# EULER: IDEES SEMINALS EN COMBINATÒRIA

JOSEP M. BRUNAT

Resum. De la quantitat ingent de treballs d'Euler, només una part molt minsa està dedicada a la combinatòria. Tanmateix, els pocs problemes combinatoris que Euler tractà han estat punt d'arrencada de desenvolupaments posteriors rellevants. En aquest article comentarem alguns d'aquests problemes, com el dels ponts de Königsberg, el tour del cavall d'escacs, el problema de Josephus, i els quadrats màgics i greco-llatins.

## El personatge

Sempre he tingut la sensació que els noms de científics associats a teoremes, conceptes o teories bategen la cosa en qüestió amb tanta eficàcia, que s'oblida que el nom, a part de ser el d'un teorema o concepte o teoria, és el d'una persona. Per això, i potser corrent el risc de repeticions amb altres pàgines d'aquest volum, vull començar per unes notes breus i disperses sobre aquest personatge que fou Leonhard Euler.

Leonhard Euler va néixer a Basilea l'any 1707, fill del pastor calvinista de Reihen, Paul Euler, i de Marguerite Brucker. Passà els primers anys a Reihen fins que anà a estudiar a Basilea, on trabà amistat amb els Bernouilli. El 1725, Daniel i Nicolaus Bernouilli es varen traslladar a l'Acadèmia de Sant Petersburg, patrocinada per l'Emperadriu Catalina I de Rússia. Dos anys més tard, per recomanació dels Bernouilli, s'escollí Euler com a membre de l'Acadèmia per a la secció de fisiologia i medicina, però tres anys després ja ocupava la càtedra de filosofia natural, o sigui de física. Euler mantingué una activitat científica frenètica que no disminuí ni quan va perdre un ull el 1735.

L'any 1741 Euler rebé una invitació de Frederic de Prússia per anar a Berlín, invitació que acceptà. Al llarg de l'estada de vint-i-cinc anys a Berlín, continuà mantenint relació amb l'Acadèmia de Sant Petersburg, que seguia publicant treballs seus, i on acabà tornant el 1766. Aquell mateix any perdé la vista de l'altre ull i es quedà cec del tot, circumstància que tampoc no li va impedir de continuar treballant amb intensitat.

A més de científicament, biològicament també fou molt prolífic. Tingué tretze fills, però la majoria no van arribar a l'edat adulta i només dos el van sobreviure. Morí a Sant Petersburg el 7 de setembre de 1783 als setanta-sis anys.

Euler era un home culte. Ja hem esmentat que, la primera vegada, a Sant Petersburg hi va anar com a expert en fisiologia i medecina. Els textos científics són en llatí o francès, algun en alemany. Hi ha testimonis que l'elogien com un gran coneixedor dels clàssics. Per exemple, D. Brewer al primer volum de les *Letters of Euler* (1872) assegura que (citat a [22])

> Euler podia repetir *L'Eneida* sencera, fins i tot podia dir el primer i l'últim vers de cada pàgina de l'edició que utilitzava... Hi ha una erudita memòria sobre una qüestió de mecànica de la qual, com ell mateix ens explica, un vers de *L'Eneida* li va donar la primera idea.

Potser per influència familiar, la seva religiositat fou un altre tret remarcable del seu caràcter. A l'elogi que amb motiu de la seva mort li va dedicar el seu deixeble Nicolas Fuss [13] es diu:

> Estava completament imbuït amb respecte per la religió, la seva pietat era sincera i la seva devoció plena de fervor. Complia escrupulosament, fins a l'últim detall, els deures del cristianisme. Estimava tothom, i si se sentí mogut per la indignació fou contra els enemics de la religió, especialment contra els declarats apòstols de l'ateisme.

Això concorda amb l'anècdota que explica De Morgan al seu *Budget of Paradoxes* [11], segons la qual Euler es va avenir a una ensarronada contra Diderot, el qual feia apologia de l'ateisme a Sant Petersburg:

> Diderot va ser informat que un savi matemàtic tenia una demostració algebraica de l'existència de Déu i que l'explicaria davant de tota la cort, que si la volia escoltar. Diderot, amablement, acceptà... Euler avançà cap a Diderot i, seriosament i en un to de perfecta convicció,

> li digué: "Senyor,
>
> $$\frac{a+b^n}{n} = x,$$
>
> per tant, Déu existeix; contesti!"

Un aspecte de l'Euler matemàtic que sovint passa desapercebut al costat de la seva ingent obra és la seva contribució a les notacions matemàtiques. Florian Cajori fou un historiador de les matemàtiques que va escriure entre el 1928 i 1929 una documentadíssima història de les notacions matemàtiques en dos volums [8]. No és casualitat que, si mireu els indexs analítics d'aquests llibres, el nom propi al qual es dedica més espai sigui Euler, seguit per Leibniz. Tots els altres apareixen amb menys de la meitat d'espai. Segons Cajori,

> exceptuant Leibniz i Euler, cap matemàtic no ha inventat més de dos ideogrames que siguin universalment adoptats a les matemàtiques modernes.

Cajori esmenta –i documenta– entre d'altres, l'ús de $e$ per a la base dels logaritmes naturals, el símbol $\Delta$ per a les diferències finites, i un impuls important, juntament amb Leibniz i els Bernouilli, en l'ús dels parèntesis per significar agrupació –una cosa que avui ens sembla tan natural.

Per acabar aquest apartat, esmentarem un tret d'Euler que sí que ha estat lloat repetidament: la seva gran capacitat de càlcul. La millor prova d'això són, és clar, els seus textos, però potser Aragó és qui ho ha expressat amb paraules més ben escollides (*Oeuvres*, t.2 , 1854, citat a [22]):

> Euler calculava sense esforç aparent, com els homes respiren, o com les àligues s'aguanten per elles mateixes en el vent.

El marquès de Condorcet també hi va abundar. En el seu elogi [10], després de descriure bastant melodramàticament la mort d'Euler, diu que

> Euler deixà de viure i de calcular

com si viure i calcular fos la mateixa cosa per a aquest gran home.

## Treballs de probabilitat i combinatòria

El 1843 Nicolas Fuss va fer un primer catàleg dels treballs d'Euler que contenia la considerable xifra de 750 entrades. Entre 1910 i 1913 Gustav Eneström va fer el catàleg que avui es dóna per bo, que en té 866. Això inclou tota mena de textos, articles, memòries, llibres i fins i tot algunes cartes de contingut científic. La pàgina

`http://math.dartmouth.edu/~euler/`

és de visita obligada per als interessats en Euler. Classificats per temes, hi ha detalls dels 866 treballs, de vegades també traduccions i versions originals. Els temes que va tractar Euler són molts i molt diversos, de la teoria de nombres als eclipsis, de la geometria a l'òptica, tots els aspectes de l'anàlisi, la mecànica, la música, etc. etc. Naturalment, també va tractar la combinatòria. L'apartat *Probabilitat i combinatòria* conté només 21 entrades, tot just un 2,4% dels 866 treballs. La classificació és discutible. Per exemple, particions i funcions generadores no apareixen com a temes combinatoris, ni tampoc la seva famosa fórmula de les cares, els vèrtexs i les arestes, tan lligada als grafs planaris. De què tracten aquests 21 treballs? Heus ací una ullada general. Ens referirem als treballs amb el títol precedit de la referència d'Eneström per tal que, si en teniu curiositat, us en sigui més fàcil la localització a l'adreça web esmentada més amunt.

Els dos primers són comentaris a treballs previs de Bernouilli i La Grange (escrit així) sobre com, davant d'un conjunt de mesures, decidir quina acceptar com a bona.

- E488 Observationes in praecedentem dissertationem illustris Bernouilli
- E628 Éclaircissements sur la mémoire de Mr de La Grange inséré dans le V volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations etc.

N'hi ha dos més relatius a estimació de riscos i avantatges en jocs.

- E313 Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharon
- E811 Vera aestimatio sortis in ludis

Cinc estan dedicats al que avui potser en diríem matemàtica financera, i s'estudien temes com anualitats, assegurances i pensions.

