RELACIONS CREATIVES ENTRE LA FÍSICA I LA GEOMETRIA

IGNASI MUNDET

Resum. El propòsit d'aquest article és descriure tres exemples d'aplicació d'idees físiques a problemes de geometria. El primer exemple és elemental (la propietat focal de les el·lipses), el segon exemple prové de la teoria de nusos, i el tercer de la geometria algebraica.

Introducció

Parlaré d'un fenomen en certa manera complementari del que Yuri Kubishin explica en el seu article: la influència que la física ha tingut en el desenvolupament de les matemàtiques, no només a nivell conceptual, sino també en la resolució de problemes ben concrets. És molt remarcable que alguns d'aquests problemes van ser proposats dins l'àmbit de la matemàtica teòrica, sense sospitar que poguessin tenir relació amb les ciències naturals.

Pel que fa a llur relació amb la física, la història de bastantes branques de la matemàtica es pot dividir en tres etapes: (1) naixement amb una forta motivació provinent de la física (més o menys encertada a la llum del coneixement actual), (2) allunyament de les motivacions originals i desenvolupament teòric, platejament de problemes amb una motivació purament matemàtica, i (3) retrobament i sorpresa: alguns problemes plantejats amb una motivació matemàtica estan relacionats amb la física, fins l'extrem que els físics teòrics són capaços de donar-ne la solució o de suggerir els camins i les eines necessàries per resoldre'ls.

Un exemple d'aquesta història el dóna la geometria algebraica, que va néixer en part motivada per problemes de mecànica relacionats amb integrals el·líptiques. L'estudi d'aquestes integrals va conduir a les integrals abelianes i a la teoria de les corbes algebraiques. Posteriorment, la geometria algebraica es va desenvolupar independentment de la física. Un dels motius va ser la necessitat de dotar la geometria algebraica d'una base sòlida i d'un llenguatge i tècniques que s'allunyessin de tota ambigüetat. I això no pas de manera gratuïta: s'havia arribat a un punt on moltes de les tècniques i idees usades (notablement per l'escola italiana, que d'altra banda havia aportat moltes idees fructíferes) plantejaven dubtes seriosos per la manca de fonaments. En una tercera etapa, i molt especialment en els darrers vint-i-cinc anys, hem presenciat la irrupció espectacular d'idees d'origen físic a la geometria algebraica, que han permet resoldre diverses conjectures antigues aparentment fora del nostre abast a curt termini.

Un altre exemple el dóna la teoria de nusos. No es pot dir que la teoria de nusos neixi amb Kelvin, però el cert és que Kelvin hi va donar un impuls molt decidit perquè pensava que els nusos eren un bon model per descriure els àtoms dels elements (vegeu [Ati90]). Quan Kelvin va començar a pensar en aquestes qüestions [K1867] ja se sabia que la classificació dels àtoms era un problema de natura discreta, tot i l'aparent natura contínua de moltes magnituds químiques (la taula periòdica dels elements fou introduïda poc després per Mendeleev, l'any 1869). Kelvin va pensar que podria ser una bona idea pensar en els àtoms dels elements en termes de nusos, ja que els nusos també presenten fenòmens de tipus continu (un nus és, al cap i a la fi, un objecte continu) i de tipus discret (les classes d'equivalència dels nusos són objectes de natura combinatòria). Això el va conduir a interessar-se en el problema de la classificació dels nusos. Després es va veure que, almenys a primera vista, nusos i àtoms no tenen gaire a veure, i el problema general de classificar els nusos es va plantejar com una qüestió de matemàtica teòrica. Sorprenentment, però, des dels anys vuitanta s'han anat trobant més i més relacions entre nusos i física teòrica, fins l'extrem que ha estat possible resoldre problemes de la teoria de nusos usant idees provinents de la física.

En aquest article veurem tres exemples de com la física pot ser útil en les matemàtiques. El primer, la demostració de la propietat focal de l'el·lipse, és molt elemental. Després veurem un exemple de teoria de nusos (càlcul del nombre de deslligament de nusos tòrics) i finalment un exemple de la geometria algebraica (càlcul del nombre de corbes planes racionals de grau d que passen per $3d-1$ punts). A diferència del primer exemple, en el segon i tercer exemples només donarem una breu descripció dels problemes: explicar-ne la solució queda fora de l'abast d'aquest article.

