo con su interés en electricidad, Gauss inicia también investigaciones en magnetismo terrestre. Conviene advertir que la unidad esencial de electricidad y magnetismo, hoy completamente integrada en nuestro conocimiento colectivo, distaba entonces de estar establecida: el análisis de Ampère sobre la descripción de las fuerzas producidas por el magnetismo data de unos pocos años antes. La iniciativa fue de Alexander von Humboldt, buscando la cooperación de Gauss para establecer una red de puntos de observación del campo magnético terrestre en todo el mundo.

Se trata del primer intento en la historia de plantear una observación a escala *global*, con sus nuevas exigencias: establecimiento de estándares comunes, de técnicas de medición, de requerimientos de precisión y fiabilidad. Los objetivos del programa eran el estudio de la distribución del magnetismo terrestre, de sus inhomogeneidades locales, de sus cambios temporales en intensidad, declinación e inclinación, y ambiciosamente, de la elucidación del origen del campo magnético terrestre.

Ya en 1832 Gauss publica un trabajo importante sobre la medición absoluta del campo magnético terrestre. Siguen otros dos trabajos fundamentales en 1839 y 1840, y un *Atlas de Geomagnetismo* publicado en 1840 por Gauss, Weber y Goldschmidt. El análisis del contenido de estas obras es interesante. Gauss define por vez primera el campo magnético, esencialmente de la manera hoy familiar, mediante la fuerza que causa en un imán, pero aún habla de un *fluido magnético*, sin entrar en demasiadas consideraciones sobre la naturaleza del magnetismo. Y sin embargo, a continuación introduce un *potencial magnético*, prueba que en la Tierra sólo puede haber dos polos magnéticos, y finalmente introduce una serie de relaciones nuevas entre las componentes horizontal y vertical del campo magnético en diferentes puntos, relaciones correctas que Humboldt se negó a aceptar durante bastante tiempo.

Gauss usa implícitamente la hipótesis de que la distribución de masa (carga, fluido magnético) en una región determina de manera única el potencial en todos los puntos de la región. Riemann denominó *principio de Dirichlet* a esta hipótesis, que como se sabe fue objeto de un encendido debate. Usando desarrollos en términos de funciones esféricas y de la coordenada radial, Gauss encuentra la dependencia radial de la componente vertical del potencial magnético y usa su teoría junto con datos observacionales para calcular los primeros veinte y cuatro coeficientes de este desarrollo, y a partir de ellos poder predecir la posición del Polo Sur magnético, que está cercano al Polo Norte geográfico. Esta predicción fue confirmada muy precisamente por la expedición del explorador capitán Wilkes en 1841.

El programa de Humboldt-Gauss condujo a varios resultados notables sobre el magnetismo terrestre, que eran totalmente desconocidos anteriormente. Por ejemplo, que el campo magnético varía con el tiempo. Y que ocasionalmente hay variaciones temporales bruscas (hasta del 10 % en términos relativos) que además ocurren simultáneamente en toda la Tierra (tormentas magnéticas). El mecanismo último tras ambos fenómenos aún no está bien explicado.

El trabajo de 1840 es la culminación de estas investigaciones. Gauss discute la determinación absoluta del campo magnético, mediante el magnetómetro, un aparato inventado por Gauss y Weber para determinar la componente horizontal de la fuerza magnética. Se trata de la primera medida *absoluta* de la fuerza que ejerce el campo magnético de la Tierra sobre una brújula, fuerza muy débil cuya medida requirió precauciones extremas. El ambiente de experimentación debía estar totalmente libre de perturbaciones magnéticas, lo que obligó a construir un laboratorio exento de hierro y de cualquier otro material magnético: se hizo de madera, con clavos de cobre; no debía haber en él la más mínima corriente de aire, etc. Gauss tomó el modelo del observatorio y de los procedimientos previamente desarrollados por Humboldt, reduciendo el tiempo de observación necesario e incrementando su exactitud, lo que dio lugar a una polémica entre ambos.