- E334 Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain
- E335 Sur las rentes viagères
- E403 Des Herrn Leonhard Euler nothige Berechnung Einrichtung einer Witwencasse
- E473 Éclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public qu'utile a l'Etat...
- E599 Solutio quaestionis ad calculum probabilitis pertinentis: Quantum duo conjuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utrisque mortem certa argenti summa persolvatur.

En aquell moment les loteries, en particular la loteria genovesa, començava a funcionar. Euler s'hi va interessar i hi va dedicar cinc treballs.

- E338 Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise
- E412 Solution d'una question très dificile dans le calcul des probabilités
- E600 Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium
- E812 Réflexions sur un espèce singulière de loterie, nommée Loterie Génoise
- E813 Analyse d'un problème du calcul des probabilités

Pels temes, s'endevina que en tot l'anterior hi ha molta més probabilitat que combinatòria, tot i que, naturalment, els problemes probabilístics sovint involucren problemes d'enumeració. Els últims set són els més estrictament combinatoris i aquells en què ens fixarem més.

El primer és el famós problema dels ponts de Königsberg, del qual donaré detalls més endavant.

- E53 Solutio problematis ad geometriam pertinentis

Els dos següents tracten del tema dels desarranjaments. També els comentarem més endavant.

- E201 Calcul de la probabilité dans le jeu de recontre

- E738 Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum

Sovint els títols dels treballs d'Euler donen molt pocs indicis sobre el seu contingut. Això passa amb l'E738 acabat d'esmentar i també amb el següent:

- E309 Solution d'une question curieuse que ne paroît soumise a aucune analyse

Aquest és el problema anomenat *Knight's Tour* o problema del cavall dels escacs. Es tracta de saber com pot un cavall dels escacs, fent els moviments admesos en el joc, passar exactament una vegada per cada casella i tornar al punt de partida. El problema té moltes variants: fer recorreguts simètrics, comptar recorreguts, variar les dimensions del taulell, admetre taulells amb forats, etc. etc.

El següent tampoc té un títol gaire aclaridor.

- E476 Observationes circa novum et singulare progressionum genus

Aquest és l'anomenat *Problema de Josephus*, que podríem subtitular com a "indicacions per a sobreviure a un suïcidi col·lectiu". Ball i Coxeter a *Mathematical Recreations and Essays* [1] atribueixen la història a Hegesippus i l'expliquen com segueix. Un grup de 41 jueus s'amaguen en una cova fugint del romans. Abans que lliurar-se als romans, decideixen suïcidar-se col·lectivament. Josephus Flavius és un d'ells i no hi està d'acord, però té temor de dir-ho explícitament, així que proposa fer el suïcidi ordenadament. Es posaran tots en rotllana i, començant en un lloc prefixat, el que faci tres es suïcidarà. A partir d'aquest, i seguint la rotllana en el mateix sentit, el que faci tres entre els supervivents s'haurà de suïcidar, i així fins arribar a l'últim. Josephus i un amic seu ja sabien quines serien les dues posicions dels qui s'haurien de suïcidar en últim lloc, s'hi van posar i així es van estalviar el mal tràngol. El llibre de Ball i Coxeter dedica unes pàgines al problema, però un tractament més interessant el podeu trobar al llibre *Concrete Mathematics* de Graham, Knuth i Patashnik [14], molt oportunament dedicat a Leonhard Euler.

Finalment, els dos últims es dediquen als quadrats màgics.

- E795 De quadratis magicis
- E530 Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés magiques

Un *quadrat màgic* és una matriu quadrada d'ordre $n$ que té com a entrades els $n^2$ primers nombres naturals de manera que les entrades de cada fila i de cada columna sumen el mateix (de vegades s'exigeix també que les diagonals sumin el mateix). Tot i que en els dos títols anteriors les paraules clau són *quadrats màgics*, el problema generat per aquests treballs és, com veurem, el dels quadrats llatins ortogonals.

Amb excés d'optimisme, vaig pensar que potser podria dir alguna cosa dels cinc temes involucrats en aquets set treballs: els ponts de Königsberg, els desarranjaments, el problema del cavall dels escacs, el problema de Josephus i els quadrats llatins ortogonals. Les primeres proves, però, em van fer desistir ràpidament perquè resultava massa llarg. El problema de Josephus és, potser, més numèric que combinatori i és el primer que vaig descartar. El problema del cavall dels escacs és un problema directament relacionat amb els grafs hamiltonians i, com que tard o d'hora la FME dedicarà un curs a Hamilton, potser serà el moment de parlar-ne. Així que comentaré només els problemes dels ponts de Königsberg, dels desarranjaments i dels quadrats llatins ortogonals.

## Els ponts de Königsberg

Königsberg és la ciutat que avui es diu Kaliningrad. La Rússia actual no té el territori en una sola peça: hi ha una petita part a la costa del mar Bàltic, al golf de Danzing, entre Polònia i Lituània, que està separada de la resta. La ciutat més important d'aquesta regió és Kaliningrad, travessada pel riu Pregel. Potser per ser en un lloc estratègic, amb un port que mai no es glaça, és una ciutat d'història molt agitada. Va ser capital del ducat de Prússia, però del 1757 al 1762 ja va estar ocupada pels russos. A la Segona Guerra Mundial va ser devastada: la ciutat actual és nova. Després de la guerra, quedà formant part de la Unió Soviètica i fou quan canvià el nom tradicional de Königsberg pel de Kaliningrad.

La figura reprodueix un pòster que es va poder veure al metro de Barcelona durant l'any 2000, l'any mundial de les Matemàtiques, i que il·lustra el problema dels ponts de Königsberg. El riu Pregel produeix

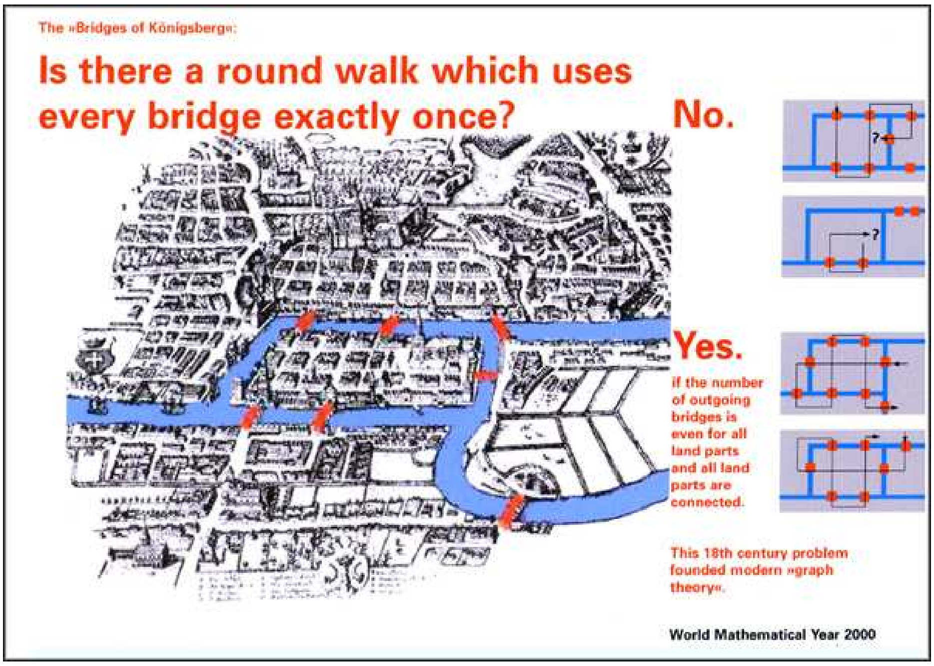


FIGURA 1. El pòster dels grafs eulerians

una illa (anomenada Kneiphof) i, cap a la dreta, el riu es separa en dues branques. Com és natural, uns quants ponts, de noms tan romàntics com Pont de la Mel o Pont de la Ferreria, facilitaven el pas de la gent entre les quatre parts de ciutat delimitades per les branques del riu. Es diu que la gent de Königsberg s'entretenia mirant de fer un recorregut que passés exactament una vegada per cada pont. Atès que ningú ho va assolir, era convenciment general que això era impossible. El 26 d'agost de 1735 Euler presentà oralment a l'Acadèmia de Sant Petersburg la prova de la impossibilitat i l'any següent ho publicà a l'article E53 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, del qual hi ha versió castellana a [12].