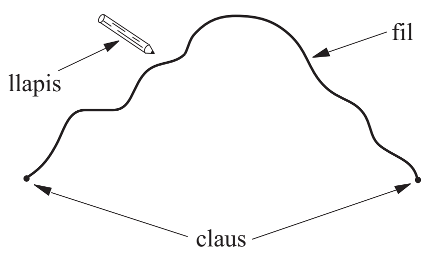
Agraïments. Voldria agrair a l'FME i a la Comissió Gauss per la invitació a fer una xerrada a la UPC, en la qual està basat aquest article, i per l'ajut en la seva elaboració.

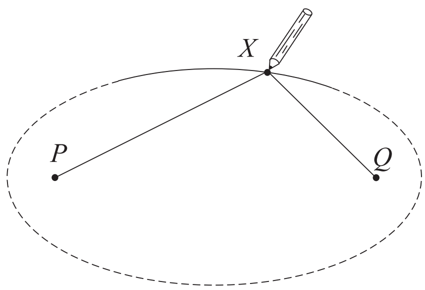
Propietat focal de l'el·lipse

En aquesta secció s'exposa una demostració "física" de l'anomenada *propietat focal de l'el·lipse.* Una el·lipse és el lloc de punts del pla pels quals la suma de la distàncies a dos punts fixats (anomenats focus) és constant. Així doncs, si anomenem P i Q els focus, els punts d'una el·lipse són els punts x del pla que satisfan

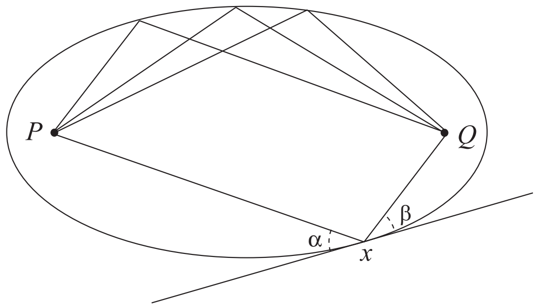
$$d(x,P)+d(x,Q)=\ell,$$

on ℓ és un nombre real fixat. Aquesta descripció suggereix immediatament una manera de dibuixar el·lipses: prenem una fusta plana, que farà el paper del pla, clavem un clau a cada un dels focus, agafem un cordill de longitud ℓ i lliguem els extrems del fil als claus que fan de focus. Llavors prenem un llapis i l'usem per tensar el fil. Mantenint el fil en tensió podem desplaçar el llapis al llarg d'una corba, que quedarà dibuixada pel llapis: ja tenim una el·lipse!



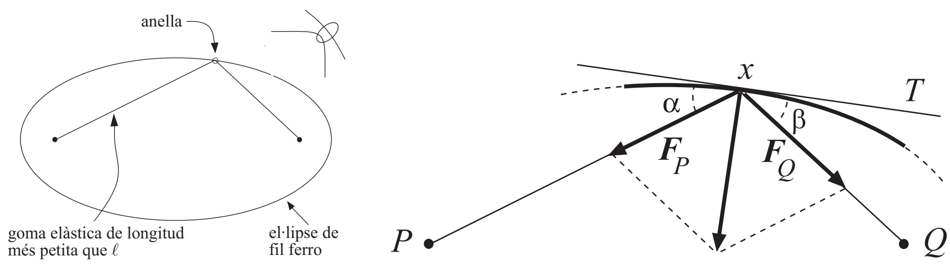


Suposem que la nostra el·lipse és la base d'una paret. Llencem una boleta pel pla, en línia recta, sortint d'un dels focus: quan arribi a la paret, la boleta rebotarà i seguirà en línia recta. Independentment de la direcció inicial, després de rebotar la boleta passarà per l'altre focus; llavors tornarà a rebotar i passarà un cop més pel primer focus, després pel segon, etc. Això és el que s'anomena la *propietat focal de l'el·lipse.* De manera més geomètrica, la propietat focal de l'el·lipse equival al fet que, per tot punt x de l'el·lipse, els angles α, β dibuixats a la figura següent coincideixen:



Demostrar la propietat focal és un exercici senzill de geometria. Aquí en veurem una demostració que usa nocions físiques (aquesta demostració està extreta del llibre de V.A. Uspenski "Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas", de la col·lecció *Lecciones populares de matemáticas* de l'editorial MIR).