8.1. El número de enlace. Aunque se trata de un resultado concreto, no me resisto a mencionar el número de enlace. En 1833 Gauss publica una corta nota con valor fundacional. Lo hace en el contexto de sus investigaciones en magnetismo, por lo que lo he colocado dentro del apartado dedicado al magnetismo, aunque algunos autores afirman que también pensaba en órbitas de asteroides y planetas. Consideremos dos curvas cerradas en el espacio tridimensional $\Gamma_1 \equiv \mathbf{r}_1(s), \Gamma_2 \equiv \mathbf{r}_2(s)$, que no se corten. Gauss introduce la integral

$$\oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

e indica, sin prueba, que el valor de esta integral no cambia cuando las curvas se deforman arbitrariamente (respetando la condición de no cortarse), y que además ese valor es un número entero, llamado *número de enlace de las dos curvas*. Hoy vemos claro que el origen de estas propiedades es topológico. Pero en 1833 ni siquiera el nombre *topología* existía: Gauss propuso a Listing, uno de sus estudiantes, una exploración sistemática de este tipo de propiedades y Listing inventó, entre otros, el término Topología. Dentro del mismo orden de ideas está la relación

$$\int\int_S K d\sigma = 4\pi$$

para la curvatura K de una superficie cerrada convexa, que es también un invariante topológico.

9. La herencia de Gauss en la Física

Durante casi toda su vida, Gauss se ocupó de diversos aspectos de Física teórica y experimental. En su época universitaria efectuó experimentos sobre la gravedad, y un problema en el que trabajó sus últimos años era una modificación del péndulo de Foucault. En ambos casos, problemas físicos, prácticos y concretos, alejados de la imagen tópica de un matemático puro.

Su herencia se percibe tanto en sus aportaciones concretas a la Física o a la Instrumentación, como en la fertilidad a largo plazo de sus ideas matemáticas, sobre todo en campos que Gauss no pudo ni siquiera imaginar. Mencionaré unos pocos ejemplos.

La 'ley de Gauss' para los campos eléctrico y magnético, $\nabla\mathbf{E} \propto \rho$ y $\nabla\mathbf{B} = 0$, respectivamente, contiene esencialmente todo el electromagnetismo maxwelliano. Las otras dos ecuaciones de Maxwell pueden verse como consecuencias necesarias e inevitables, una vez se acepta la relatividad especial. Por supuesto, el camino histórico fue el opuesto: se llegó a la relatividad especial asumiendo que las cuatro ecuaciones de Maxwell eran invariantes bajo cambios de sistemas de referencia inerciales.

La Geometría diferencial se considera actualmente como *el* lenguaje natural de la Física. Según Einstein, *sin Gauss no hubiera sido posible la Relatividad general.* Es curioso, y hasta cierto punto paradójico, que el paradigma de la eliminación de la acción a distancia en Física, la teoría de la gravitación de Einstein, se base en unas matemáticas que originó Gauss, quien por su parte persistió en el uso de la acción a distancia en sus teorías electrodinámicas. En cualquier caso, lo que se podría llamar 'forma gaussiana' de las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein, es iluminadora: la curvatura gaussiana (escalar) del 3-espacio es proporcional a la densidad espacial de energía, entendiendo que todas las cantidades son las propias de *cualquier observador*, en movimiento arbitrario. Y, sin salir de este campo, indiquemos que la 'ley de Gauss' es también esencialmente valida en la Relatividad general, y conduce a una derivación sencilla de la solución de Schwarzschild.

Gauss trianguló Hannover y como consecuencia alumbró la Geometría diferencial de superficies. Uno desearía que las triangulaciones del espacio-tiempo que se usan en diversos modelos de Teoría cuántica de campos acaben iluminándonos en relación con una tentativa teoría cuántica de la gravedad.

La función gaussiana $e^{-\lambda x^2}$ es de una increíble ubicuidad en Física, Mecánica cuántica, Óptica, Teoría cuántica de campos, ... por muy buenas razones. Gauss, de nuevo, fue el primero en entrever el papel protagonista de esta función.

En metrología, el sistema métrico internacional de unidades debe mucho a Gauss. Intervino en la Comisión de Pesas y Medidas de Hannover, y fue el mayor defensor de la necesidad de adoptar un tal sistema en la primera mitad del siglo XIX.

Existe también un reverso. Gauss parece haber tenido una actitud que podríamos calificar de *ortogonal* a muchos avances importantes que se estaban produciendo en su tiempo, incluso a aquellos que habían sido anticipados, aunque no publicados, por él mismo. Un ejemplo extremo es su papel en relación con la Geometría no euclidiana. En su madurez Gauss tendía a cortar a sus interlocutores sobre matemáticas con la afirmación de haber obtenido (pero no publicado) tales o cuales resultados; consta por ejemplo la perplejidad de Jacobi cuando Gauss le mostró un viejo cuaderno que guardaba en su escritorio, en el que figuraban muchos de los resultados que Jacobi creía haber descubierto sobre funciones elípticas. Las Obras completas, que incluyen los trabajos no publicados de Gauss resultarían, en líneas generales, confirmar a posteriori las afirmaciones de Gauss, aunque en algunos casos hay fechas ligeramente forzadas. Algunos de los que hoy consideramos como grandes parecen no haber despertado ningún interés en Gauss, por ejemplo Moebius, Hamilton o Grassmann. En particular, las leyes de producto de los cuaternios, con su no-conmutatividad intrínseca, que tanto esfuerzo costó encontrar a Hamilton en 1843, aparecen en uno de los cuadernos de Gauss en 1819.