L'argument d'Euler és bàsicament com segueix. De les quatre peces de terra, diguem $A$ a la part més alta, que està connectada per tres ponts. Suposeu que hi ha un recorregut que comenci i acabi a $A$ i que passi exactament una vegada per cada pont. Quan comenci el recorregut passarem per un pont amb un extrem a $A$; només en quedaran dos per utilitzar. Tard o d'hora passarem per un altre dels dos ponts restants, serem una altra vegada a la part $A$ i només en quedarà un per utilitzar. El recorregut continuarà pel tercer pont i no podrem tornar a $A$ sense repetir pont. Per tant, no hi ha cap recorregut dels demanats que comenci i acabi a $A$. El mateix argument prova, de fet, que si $A$ està connectada per un nombre senar de ponts, no hi ha cap recorregut amb inici i final a $A$ que no repeteixi pont. Ara, com que totes les regions de terra tenen un nombre senar de ponts, el mateix argument val per a totes elles. Així doncs, no hi ha un recorregut tancat que passi exactament una vegada per cada pont. I un recorregut que comenci i acabi a diferents regions? Suposeu que n'hi hagués un. Considereu una peça de terra que no sigui ni l'origen ni el final. Cada vegada que hi arribeu per un pont, n'haureu de sortir per un altre. Per tant, el nombre de ponts que tenen un extrem en aquesta peça haurà de ser parell. En el cas de Königsberg, totes les peces tenen un nombre senar de ponts, per tant el recorregut és impossible.

L'estil d'Euler és necessàriament molt literari, amb molt pocs formalismes; penseu, per exemple, que els subíndexs no estaven inventats. A la fi de l'article, Euler resumeix les seves conclusions, referides a qualsevol nombre de regions i de ponts, en els tres punts següents.

- Si hi ha més de dues àrees amb un nombre senar de ponts, aleshores el recorregut és impossible.
- En canvi, si hi ha exactament dues àrees amb un nombre senar de ponts, aleshores el recorregut és possible començant en una d'aquestes àrees i acabant a l'altra.
- Si, finalment, no hi ha àrees amb un nombre senar de ponts, aleshores el recorregut demanat es pot fer començant a qualsevol regió.

A les conclusions s'enuncia el *si, i només si*, però noteu que els arguments anteriors demostren la necessitat, però no la suficiència. De fet, una prova explícita del *si, i només si* no la tenim fins al 1873. L'autor és C. Hierholzer i la publicació (en alemany i pòstuma) porta per títol *Sobre la possibilitat de travessar un sistema de línies sense repetició ni discontinuïtat* [15] (versió anglesa a [2]). El problema que es planteja Hierholzer és el de fer dibuixos lineals sense aixecar el llapis del paper i sense resseguir línies ja dibuixades. La versió de Hierholzer s'acosta més a la dels grafs que tenim avui. Un *graf* consta d'un conjunt finit $V$, els elements del qual es diuen *vèrtexs* (les peces de terra, les interseccions de les línies), i d'una família $E$ de subconjunts de $V$ de cardinal dos, els elements de la qual es diuen *arestes* (els ponts, els segments de línies entre interseccions). El nombre de vegades que un vèrtex apareix com a element d'una aresta (és a dir, el nombre de ponts que té una peça de terra o el nombre de línies que s'uneixen en un punt) és el *grau* del vèrtex. La representació usual d'un graf consisteix a dibuixar un punt per a cada vèrtex i un arc de corba entre cada dos vèrtexs que formen una aresta. Una successió de vèrtexs i arestes que comenci i acabi al mateix vèrtex i que contingui cada aresta exactament una vegada és un *circuit eulerià*; i el mateix, però començant en un vèrtex i acabant en un altre, un *recorregut eulerià.* Un graf es diu *eulerià* si té un circuit eulerià.

Per tal que el problema tingui sentit cal, és clar, que, es pugui anar de qualsevol peça de terra a qualsevol altra; traduït a termes abstractes, cal que el graf sigui *connex.* L'enunciat del teorema dels grafs eulerians tal com el podeu trobar als llibres de grafs és, si fa o no fa, com segueix:

**Teorema.** Sigui $G$ un graf connex. Aleshores (i) el graf $G$ és eulerià si, i només si, té tots els vèrtexs de grau parell; (ii) $G$ té un recorregut eulerià si, i només si, hi ha exactament dos vèrtexs de grau senar; en aquest cas, un recorregut eulerià ha de començar en un i acabar en l'altre.

Tornem una mica enrere en el temps. El 1810 Louis Poinsot, en el seu *Sur les polygones et les polyèdres* [27] planteja el següent problema:

> Donats uns quants punts situats aleatòriament a l'espai, es requereix unir-los amb un únic fil de forma que els extrems es juntin i que la longitud total sigui igual a la suma de les distàncies mútues entre els punts.

Traduïm els punts per vèrtexs i els trossos de fil entre dos vèrtexs per les arestes. Els grafs de $n$ vèrtexs on cada dos vèrtexs diferents determinen una aresta es diuen grafs complets d'ordre $n$ i es denoten $K_n$. La pregunta de Poinsot és, en termes moderns, si $K_n$ és eulerià. Com que els vèrtexs de $K_n$ tenen grau $n-1$, la resposta és positiva si $n-1$ és parell, és a dir, si $n$ és senar, i negativa altrament. Poinsot dóna un mètode per trobar efectivament el circuit eulerià i fa una interpretació, com la posterior de Hierholzer en termes de dibuixar sense aixecar el llapis del paper.

El 1849 apareix la interpretació del dòmino. O. Terquem [39] es planteja la possibilitat de, seguint les regles del joc, posar damunt la taula totes les fitxes d'un dòmino. La resposta és que sí, i a la figura 2 en teniu una manera. En termes de grafs una altra vegada: primer no-

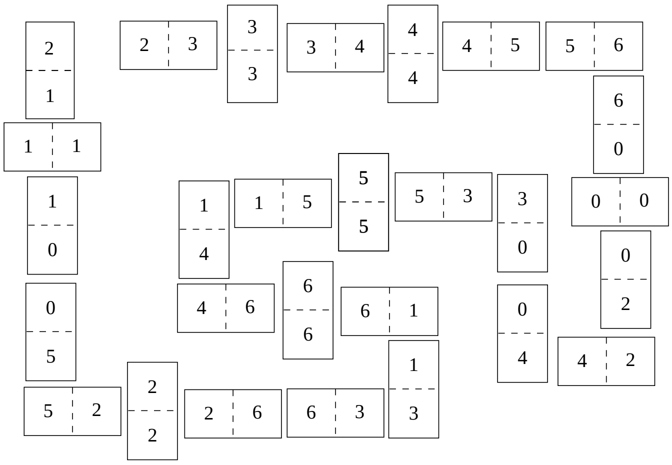

FIGURA 2. Un dòmino amb totes les fitxes lligades

teu que el problema té resposta positiva si, i només si, en té sense els dobles. Doncs comencem per ignorar els dobles. Ara interpreteu els nombres $0, 1 \ldots, 6$ com a vèrtexs d'un graf i cada fitxa del dòmino com una aresta entre els dos números que conté. Teniu un exemple de graf complet $K_7$, que és eulerià perquè 7 és senar.

L'anomenat problema del dòmino, però, és més complicat i m'hi vull referir principalment en el que segueix. No es tracta de saber si es poden posar totes les fitxes o no, sinó de saber de quantes formes es pot fer. Denotem per $\mathrm{Eul}(G)$ el nombre de circuits eulerians no equivalents d'un graf eulerià $G$. No equivalents aquí vol dir que identifiquem, a efectes d'enumeració, amb cada circuit, tots els que s'obtenen d'aquest recorrent-lo començant en un altre vèrtex o bé començant en un altre vèrtex i en un altre sentit. El problema del dòmino és calcular $\mathrm{Eul}(K_7)$ i, en general, $\mathrm{Eul}(K_n)$ amb $n$ senar.

Aquest nombre creix molt ràpidament en termes de $n$ i és de difícil càlcul. El 1859 M. Reiss, en un treball de títol explícit *Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 d'un jeu du domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu* i que fou publicat pòstumament el 1871 [28] obtingué amb càlculs molt pacients $\mathrm{Eul}(K_7)$, que resulta ser 1015440.