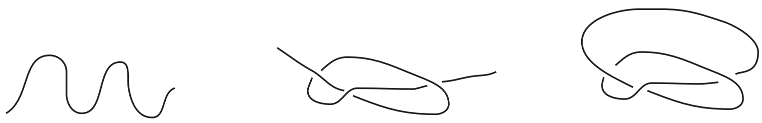
Suposem que la nostra el·lipse està feta de fil ferro. Ara, en lloc d'un cordill agafem un fil de goma elàstica de longitud una mica menys de ℓ, en lligem els extrems als focus i el *forcem* a passar per l'el·lipse usant una anella, tal com es mostra a la figura de l'esquerra:



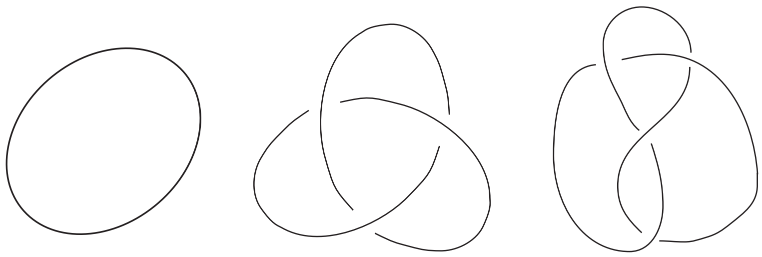
Com que el fil està tensat més enllà de la seva longitud habitual, la força de tensió *estira* l'anella en les direccions i intensitats especificades pels vectors $\boldsymbol{F}_P$ i $\boldsymbol{F}_Q$ que es mostren al dibuix de la dreta. Ara bé, l'anella només es pot moure al llarg de l'el·lipse, i quan ho fem el fil no s'escurça ni s'allarga, per la pròpia definició que hem donat de l'el·lipse. Per tant el treball que fa la força de tensió quan desplacem l'anella és nul: és a dir, la força de tensió no actua. Això implica que la força resultant, donada pel vector $\boldsymbol{F}_P + \boldsymbol{F}_Q$ és perpendicular a la tangent T. Però els vectors $\boldsymbol{F}_P$ i $\boldsymbol{F}_Q$ tenen el mateix mòdul proporcional a l'allargament. Per tant $\alpha = \beta$, que és precisament la propietat focal.

Teoria de nusos

Per fer un nus agafem un cordill, l'emboliquem tant com vulguem i n'unim els extrems, tal com es mostra a la figura:



Embolicar un cordill es pot fer de moltes maneres diferents. Així, podem obtenir molts exemples de nusos, com aquests d'aquí:



nus trivial   nus trifoli   nus vuit

Direm que dos nusos són equivalents si el primer es pot deformar al segon sense deslligar els extrems i sense tallar el nus en cap moment. Direm que un nus és trivial si és equivalent al nus trivial. En general és molt complicat saber si dos nusos són equivalents o fins i tot de saber si un nus donat és trivial. Per exemple, si ens donen un nus i, després de provar-ho hores i hores, hem sigut incapaços de deformar-lo al nus trivial, com podem tenir la certesa que el nus no és trivial? Hi ha infinites maneres de deformar un nus, i bé podria ser que intentant-ho unes hores més l'acabéssim desfent! (Un bon repte pel lector, arribats a aquest punt, seria intentar demostrar que el nus trifoli no és trivial. Hi ha maneres força elementals de fer-ho, però trobar-les no és necessàriament un problema senzill.)