Algo semejante acontece en relación con la Física. En 1800 la naturaleza ondulatoria de la luz se habia establecido ya de manera incuestionable a través del experimento crucial de T. Young. Se sabe que Gauss trató personalmente con Fraunhoffer en su vertiente de constructor de instrumentos, pero eludió por completo interesarse por la nueva teoría ondulatoria de la luz a la que Fraunhoffer mismo contribuyó de manera importante con su estudio de la difracción. Y algo semejante parece haber ocurrido en relación con el principio de mínima acción enunciado por Hamilton, un principio de una elegancia, claridad y amplitud de aplicación que ha dejado a la sombra a muchas otras formulaciones que hoy tienden a verse como algo arcaicas, como el principio de mínima ligadura de Gauss. No parece que Gauss tuviera gran interés en la formulación hamiltoniana de la Mecánica, a pesar de que sus raíces históricas se imbrican en el principio de Fermat y la aproximación paraxial de la óptica geométrica, un campo al que Gauss había hecho aportaciones básicas. En este caso, la visión a largo plazo estuvo claramente del lado de Hamilton, el primero en desvelar lo que resultaría ser la sombra de la Mecánica cuántica. En éste, como en otros campos, es chocante encontrar a un Gauss refractario a cambios que ya se habían impuesto o estaban imponiéndose en la comunidad científica.

9.1. La firma de Gauss en Física: algunos comentarios finales.

Entre los matemáticos es común la impresión de que la implicación de Gauss en problemas aplicados le restó tiempo y energías que podría haber empleado de otra manera, comenzando por la lamentación de Jacobi, quien se preguntaba qué no hubiera hecho aquel gigante si la Astronomía no le hubiera desviado de su camino. ¿Se trata realmente de una lástima? Desde luego no para los astrónomos, ni para los geodestas ni para los físicos: en esos campos Gauss marcó estándares para los esfuerzos posteriores. Por ejemplo, la precisión de las medidas del *Gran Triángulo* no se volvió a alcanzar hasta la década de 1960, con una tecnología completamente nueva, el uso del laser.

Gauss tuvo implicación en proyectos experimentales, algunos a muy gran escala, y en este sentido está casi más cercano a un científico del siglo XX que a uno del XVIII. Cuando pedía al gobierno financiación para instrumentación y desarrollo de costosos experimentos, generalmente lo hacía de tal modo que el gobierno tenía casi como única opción aceptar su solicitud. Gauss tuvo desde luego un interés genuino en el progreso tecnológico y sus aspectos de ingeniería y en una de sus últimas salidas de Göttingen acudió a conocer las obras del ferrocarril que se estaba construyendo.

Esta combinación de genio matematico con habilidad experimental y amor por el puro cálculo no es frecuente. Gauss fue un observador cuidadoso y muy exacto, que realizó observaciones toda su vida, y que contribuyó al perfeccionamiento de los métodos: cálculos largos reducidos a etapas en una escala que puede examinarse, optimización del proceso de observación y reducción de las medidas en bruto, preocupación por las bases numéricas, organización formal y diseño de tablas y datos, etc.

Puede reconocerse un patrón heurístico común subyacente en muchos trabajos de Gauss: investigaciones empíricas extensivas, que conducen a conjeturas y nuevas vistas. Y todo ello en un auténtico cruce multidimensional de intereses y enfoques, semejante en algunos aspectos al que en relación con el origen de la Relatividad, con Einstein y Poincaré como protagonistas, describe P. Galison. Gauss fue un defensor a ultranza del empirismo en Ciencia. En palabras de Clemens Schäffer, en un artículo publicado en Nature, **128** (1931):

> *. . . No fue realmente un físico, en el sentido de buscar nuevos fenómenos, sino un matemático que formuló en términos matemáticos exactos los resultados experimentales obtenidos por otros . . .*