El 1887, G. Tarry fa un progrés significatiu [37]. Ara el problema, però, es presenta en termes de laberints: *Nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées.* Els laberints també es modelen en termes de grafs. Cada punt on podeu triar per on continuar caminant és un vèrtex, i cada passadís entre dos vèrtexs és una aresta. Amb aquesta formalització, queda clar que Tarry també cercava el nombre de circuits eulerians. El seu mètode consisteix a eliminar un vèrtex i emprar una recurrència, la qual cosa li permet calcular $\mathrm{Eul}(K_n)$ fins a $n = 15$ (resulta un nombre de 34 xifres).

Els intents de calcular $\mathrm{Eul}(K_n)$ continuaven. Per exemples, el de V. S. Shishov i Ho Ba Thuan [33] el 1968, que, teòricament, permet calcular $\mathrm{Eul}(K_n)$ a partir d'un sistema d'equacions lineals, però de dimensions tan grans que resulta inviable, i el de V.A. Sorokin [35], que resultà erroni.

El 1998 Brendan McKay i Robert Robinson publiquen *Asymptotic enumeration of Eulerian circuits in the complete graph* [21], que és una fita en el tema. Copio l'abstract:

> We determine the asymptotic behavior of the number of Eulerian circuits in a complete graph of odd order. One corollary of our result is the following. If a maximum random walk, constrained to use each edge at most once, is taken over $K_n$, then the probability that all the edges are eventually used is asymptotic to $e^{3/4}/\sqrt{n}$. Some similar results are obtained about Eulerian circuits and spanning trees in random regular tournaments. We also give exact values for up to 21 nodes.

El resultat principal és asimptòtic, però pemet calcular valors exactes fins a $n = 21$ vèrtexs. El nombre de circuits eulerians de $K_{21}$ resulta tenir 68 dígits.

Una variació del problema és el cas en què els ponts siguin de direcció única, és a dir, en termes de grafs, que les arestes siguin dirigides, de manera que un dels vèrtexs sigui l'origen i l'altre el final de l'aresta. En aquest cas els arguments es poden ajustar per obtenir la caracterització dels grafs dirigits eulerians: un graf dirigit és eulerià si, i només si, per a cada vèrtex $v$ el nombre d'arestes que el tenen per origen (que es diu el grau d'entrada, $d^-(v)$ ) coincideix amb el nombre d'arestes que el tenen per final (que es diu el grau de sortida $d^+(v)$).

L'abstract de més amunt fa referència als *regular tournaments*. Un *tournament* o torneig d'ordre $n$ és un graf complet $K_n$ amb totes les arestes dirigides. El nom de torneig prové del fet que es pot pensar que cada vèrtex representa un equip, que en un torneig tots juguen contra tots i que una aresta dirigida $u \to v$ significa que l'equip $u$ ha guanyat l'equip $v$. Un torneig regular és un torneig en què els graus d'entrada i de sortida són iguals, és a dir, un torneig eulerià.

Curiosament, el problema de calcular el nombre de circuits eulerians en un graf dirigit té resposta explícita donada per l'anomenat teorema BEST per les inicials dels seus autors [41, 34].

**Teorema** [Bruijn, van Aardenne-Ehrenfest, Smith i Tutte, 1951] Sigui $D$ un graf dirigit amb conjunt de vèrtexs $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i, per a cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sigui $d_i$ el grau d'entrada i de sortida de $v_i$. Aleshores el nombre de circuits eulerians de $D$ és:

$$\mathrm{Eul}(D) = t \prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!$$

on $t = t(D)$ és el nombre d'arbres generadors dirigits de $D$ amb arrel un vèrtex donat.

El nombre $t$ se sap calcular mitjançant un determinant d'ordre $n - 1$.

La dificultat del còmput del nombre de circuits eulerians en un graf eulerià va quedar ben establerta l'any 2004 quan G. R. Brightwell i P. Winkler [7] van demostrar que es tracta d'un problema $\#P$-complet. És d'aquesta mena de problemes per al quals decidir l'existència és trivial (només cal mirar els graus dels vèrtexs), però comptar quants n'hi ha és molt difícil.

En les línies anteriors m'he centrat en l'enumeració, però el tema té altres aspectes. Per exemple, el constructiu. Una vegada sabem que el graf és eulerià, com podem construir de forma efectiva un circuit eulerià? El mètode més popular és el basat en un treball de Fleury[1] de 1883 titulat *Deux problèmes de géométrie de situation.* És un algorisme simple en què es comença en un vèrtex qualsevol i, arribats a un vèrtex, es continua per una aresta qualsevol amb l'única restricció que, si es pot, s'ha de prendre una aresta que permeti retornar al vèrtex sense passar per arestes ja utilitzades. Un altre algorisme està basat en les idees de l'esmentat C. Hierholzer, consistent essencialment a enganxar cicles. Un més modern de Tucker [40] barreja les dues tècniques.

Els grafs eulerians apareixen en contextos diversos. Aquí mateix els hem vist en termes de recorreguts per ponts, de dibuixos sense aixecar el llapis del paper, com a laberints, com a dòminos... Apareixen també en problemes d'optimar el repartiment de cartes, d'optimar el traçat de plotters, en codis i fins i tot en genètica. A [30] podeu trobar descripcions elementals d'aquestes aplicacions. El treball d'Euler dels ponts de Königsberg ha estat l'origen de la teoria de grafs i una llavor que ha produït moltes i bones matemàtiques en diferents contextos.

## Desarranjaments

El 1751 Euler escriu l'article catalogat E201 i titulat *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre.* El *jeu de rencontre* o joc de les coincidències és el següent. Hi ha dos jugadors $A$ i $B$, cadascun amb una baralla de cartes. Tots dos van girant les seves cartes a la vegada una a una. En el moment en què les dues cartes girades coincideixen, guanya el jugador $A$. Si s'acaben les cartes sense que hi hagi hagut cap coincidència, guanya el jugador $B$. El problema és trobar la probabilitat que guanyi $A$ o que guanyi $B$.

Euler no va ser el primer a interessar-se pel tema. Pierre de Montfort el va tractar al seu *Essai d'analyse sur les jeux de hazard* del 1713 pel cas de 13 cartes, i Abraham de Moivre a la seva *The doctrine of chances* de 1718. Però un problema en mans d'Euler sempre té un valor afegit.

[1] No he pogut esbrinar el nom de Fleury. La referència apareix sovint com a cita d'una cita.

Numereu les cartes del primer jugador de 1 a $n$. Aleshores la segona baralla s'identifica amb una permutació $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ de $\{1, \dots, n\}$. Cada girament de cartes és una parella $(i, \sigma(i))$. Guanya el jugador $A$ si, per a algun $i$, es compleix $\sigma(i) = i$, i guanya el jugador $B$ si $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

Un *desarranjament* de $n$ és una permutació $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Per exemple, per a $n = 3$, de les sis permutacions les dues marcades en negreta són desarranjaments:

123 132 213 **231** **312** 321

El problema que es planteja Euler és, doncs, calcular la probabilitat que una permutació de $\{1, \dots, n\}$ sigui un desarranjament.

Amb el seu estil que no defuig mai els exemples elementals, Euler comença per fer un estudi detallat dels casos $1 \leq n \leq 5$ abans d'encarar el cas general. Calcula la probabilitat que hi hagi coincidència a la primera girada; després que n'hi hagi a la segona si no n'hi ha hagut a la primera; després que n'hi hagi a la tercera si no n'hi ha hagut a les dues anteriors, etc. L'argument porta a un joc de sumes i restes i acaba trobant la fórmula

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

per a la probabilitat que guanyi $A$ i

$$P(B) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

per a la probabilitat que guanyi $B$. Naturalment, reconeix en aquesta fórmula els primers termes del desenvolupament de $e^{-1}$.