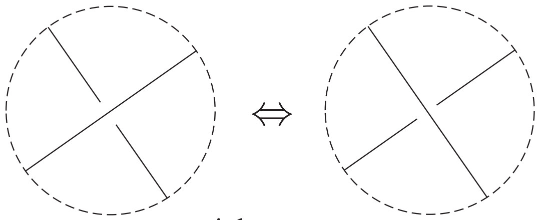
Per abordar aquest problema amb un mínim d'esperances d'èxit, cal desenvolupar eines que ens permetin distingir nusos sense haver d'estar fent proves una quantitat indefinida de temps. Una estratègia és intentar definir invariants de nusos: nombres o d'altres objectes (per exemple, polinomis) associats a nusos que coincideixen quan dos nusos són equivalents. Així, si calculem l'invariant de dos nusos i obtenim resultats diferents, podem concloure que els nusos no són equivalents. Per contra, si els invariants coincideixen, en general nom podem concloure res.

Avui dia es coneixen molts invariants de nusos: nombre de deslligament, gènere, gènere *slice*, polinomis d'Alexander i de Jones, invariants de Vassiliev, invariants quàntics, etc. Per a textos sobre teoria de nusos vegeu [Ada04, Kau93, Kaw96, Lic97, Man04, Mur96, Sos02]. En general, però, s'observa un patró força empipador: els invariants que són alhora fàcils de definir i fàcils de calcular solen ser trivials i completament inútils.[1]

Un invariant molt remarcable introduït recentment per Ozsvath i Szabo [OS04a] és l'anomenada homologia de Floer de nusos (basada en les construccions introduïdes per primer cop per Floer a [Fl89]), que permet decidir quan un nus és trivial o no (vegeu [OS04b]). Tot i que la definició original era extramadament tècnica i poc apta per fer càlculs, en un treball conjunt amb Manolescu i Dylan Thurston, Ozsvath i Szabo [MOST] han donat un algorisme combinatori per calcular-lo (aquest algorisme està basat en un treball previ de Ozsvath, Szabo i Sarkar). A dia d'avui, però, no es coneix cap demostració elemental del fet que l'homologia de Floer permeti distingir el nus trivial dels altres nusos: l'única demostració coneguda resulta de combinar magistralment alguns dels teoremes més espectaculars de la topologia de dimensió baixa dels últims vint anys. No parlarem aquí d'aquests teoremes: ens limitarem a dir que les idees de la física hi juguen un paper crucial (com també passa a la definició original de l'homologia de Floer).

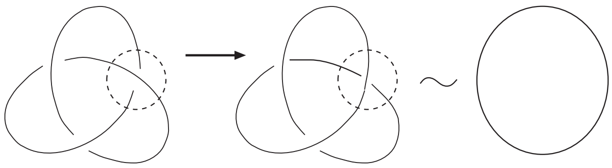
[1] Un contraexemple a aquesta llei de Murphy és la tricolorabilitat, un invariant molt elemental que permet demostrar, per exemple, que el trifoli no és trivial.

Nombre de deslligament. És un dels invariants que es poden definir amb facilitat, però que resulta difícil de calcular. La base és que, partint d'un nus qualsevol, sempre és possible arribar al nus trivial fent un seguit de transformacions anomenades canvis de creuament, tal com es mostra a la figura següent.



canvi de creuament

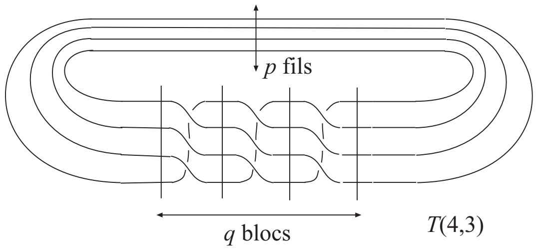
Exemple. Amb un sol canvi de creuament és possible tranformar el nus trifoli en el nus trivial.



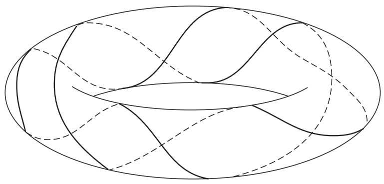
Es defineix el *nombre de deslligament* d'un nus com el mínim nombre de canvis de creuament necessaris per transformar-lo en el nus trivial. L'únic nus amb nombre de deslligament igual a 0 és el nus trivial. El nombre de deslligament del trifoli és 1: hem observat abans que amb un canvi de creuament es pot convertir el trifoli en el nus trivial i, com que el trifoli no és trivial, cal com a mínim un canvi de creuament per convertir-lo en el nus trivial. El nombre de deslligament del nus vuit també és 1.