Vint-i-vuit anys més tard, el 1779, Euler retorna al tema. En el treball E738 *Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum* es planteja calcular el nombre de desarranjaments $d_n$ de $n$ (ell utilitza la notació $\Pi : n$ en lloc de $d_n$). Certament, només cal multiplicar la probabilitat d'un desarranjament $P(B)$ per $n!$ per obtenir el nombre de desarranjaments, però Euler no va per aquí. No fa cap referència al treball anterior, sembla haver-lo oblidat completament o potser el seu interès és un altre perquè, finalment, en aquest segon paper no dóna la fórmula explícita del nombre de desarranjaments. En lloc d'això, ho mira des del punt de vista de les recurrències. Com sempre, comença estudiant detalladament els primers casos fins a fer un argument recurrent que resumeixo. Clarament, els primers valors són $d_1 = 0$ (l'única permutació de 1 no és desarranjament) i $d_2 = 1$ (de les dues permutacions 12 i 21 només la segona és desarranjament). Ara considereu un desarranjament de $n$

$$a_1, \dots, a_i, \dots, a_n,$$

i siguin $i$ la posició ocupada per $n$, és a dir, $a_i = n$ $(i \neq n)$ i $a_n = j$. Permuteu les posicions $i$ i $n$ i obteniu

$$a_1, \dots, a_n = j, \dots, a_i = n.$$

Aquestes permutacions es classifiquen en dos tipus. (i) El primer està format per aquelles tals que $j \neq i$. En aquest cas, tots els dígits llevat $n$ són fora de lloc, per tant, en tenim $d_{n-1}$, que cal multiplicar pels possibles $n-1$ valors de $i$. En resulten, doncs, $(n-1)d_{n-1}$. (ii) El segon està format per aquelles tals que $j = i$. En aquest cas, tots els símbols llevat de $i$ i de $n$ són fora de lloc, per tant, en tenim $d_{n-2}$, que cal multiplicar pels possibles $n-1$ valors de $i$. En resulten, doncs, $(n-1)d_{n-2}$. Així, s'obté la recurrència

$$d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1 \tag{1}$$

que li permet calcular els valors de $d_n$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 |

Aparentment d'un cop d'ull, Euler detecta que els nombres anteriors compleixen

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n, \quad d_1 = 0, \tag{2}$$

que és una recurrència d'ordre 1 i no d'ordre 2 com (1). Per garantir que (2) també dóna el nombre de desarranjaments, Euler comprova que els nombres definits per (2) compleixen (1) i recíprocament. I amb això acaba el seu treball. Ha demostrat dues recurrències que generen $d_n$, però no ha donat una fórmula explícita per als seus valors, ni un argument combinatori que justifiqui (2).

La fórmula (2) també permet obtenir fàcilment i explícita el nombre de desarranjaments: dividiu $d_k = kd_{k-1} + (-1)^k$ per $k!$ i obteniu

$$\frac{d_k}{k!} = \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ara, sumant per $k = 2, \ldots, n$

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_1}{1!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Com que $d_1 = 0$, només cal multiplicar per $n!$ per retrobar la fórmula dels desarranjaments. Remarquem que hi ha altres mètodes per obtenir-la: el principi d'inclusió-exclusió, que és essencialment el tipus d'argument que empra Euler en el treball sobre el joc de les coincidències, o mitjançant funcions generadores, o emprant el principi d'inversió de Möebius.

En els llibres de text de combinatòria, quan es tracten els desarranjaments és pràcticament segur que apareix la recurrència (1). No és tan segur, però, que hi aparegui la recurrència (2). Al meu entendre això es deu al fet que, mentre la recurrència de segon ordre té un argument combinatori que la justifica, és a dir, que sabem com generar la recurrència a partir de la naturalesa dels desarranjaments, això no passa amb la recurrència (2), la validesa de la qual s'obté simplement comparant-la amb l'altra. No hi ha un argument combinatori directe que l'avali. Bé, haig de canviar el temps verbal. L'any 1983 J. B. Remmel [29] va obtenir una prova combinatòria d'aquesta recurrència basada en una representació de l'estructura dels cicles dels desarranjaments.

Tot i que els desarranjaments segueixen sent objecte d'estudi, l'impacte d'aquest tema és menor que el dels grafs eulerians i que el dels quadrats llatins ortogonals que comentem tot seguit. Però no hi ha dubte que ha passat al corpus de la combinatòria, té la curiositat històrica que Euler no sembla ser conscient del resultat del primer quan escriu el segon, i és significatiu que hagi costat tant justificar combinatòriament una recurrència plantejada per ell.

## Quadrats llatins ortogonals

Per a aquest apartat he emprat essencialment el treball de D. Klyve i L. Stemkoski [16].

En l'article de 1776 catalogat E795 *De quadratis magicis* Euler va tractar la construcció de quadrats màgics mitjançant quadrats llatins ortogonals.

Un *quadrat llatí* d'ordre $n$ és una matriu quadrada d'ordre $n$ amb entrades $n$ símbols i tal que a cada fila i a cada columna apareix cada símbol exactament una vegada. Per exemple, aquí hi ha dos quadrats llatins d'ordre 5, un amb els símbols $\{a,b,c,d,e\}$ i l'altre amb els símbols $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\}$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \alpha & \epsilon & \delta & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \epsilon & \delta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \epsilon & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{array} \tag{3}$$

Dos quadrats llatins del mateix ordre són *ortogonals* si en sobreposar-los obtenim totes les possibles parelles dels $n$ símbols del primer amb els $n$ símbols del segon. Per exemple, els dos quadrats llatins de (3) són ortogonals perquè en sobreposar-los s'obté

$$\begin{array}{ccccc} a\alpha & b\epsilon & c\delta & d\gamma & e\beta \\ b\beta & c\alpha & d\epsilon & e\delta & a\gamma \\ c\gamma & d\beta & e\alpha & a\epsilon & b\delta \\ d\delta & e\gamma & a\beta & b\alpha & c\epsilon \\ e\epsilon & a\delta & b\gamma & c\beta & d\alpha \end{array} \tag{4}$$

Les primeres coordenades donen el primer quadrat llatí, les segones el segon i les entrades són tots els elements del producte cartesià de $\{a,b,c,d,e\}$ per $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\}$. De (4) se'n diu un *biquadrat llatí* o un *quadrat grecollatí.*

Els quadrats llatins ortogonals eren una tècnica que Euler utilitzava com a mitjà per fabricar quadrats màgics. Per exemple, si en el cas anterior feu les substitucions

$$\begin{aligned} (a,b,c,d,e) &= \ (0,5,10,15,20), \\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon) &= \ (1,2,3,4,5), \end{aligned}$$

i interpreteu la juxtaposició com a suma, per exemple $c\epsilon = 10+5 = 15$, s'obté el quadrat màgic de suma 65

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 10 & 14 & 18 & 22 \\ 7 & 11 & 20 & 24 & 3 \\ 13 & 17 & 21 & 5 & 9 \\ 19 & 23 & 2 & 6 & 15 \\ 25 & 4 & 8 & 12 & 16 \end{array}$$

En el treball que estem comentant, Euler construeix famílies de quadrats màgics d'ordres $n \in \{3, 4, 5\}$ amb tècniques de quadrats llatins ortogonals. Al cas $n = 6$ hi dedica menys espai i la tècnica és diferent. Potser això li va donar motius per a continuar estudiant el tema en un segon treball pocs anys després, que exposà a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 1779 i fou publicat tres anys després: E530 *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques.*

En aquestes extenses *Recherches* (101 pàgines a l'*Opera Omnia*) comença enunciant el *problema dels 36 oficials*: donats 36 oficials, sis de cada graduació i sis de cada regiment, esbrinar si és possible posar-los en formació $6 \times 6$ de tal manera que en cada fila i en cada columna n'hi hagi un de cada graduació i un de cada regiment. Interpretant les 6 graduacions com a símbols d'un quadrat llatí i els regiments com a símbols d'un altre quadrat llatí, el problema és esbrinar si existeix un biquadrat llatí d'ordre 6, és a dir, si existeixen dos quadrats llatins d'ordre 6 ortogonals.

L'estil d'Euler és transparent. No amaga mai les seves motivacions ni reflexions. Això porta que, de vegades, a mig treball canviï la notació explicant, això sí, per què la nova és més convenient. Aquí canvia la notació greco llatina per la consistent a prendre com a símbols els $n$ primers naturals i expressar els biquadrats en forma base-exponent. Per exemple, en el biquadrat

$$\begin{matrix} 1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 \\ 2^2 & 3^1 & 4^5 & 5^4 & 1^3 \\ 3^3 & 4^2 & 5^1 & 1^5 & 2^4 \\ 4^4 & 5^5 & 1^2 & 2^1 & 3^5 \\ 5^5 & 1^4 & 2^3 & 3^2 & 4^1 \end{matrix}$$

les bases formen el primer quadrat llatí, els exponents el segon i les entrades són les 25 parelles base-exponent diferents que hi ha.

El plantejament d'Euler és el de, donat un quadrat llatí, trobar-ne un altre que li sigui ortogonal. D'aquest procés en diu *completar* el quadrat llatí. Es planteja quins quadrats llatins es poden completar. Comença estudiant quadrats llatins que corresponen al que avui anomenem matrius circulants. La primera fila és donada i, a partir de la segona, cadascuna s'obté de l'anterior per una permutació cíclica:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\
2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & \cdots & n & n-1 \\
3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \\
4 & 3 & 6 & 5 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-3 & n-2 \\
n & n-1 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & n-2 & n-3
\end{array}$$

Euler analitza la possibilitat de completar aquests quadrats llatins i arriba a la conclusió que si $n$ és parell, un quadrat llatí d'ordre $n$ circulant no es pot completar (no té ortogonal). Recordem que el cas que inicialment li interessa és $n = 6$, parell.

A la vista d'això, intenta una generalització. Sigui $m$ un divisor de $n$. El quadrat $n \times n$ es divideix en blocs de quadrats llatins d'ordre $m$. El primer bloc és un quadrat llatí amb els nombres de 1 a $m$, el segon amb els nombres de $m+1$ a $2m$, etc. Aquests formen la primera fila de blocs. La segona fila de blocs s'obté permutant cíclicament una posició cap a l'esquerra la primera fila de blocs, etc. Un exemple amb $m = 2$ és el següent:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\
2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & \cdots & n & n-1 \\
3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \\
4 & 3 & 6 & 5 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-3 & n-2 \\
n & n-1 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & n-2 & n-3
\end{array}$$

El cas $m = 1$ és el cas dels quadrats circulants comentat abans. Les conclusions de la seva anàlisi són les següents:

- Si $m = 2$, el quadrat llatí es pot completar només si $n$ és múltiple de 4 (per tant, per a $n = 6$, no es pot).
- Si $m = 3$ i $n = 6$ no es pot completar.

Al paràgraf 140 del seu treball explicita el poc èxit i assumeix que la feina serà llarga.

> Havent vist que tots els mètodes que hem mostrat fins ara no donen quadrats màgics per al cas $n = 6$ i que la mateixa conclusió sembla que s'aplica a qualsevol nombre de la forma $4k + 2$, es podria creure que si tals quadrats són possibles, els quadrats llatins que li serveixen de base, no seguint cap dels ordres que hem anat considerant, serien completament irregulars. Així, caldria doncs examinar tots els casos possibles de tals quadrats llatins per al cas $n = 6$, el nombre dels quals és, sens dubte, extremadament gran.

Aquí trobem el primer indici del que s'anomenarà la

**Conjectura d'Euler**: Si $n = 4k+2$ per a algun enter $k \geq 0$, aleshores no hi ha dos quadrats llatins ortogonals d'ordre $n$.

Notem que, en el cas $n = 2$ és fàcil veure que els dos quadrats llatins d'ordre 2 que existeixen

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

no són ortogonals. Centrant-se en $n = 6$, Euler es fixa en algunes transformacions $t$ de quadrats llatins que mantenen l'existència d'ortogonals, és a dir que si $Q_1$ és un quadrat llatí, i un dels dos quadrats $Q_1$ i $t(Q_1)$ té un ortogonal, aleshores també el té l'altre. Euler és capaç de produir un nombre elevat de transformacions $t$, però no de trobar ortogonals. Al paràgraf 148 reconeix el fracàs i explicita la conjectura:

> ... és clar que si existís un sol quadrat màgic complet de 36 entrades se'n podrien deduir molts d'altres mitjançant aquestes transformacions, que satisfarien igualment les condicions del problema. Però, havent examinat un gran nombre de tals quadrats sense haver-ne trobat un de sol, és més que probable que no n'hi hagi cap...

Euler va parlant de quadrats màgics perquè aquesta era la motivació original, però realment està interessat en quadrats llatins ortogonals. De fet, Euler coneixia perfectament quadrats màgics d'ordre 6, per exemple el de suma 111 següent:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 36 | 30 | 4 | 11 | 27 |
| 22 | 13 | 35 | 12 | 14 | 15 |
| 16 | 18 | 8 | 31 | 17 | 21 |
| 28 | 20 | 6 | 29 | 19 | 9 |
| 32 | 23 | 25 | 2 | 24 | 5 |
| 10 | 1 | 7 | 33 | 26 | 34 |

La primera prova que el problema dels 36 oficials no té solució la va trobar molt probablement Thomas Clausen. El testimoni és d'Heinrich Schumacher, el qual tenia Clausen com a ajudant a l'observatori astronòmic d'Altona. En una carta de Schumacher a Gauss del 10 d'agost de 1842, s'esmenta que Clausen va aconseguir una classificació de tots els quadrats llatins d'ordre 6 en 17 famílies i, per a cada una d'elles, va provar que no es pot completar. Que Clausen se'n sortís és versemblant per diverses raons. Primer, perquè qui li ho atribueix no és ell mateix, sinó el seu superior; segon, perquè era un home científicament molt brillant, elogiat per Gauss i que va publicar més de 150 treballs; i tercer, perquè la primera prova de què ha quedat constància es basa en una classificació dels casos en 17 famílies. En efecte, el 1900, G. Tarry publica *Le problème des 36 officiers* [38] on, després d'una classificació de 9408 casos en 17 famílies i d'un estudi exhaustiu, conclou la impossibilitat.

Com és natural, hi va haver intents de trobar demostracions més simples. N'esmentem dues. La primera és la de J. Petersen *Les 36 officiers* [26] el 1902. La línia directriu és associar complexos simplicials als quadrats llatins, generalitzar la fórmula que relaciona vèrtexs, arestes i cares d'un poliedre, i trobar una relació impossible que garanteixi la no existència de quadrats llatins ortogonals d'ordre 6. La segona, és de P. Wernicke el 1910, *Das Problem der 36 officiers* [42]. Wernicke mostra que la prova de Petersen és incompleta i intenta trobar límits al nombre màxim de quadrats llatins mútuament ortogonals. Aquesta és una qüestió que encara dóna joc.

Si $n$ és un natural, $N(n)$ denota el nombre màxim de quadrats llatins d'ordre $n$ (en el mateix conjunt de símbols) dos a dos ortogonals. En l'argot s'anomenen MOLS, per *Mutually Orthogonal Latin Squares.*

És fàcil veure que si tenim un conjunt de $k$ quadrats llatins dos a dos ortogonals, aplicant permutacions adequades als símbols podem aconseguir que les primeres files de tots es transformin en $1, 2, \ldots, n$ i que encara conservin l'ortogonalitat. L'argument següent prova que $N(n) \leq n - 1$. Suposem que tenim $k$ MOLS normalitzats, és a dir, amb la primera fila $1, 2, \ldots, n$. Mirem els primers termes de la segona fila. Si n'hi ha dos d'iguals als quadrats $r$ i $s$, diguem que amb el valor $i$, aleshores en sobreposar els quadrats $r$ i $s$ la parella $(i, i)$ apareixerà a la posició $i$ de la primera fila i a la primera posició de la segona, per la qual cosa els quadrats $r$ i $s$ no són ortogonals. Així, totes les primeres posicions de les segones files són diferents. Com que hi ha $n$ símbols, no n'hi ha més de $n$; com que tampoc no poden ser 1 perquè ja apareix a la primera posició de la primera columna, no n'hi ha més de $n - 1$. Així que, necessàriament, $k \leq n - 1$ com volíem provar. Esbrinar per a quins $n$ s'assoleix aquesta fita superior $N(n) = n - 1$, o més generalment, determinar $N(n)$ és un problema rellevant en el món dels quadrats llatins.