El nombre de deslligament és un invariant ben senzill de definir que il·lustra el principi que hem mencionat anteriorment: en general és molt difícil de calcular.

Nusos tòrics. Siguin p i q dos nombres naturals primers entre si. El *nus tòric* $T(p,q)$ és el nus representat per la figura adjunta.



S'anomena nus tòric perquè es pot dibuixar a la vora d'un tor sòlid, tal com es mostra a l'exemple de la figura següent:



Resulta ser un nus pel fet que p i q són primers entre sí. En general, si d és el màxim comú divisor de p i q, $T(p,q)$ és la unió de d nusos disjunts (en termes més tècnics, $T(p,q)$ és un enllaç de d components).

Exemple. El nus trifoli és $T(2,3)$.

Observació. No tots els nusos són tòrics! Per exemple, i com veurem més endavant, el nus vuit no ho és.

Nombre de deslligament i gènere slice de $T(p,q)$. És un exercici ben interessant (i no gaire complicat) veure que $T(p,q)$ es pot transformar en el nus trivial amb

$$g(p,q) := \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

canvis de creuament. Per tant, el nombre de deslligament de $T(p,q)$ és menor o igual a $g(p,q)$. Milnor va conjecturar [Mil68] que aquesta cota és òptima.

Més exactament, Milnor va conjecturar que el gènere slice de $T(p,q)$ és $g(p,q)$. El *gènere slice* d'un nus K es pot definir de la manera següent.

Pensem l'esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ com la compactificació de $\mathbb{R}^3$ per un punt, i sigui $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ la bola de dimensió 4. No és difícil veure que sempre existeixen superfícies $\Sigma \subset B^4$ tals que $\partial\Sigma = K$, i el gènere slice de K és el mínim gènere d'aquestes superfícies Σ. Per exemple, una superfície Σ tal que $\partial\Sigma = T(p,q)$ es pot obtenir pertorbant la corba algebraica (singular) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 | x^p = y^q\}$ i tallant el resultat amb B^4.

Hom pot demostrar que el gènere slice d'un nus mai és superior al seu nombre de deslligament (donar-ne una demostració és un bon exercici). Per tant, la conjectura de Milnor sobre el gènere slice implica que el nombre de deslligament de $T(p,q)$ és $g(p,q)$, ja que el gènere slice resulta ser no superior al nombre de deslligament.

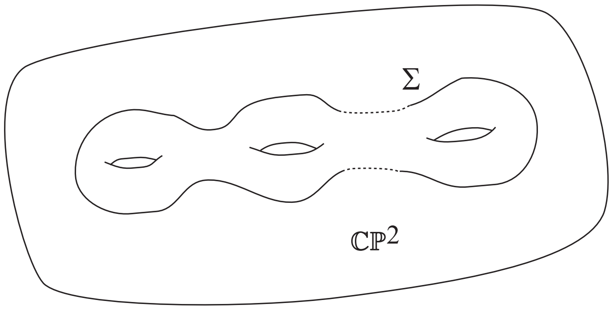
Essent el gènere slice el mínim dels gèneres de les superfícies $\Sigma \subset B^4$ que tenen K per vora, i assolint-se aquest mínim per una corba algebraica, la conjectura de Milnor il·lustra un principi o intuició general que Arnold anomena "principi d'economia" de la geometria algebraica: quan es tracta de minimitzar el gènere o algun invariant similar dins d'una col·lecció de superfícies que satisfan una certa propietat, i la col·lecció en qüestió conté corbes algebraiques, aleshores aquestes corbes són bones candidates per minimitzar l'invariant (aquesta intuició també sembla ser raonable en dimensions superiors).

Un altre exemple d'aquest principi d'economia ve donat per la conjectura de Thom, que explicarem tot seguit.