Els resultats de H. F. MacNeish [18] del 1922 van representar una altra manera d'atacar la conjectura d'Euler. MacNeish introdueix un producte de quadrats llatins del qual preferixo posar un exemple que donar una definició formal: Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aleshores el seu producte $A \times B$ és

$$A \times B = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & \cdots & \cdots & d1 & d2 & d3 \\ a2 & a3 & a1 & \cdots & \cdots & d2 & d3 & d1 \\ a3 & a1 & a2 & \cdots & \cdots & d3 & d1 & d2 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ d1 & d2 & d3 & \cdots & \cdots & c1 & c2 & c3 \\ d2 & d3 & d1 & \cdots & \cdots & c2 & c3 & c1 \\ d3 & d1 & d2 & \cdots & \cdots & c3 & c1 & c2 \end{pmatrix}.$$

MacNeish estableix que si $A$ i $C$ són ortogonals i $B$ i $D$ són ortogonals, aleshores $A \times B$ i $C \times D$ són ortogonals. Això permet construir biquadrats grans a partir de més petits, però desgraciadament, el mètode no serveix per a l'ordre 6 ni el 10 perquè no hi ha quadrats llatins ortogonals d'ordre 2. MacNeish també prova

- $N(mn) \geq \min\{N(m), N(n)\}$;
- si $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, aleshores $N(n) \geq \min\{p_i^{e_i} - 1 \ : \ i = 1, \ldots, k\}$.

A més a més, formula la conjectura que la desigualtat anterior és una igualtat:

**Conjectura de MacNeish** Si $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, aleshores

$$N(n) = \min\{p_i^{e_i} - 1 \ : \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Noteu que la conjectura de MacNeish implica la d'Euler perquè $2^1$ és el menor factor de $4k + 2 = 2(2k + 1)$.

L'interès pels quadrats llatins es renova a finals dels anys 30 quan Ronald A. Fisher, Frank Yates i altres els utilitzen en el disseny d'experiments. Per posar un exemple, suposem que volem testar cinc fertilitzants en un tros rectangular. Naturalment, podem utilitzar un fertilitzant cada any, però això és lent, a part que les condicions climatològiques poden canviar d'un any per l'altre i els efectes del fertilitzant d'un any es poden notar en el següent. També es pot dividir el tros en cinc parts i provar en cadascuna un fertilitzant. Ara, si el tros té condicions d'humitat i composició del terra poc uniformes, es pot prendre un quadrat llatí d'ordre 5 amb els 5 símbols representant els fertilitzants, dividir el tros en 25 parts matricialment i distribuir els fertilitzants d'acord amb el patró del quadrat llatí. Això permet disminuir els efectes de les condicions no uniformes per avaluar millor els fertilitzants. Altres dissenys d'experiments que involucren dues variables menen directament als quadrats llatins ortogonals com a model.

Yates va construir conjunts de quadrats llatins mútuament ortogonals d'ordres 4, 8 i 9, la qual cosa va fer conjecturar Fisher (en un seminari de l'Indian Statistical Institute) que existia un conjunt maximal de quadrats llatins mútuament ortogonals per a cada $n$ potència de primer. Altrament dit, que si $n$ és potència de primer, aleshores $N(n) = n - 1$. Poc després, el 1938 R. C. Bose [3] demostrà que, efectivament, això és així. El seu mètode és simple: Per a cada potència d'un primer $n = p^r$ hi ha, llevat d'isomorfismes, exactament un cos finit $\mathbb{F}_n$ de $n$ elements.

Doncs bé, si $n = p^r$ és potència de primer, considerem els elements de $\mathbb{F}_n$ diferents de zero $\mathbb{F}_n^* = \{g_1, \ldots, g_{n-1}\}$. Per a cada $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, sigui $Q_k$ la matriu quadrada d'ordre $n$ que té l'entrada $(i, j)$ igual a $g_k g_i + g_j$. Resulta que $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ són $n-1$ MOLS.

El mateix Bose introdueix una versió geomètrica de l'existència de conjunts maximals de MOLS. Un *pla projectiu d'ordre* $n$ consta d'un conjunt de $n^2 + n + 1$ elements, anomenats *punts* i d'un altre conjunt de $n^2 + n + 1$ elements anomenats *línies* tals que

- cada línia conté exactament $n + 1$ punts;
- cada punt pertany a $n + 1$ línies;
- cada dues línies diferents intersequen en exactament un punt;
- cada dos punts diferents pertanyen exactament a una línia.

La sorprenent equivalència que trobà Bose és:

**Teorema** Existeix un pla projectiu d'ordre $n$ si, i només si, $N(n) = n - 1$.

Atès que només es coneix l'existència de plans projectius d'ordre potència de primer, el resultat de Bose, tot i el seu interès, no permet construir biquadrats d'ordres diferents dels que es poden construir per altres mètodes, per exemple pel mètode del cos finit.

La següent etapa en la solució de la conjectura d'Euler va ser iniciada per H. B. Mann el 1942 [19, 20], el qual es mirà les construccions fetes fins al moment dins d'un esquema general en què els grups tenen un paper crucial. Considerem un quadrat llatí d'ordre $n$ normalitzat (és a dir, la primera fila és $1, \ldots, n$) i interpretem les files com a $n$ permutacions dels símbols. Si aquestes $n$ permutacions formen un grup, el quadrat llatí es diu que està *basat en un grup*. Per exemple, el quadrat llatí següent està basat en un grup perquè les files formen un grup cíclic d'ordre 5:

$$\begin{array}{ccccccl}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \rightarrow & (1)(2)(3)(4)(5) = id \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \rightarrow & (12345) = \sigma \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \rightarrow & (13524) = \sigma^2 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \rightarrow & (14253) = \sigma^3 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \rightarrow & (15432) = \sigma^4
\end{array}$$

Mann mostra que totes les construccions fetes fins al moment són de quadrats llatins basats en grups, i demostra que la conjectura de MacNeish ( $N(p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}) = \min\{p_i^{e_i}-1 \ : \ i=1\ldots k\}$ ) es compleix per a quadrats llatins basats en grups, la qual cosa implica que la conjectura d'Euler és certa per a aquesta mena de quadrats llatins. Però ell mateix dóna un exemple de dos quadrats llatins d'ordre 12 ortogonals no basats en grups. La conclusió és que els contraexemples de la conjectura, si n'hi ha, han de ser d'una classe ben diferent de les considerades fins al moment.

L'any 1959 E. T. Parker [23] comença a utilitzar *orthogonal arrays* per representar quadrats llatins ortogonals. Un *ortogonal array* (que aquí traduirem per *arranjament ortogonal*) $\mathrm{OA}(k,n)$ és una matriu $k\times n^2$ amb entrades els enters $1,\ldots,n$ tal que cada submatriu $2\times n^2$ conté totes les parelles del producte cartesià $\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$. Per exemple, la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és un $\mathrm{OA}(4,3)$ que representa el biquadrat llatí

$$B = \begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{pmatrix}$$

Les 9 columnes de $A$ representen les 9 entrades de $B$; les dues primeres entrades de cada columna són les coordenades a $B$ i les altres dues les dades. Per exemple, $(2,3)$ és la quarta entrada de $B$, situada a la fila 2, columna 1. Això s'indica posant a la quarta columna de $A$ els valors $(2,1,2,3)$.

Per decidir quins arranjaments ortogonals provenen de quadrats llatins ortogonals, Parker empra els dissenys de blocs, que generalitzen els plans projectius. Els dissenys de blocs depenen de més paràmetres (no només de l'ordre, com els plans projectius) i permeten més flexibilitat. Amb aquesta eina, és capaç de construir quatre quadrats llatins mútuament ortogonals no basats en grups, la qual cosa refuta la conjectura de MacNeish. En efecte, queda demostrat que $N(21) \geq 4$, mentre que la conjectura donava $N(n) = \min\{3-1, 7-1\} = 2$.

En 180 anys ningú no havia trobat dos quadrats llatins ortogonals d'ordre $4k+2$, però el resultat anterior va fer créixer les espectatives de desmentir la conjectura. I, en efecte, els anys 1959 i 1960 van ser decisius. Primer, R. C. Bose, S. S. Shrikhande [4, 5] construeixen dos quadrats ortogonals d'ordre 22, el primer contraexemple de la conjectura d'Euler. Després, E. T. Parker [24] construeix dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 10, un altre contraexemple, aquest el menor possible. Finalment, en un article conjunt de tots tres [6] es sistematitzen els resultats i es construeixen contraexemples per a tots els valors $n = 4k+2$ amb $k \geq 2$. Va resultar, doncs, que Euler tenia raó en el cas trivial $k = 0$ $(n = 2)$ i en el cas $k = 1$ $(n = 6)$ que inicialment es va plantejar, però no en tenia en cap dels altres.

Una vegada resolta la conjectura, però, el procés de revisió i refinament de les proves continua. En aquesta línia esmentarem quatre contribucions. La primera, de A. Sade [31] el 1960, que obtingué contraexemples a base d'un producte de (tres) matrius que anomenà *producte directe singular* i de quasigrups. La segona de D. J. Crampin i A.J. Hilton [9] el 1975 els qui, començant per quadrats llatins d'ordre 10, 14, 18 i 62 i emprant el mètode del producte directe singular, donen un conjunt complet de contraexemples. La tercera és el *tour de force* de D. R. Stinson [36] que, el 1984, resol el problema dels 36 oficials en només tres pàgines però, això sí, utilitzant dissenys, espais vectorials finits i teoria de grafs. Finalment, la de 1982 de Z. Lie [43] que utilitza una construcció pròpia i el producte de Sade.

Com és usual amb els grans problemes aquest també té derivacions, per les quals hem passat de puntetes. Per exemple, l'existència o no d'un pla projectiu d'ordre 10 o, equivalentment, l'existència o no de 9 quadrats llatins mútuament ortogonals, és un problema que ha estat resistent i que ha requerit molts esforços que podeu trobar resumits a [17]. Però nosaltres ho deixarem aquí...

O potser no. Millor acabem amb una digressió literària. L'ombra d'Euler és allargada i arriba fins a la literatura. Resulta que la novel·la de George Perec *La Vie Mode d'Emploi* [25] té relació directa amb un biquadrat llatí d'ordre 10. Tal com ho explica Màrius Serra [32]

> El biquadrat llatí ortogonal d'ordre 10 ... va seduir el jove Perec fins al punt que, quan anys després es trobava immers en la planificació de la seva obra mestra, decidí fer-ne un ús literari.
> ...
> Durant el llarg procés d'elaboració de *La Vie Mode d'Emploi*, Perec va anar definint l'edifici del número 11 de Simon Crubellier com un edifici amb 10 plantes –comptant la subterrània, el baixos i els dos àtics. Cada planta hauria d'estar dividida en 10 peces. Aleshores, a cadascun dels habitatges, hi podria viure un personatge d'una determinada categoria (corresponent per exemple a les 10 primeres lletres) que desenvoluparia un tipus determinat d'activitat (corresponent a les 10 primeres xifres).

## Referències

[1] W. W. R. Ball and H. S. M. Coxeter. *Mathematical Recreations and Essays.* Dover Publications Inc., New York, 13th edition, 1987.

[2] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936.* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[3] R. C. Bose. On the application of the properties of Galois fields to the problem of constructions of hyper-graeco-latin squares. *The Indian Journal of Statistics*, 3:323–338, 1938.

[4] R. C. Bose and S. S. Shrikhande. On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal latin squares of order $4t + 2$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 45:734–737, 1959.

[5] R. C. Bose and S. S. Shrikhande. On the construction of sets of mutually orthogonal latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. *Trans. Am. Math. Soc.*, 95:191–209, 1960.

[6] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, and E. T. Parker. Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Can. J. Math.*, 12:189–203, 1960.

[7] G. Brightwell and P. Winkler. Note on counting eulerian circuits. `arXiv:csCC/0405067 v1`, 2004.

[8] F. Cajori. *A History of Mathematical Notations* 2 vols Open Court Pub. Co. La Salle, Illionois, 1928–1929. Reeditat en un únic volum per Dover Publications Inc., New York, 1993.

[9] D. J. Crampin and A. J. W. Hilton. Remarks on Sade's disproof of the Euler conjecture with an application to Latin squares orthogonal to their transpose. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 18:47–59, 1975.

[10] Marquis de Condorcet. Eulogy to Mr. Euler, 1783. Accessible a `http://math.dorthmouth.edu/~euler`

[11] A. de Morgan. *A Budget of Paradoxes (Reprinted with the author's additions from the Athenacum).* Dover Publications Inc., New York, 2nd edition, 1954.

[12] L. Euler. Los puentes de Königsberg. In J. R. Newman, editor, *Sigma, el mundo de las matemáticas*, volumen 4. Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1969.

[13] N. Fuss. Eulogy of Leonhard Euler, 1783. Accessible a `htt://math.darthmouth.edu/~euler`

[14] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

[15] C. Hierholzer. Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu Umfaren. *Math. Ann.*, 6:30–32, 1873.

[16] D. Klyve and L. Stemkoski. Graeco-latin squares and a mistaken conjecture of Euler. *The College Mathematics Journal*, 37(1):2–15, January 2006.

[17] C. W. H. Lam. The search for a finite projective plane of order 10. *Amer. Math. Monthly*, 98(4):305–318, April 1991.

[18] H. F. MacNeish. Euler squares. *Ann. Math. (2)*, 23(3):221–227, 1922.

[19] H. B. Mann. The construction of orthogonal Latin squares. *Ann. Math. Stat.*, 13:418–423, 1942.

[20] H. B. Mann. On the construction of sets of orthogonal Latin squares. *Ann. Math. Stat.*, 14:401–414, 1943.

[21] B. D. McKay and R. Robinson. Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph. *Combin. Probab. Comput.*, 7(4):437–449, 1998.

[22] R. E. Moritz. *On Mathematics.* Dover Publications, Inc., New York, 1942.

[23] E. T. Parker. Construction of some sets of mutually orthogonal latin squares. *Proc. Am. Math. Soc.*, 10:946–949, 1959.

[24] E. T. Parker. Orthogonal latin squares. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 45:859–862, 1959.

[25] G. Perec *La Vie Mode d'Emploi.* Hachete, Paris, 1978. Versió catalana: Edicions Proa, 1998.

[26] J. Petersen. Les 36 officiers. *Annuaire des mathematicians*, 413–426, 1902.

[27] L. Poinsot. Sur les polygones et les polyèdres. *J. École Polytech.*, 4(Cah. 10):16–48, 1810.

[28] M. Reiss. Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu. *Ann. Mat. Pura Appl. (2)*, 5:63–120, 1871–3.

[29] J. B. Remmel. A note on a recursion for the number of derangements. *European J. Combin.*, 4:371–374, 1983.

[30] F. S. Roberts. *Applied Combinatorics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.

[31] A. Sade. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sé. I*, 74:91–99, 1960.

[32] M. Serra. Instruccions de l'arquitecte Perec. Diari *Avui*, 31 d'agost de 1991.

[33] V. S. Shishov and H. B. Thuan. Remarks on Tarry's method's of calculating eulerian cycles. *Kibernetica*, 4:76–80, 1968.

[34] C. A. B. Smith and W. T. Tutte. On unicursal paths in a network of degree 4. *Amer. Math. Monthly*, 48(4), April 1941.

[35] V. A. Sorokin. A formula for the number of Euler cycles of a complete graph $U_n$. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 24:191–192, 1969.

[36] D. R. Stinson. A short proof of the nonexistence of a pair of orthogonal latin squares of order six. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 36:373–376, 1984.

[37] G. Tarry. Nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées. *Compt. Rend. Ass. Franç. Avance. Sci.*, 15(2):49–53, 1886.

[38] G. Tarry. Le problème des 36 officiers. *Compt. Rend. Ass. Franç Avance. Sci.*, 29(2):170–203, 1900.

[39] O. Terquem. Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires. *Nouv. Ann. Math.*, 8:68–74, 1849.

[40] A. Tucker. A new applicable proof of the Euler circuit theorem. *Amer. Math. Monthly*, 83(8):638–641, 1976.

[41] T. van Aardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn. Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin*, 28:203–217, 1951.

[42] P. Wernicke. Das Problem der 36 Offiziere. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 19:264–267, 1910.

[43] L. Zhu. A short disproof of Euler's conjecture concerning orthogonal latin squares. *Ars Combinatoria.*, 14:47–55, 1982.