La conjectura de Thom. Tota classe d'homologia $A \in H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$ es pot representar com la classe fonamental d'una superfície diferenciable compacta, connexa i orientada

$$\Sigma \subset \mathbb{CP}^2.$$

Donada una classe A, podem trobar moltes superfícies diferents que representin A. De fet, el gènere d'aquestes superfícies pot ser arbitràriament gran (recordem que el gènere d'una superfície és el nombre de forats): si Σ representa A i té gènere g, per tot $g' \geq g$ podem obtenir una superfície diferenciable $\Sigma' \subset \mathbb{CP}^2$ que representa A i té gènere g': és suficient enganxar $g'-g$ nanses a Σ, de manera que totes les nanses estiguin contingudes en una bola; d'aquesta manera les classes d'homologia representades per Σ i Σ' coincideixen. En altres



paraules, sempre és possible fer crèixer el gènere d'una superfície que representi A. En canvi, no sempre és possible, almenys a primer cop d'ull, fer-lo decrèixer! Això motiva la següent pregunta.

Qüestió. Quin és el mínim dels gèneres de les superfícies que representen la classe A?

Thom va conjecturar que si A és d vegades la classe representada per una recta projectiva, amb $d \geq 1$, aleshores:

$$\text{gènere}(\Sigma) \geq \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

L'expressió de la dreta és precisament el gènere d'una corba algebraica que representa A. Per tant, segons la conjectura de Thom les corbes algebraiques minimitzen el gènere entre totes les possibles superfícies.

Conjectura de Thom i nombre de deslligament. És un bonic exercici demostrar que:

Conjectura de Thom $\Rightarrow$ Conjectura de Milnor

A través d'aquesta implicació es va demostrar que el nombre de deslligament del nus $T(p,q)$ és $g(p,q)$. L'any 1992, Kronheimer i Mrówka van demostrar una variant de la conjectura de Thom (que usa superfícies $K3$ en lloc de $\mathbb{CP}^2$), que els va permetre demostrar la conjectura de Milnor. L'any 1994 Kronheimer i Mrówka van aconseguir demostrar la conjectura de Thom. Tot i que la conjectura de Milnor no precisa res de física per al seu enunciat, les eines de Kronheimer i Mróka per demostrar la conjectura de Thom tenen profundes arrels en la física teòrica: al treball de 1992, Kronheimer i Mróka van usar l'equació dels instantons a la teoria de Yang-Mills, i al treball de 1994 van usar els invariants de Seiberg-Witten (v. [KM93, KM94] i [Wit89, Mor96]).

Val a dir que actualment existeix una altra demostració, més elemental, que el nombre de deslligament del nus $T(p,q)$ és $g(p,q)$, deguda a Rasmussen [Ras03] i basada en l'anomenada homologia de Khovanov [Kho00]. Aquesta homologia és el que s'anomena una *categorització* del polinomi de Jones que, potser ja ho heu endevinat, està molt relacionat amb la física teòrica.

Observació. Amb el que hem après fins ara ja podem demostrar que el nus vuit no és tòric. El nus vuit té nombre de deslligament 1. Si fós tòric, seria necessàriament $T(2,3)$, és a dir, el trifoli, ja que si $\{p,q\} \neq \{2,3\}$ aleshores $g(p,q) \geq 2$. Però el trifoli és *tricolorable*, i el nus vuit no ho és.

Això acaba l'exemple de l'aplicació de la física a la teoria de nusos.

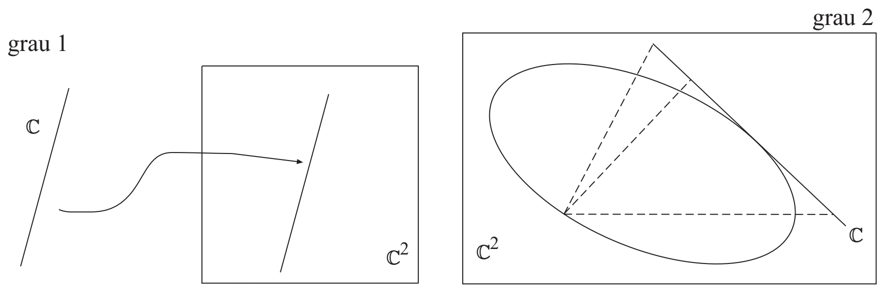
Corbes racionals al pla

Una *corba racional parametritzada* de grau d dins $\mathbb{CP}^2$ és una aplicació de la forma:

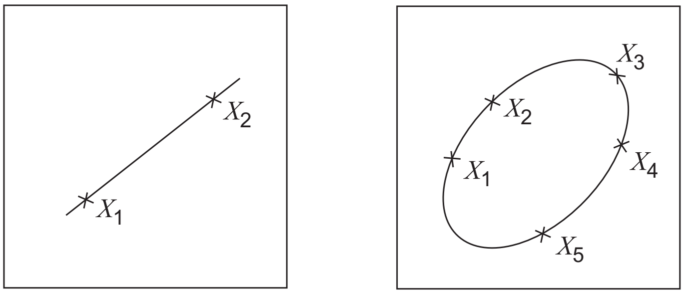
$$\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2, \quad [x:y] \mapsto [A(x,y) : B(x,y) : C(x,y)],$$

on A, B i C són polinomis homogenis de grau d. Identifiquem dues corbes racionals $f, g : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$ quan existeix un automorfisme $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tal que $g = f \circ \phi$.

Exemples. Les corbes racionals de grau 1 són les rectes i les corbes de grau 2 són les còniques.



Nombre de corbes racionals. És ben sabut que donats dos punts al pla, existeix una única recta que hi passa i que donats cinc punts al pla, existeix una única cònica que hi passa.



Potser no és tan ben sabut que donats vuit punts al pla, existeixen dotze corbes racionals de grau 3 que hi passen. En general: donats $3d-1$ punts al pla existeix un nombre finit N_d de corbes racionals de grau d que hi passen (per què?).

Problema. Calcular N_d.

Calcular N_d és un dels problemes clàssics de la geometria enumerativa, una branca molt clàssica dins la geometria algebraica (es pot identificar N_d amb el grau de la varietat de Severi de corbes de grau d, [Ran87]). Les tècniques de la geometria algebraica només havien permés calcular els primers termes de la successió $N_1, N_2, \ldots$, i això és tot el que se sabia fins fa pocs anys.

La fórmula de Kontsevich. Identificant N_d amb un invariant de Gromov-Witten i usant els axiomes (a l'època conjecturals) satisfets pels invariants de Gromov–Witten, Kontsevich va obtenir l'any 1994 [KM94] aquesta relació recursiva entre els nombres N_d:

$$N_d = \sum_{k+l=d} N_k N_l \left(k^2 l^2 \binom{3d-4}{3k-2} - k^3 l \binom{3d-4}{3k-1} \right).$$

Aquesta fórmula permet calcular tots els N_d usant únicament la informació N_1. S'obté:

$$N_2 = 1, \quad N_3 = 12, \quad N_4 = 620, \quad N_5 = 87304, \ldots$$

Les propietats conjecturals en les quals es basa l'argument de Kontsevich van ser demostrades per Ruan i Tian l'any 1995 [RuT95].

Els invariants de Gromov–Witten es van definir combinant idees d'un dels geòmetres més creatius de l'època actual, Misha Gromov, amb les d'un dels físics teòrics que més ha influit a les matemàtiques, Edward Witten. Les idees aportades per Witten provenen del camp de la teoria de cordes, una branca de la física teòrica íntimament relacionada amb la geometria algebraica.

Com a referències addicionals per aquesta part esmentem els llibres [KV07, Kat06, MS04] i els articles [Xam94, Ran98, Pan99, Ran04, Zin05, Zin06].

Referències

Teoria de nusos

[Ada04] Adams, C.C. *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. (Revised reprint of the 1994 Freman & Company original).

[Ati90] Atiyah, M.F. *The Geometry and Physics of Knots.* Cambridge University Press, 1990.

[Fl89] Floer, A. *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory.* J. Differential Geom., 30 (1989), 207-221.

[Kau93] Kauffman, L.H. *Knots and Physics.* World Scientific Pub., 1991, 1993 (2n edition).

[Kaw96] Kawauchi, A. *A Survey of Knot Theory.* Birkhäuser, 1996.

[K1867] Thomson, W. (Lord Kelvin). *On vortex atoms.* Philosophical magazine 34, July 1867, pp. 15-24. (Mathematical and Physical Papers, Vol. 4. Cambridge, 1910).

[Kho00] Khovanov, M. *A categorification of the Jones polynomial.* Duke Mathematical Journal 101 (2000), 359-426.

[KM93] Kronheimer, P.B. and Mrowka, T.S. *Gauge theory for embedded surfaces.* I. Topology, 32(4):773-826, 1993.

[KM94] Kronheimer, P.B. and Mrowka, T.S. *The Genus of Embedded Surfaces in the Projective Plane*, Math. Res. Letters 1, 797-808 (1994).

[MOST] Manolescu, C., Ozsvath, P., Szabo, Z., and Thurston, D. *On combinatorial link Floer homology*, http://xxx.lanl.gov/abs/math/0610559.

[Lic97] Lickorish, W.B. R. *An Introduction to Knot Theory.* Springer-Verlag, 1997.

[Man04] Manturov, V.O. *Knot Theory.* Chapman & Hall/CRC, 2004

[Mil68] Milnor, J.W. *Singular points of complex hypersurfaces.* Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, 1968.

[Mor96] Morgan, J. W. *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*. Princeton University Press, 1996.

[Mur96] Murasugi, K. *Knot Theory and its Applications*. Birkhäuser, 1996.

[OS04a] Ozsváth, P. and Szabó, Z. *Holomorphic discs and knot invariants*. Adv. Math. 186 (2004), 58-116.

[OS04b] Ozsváth, P. and Szabó, Z. *Holomorphic discs and genus bounds*. Geom. Topol. 8 (2004), 311-334.

[Ras03] Rasmussen, J.A. *Khovanov homology and the slice genus*. math.GT/0306378 (Harvard PhD Thesis).

[Sos02] Sossinski, A. *Knots: Mathematics with a Twist*. Harvard University Press, 2002.

[Wit89] Witten, Edward. *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*. Communications in Mathematical Physics, Vol. 121, pp. 351-399 (1989).

Corbes racionals

[Kat06] Katz, S. *Enumerative Geometry and String Theory*. American Mathematical Society, 2006.

[KV07] Kock, J. and Vainsencher, I. *An Invitation to Quantum Cohomology*. Progress in Mathematics, 249. Birhäuser, 2007.

[KM94] Kontsevich, M. and Manin, Y. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*. Comm. Math. Phys. 164 (1994), 525-562.

[MS04] McDuff, D. and Salamon, D. *J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology*. American Mathematical Society colloquium publications, 2004.

[Pan99] Pandharipande, R. *Intersections of Q-divisors on Kontsevich's moduli space* $\bar{M}_{0,n}(\mathbf{P}^r, d)$ *and enumerative geometry*. Trans.Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1481-1505.

[Ran87] Ran, Z. *The degree of a Severi variety*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 17, Number 1 (1987), 125-128.

[Ran98] Ran, Z. *On the quantum cohomology of the plane, old and new, and a* $K3$ *analogue*. Collect. Math. 49 (1998), 519-526.

[Ran04] Ran, Z. *Enumerative geometry of divisorial families of rational curves*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 3 (2004), 67-85.

[RuT95] Ruan, Y. and Tian, G. *A mathematical theory of quantum cohomology*. J. Differential Geom. 42 (1995), 259-367.

[Xam94] Xambó, S. *String theory and enumerative geometry*. Proceedings of the Fall Workshop on Differential Geometry and its Applications. Barcelona' 93. Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC. pp. 63-73. 1994.

[Zin05] Zinger, A. *Counting rational curves of arbitrary shape in projective spaces*. Geometry & Topology, Volume 9 (2005), 571-697.

[Zin06] Zinger, A. *Counting Plane Rational Curves: Old and New Approaches*. October 26, 2006 (www.math.sunysb.edu/∼azinger/)