

# ¿SE PUEDE OÍR LA FORMA DE UNA RED?

JOACHIM VON BELOW

RESUMEN. El espectro del laplaciano sobre un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  bajo condiciones de tipo Dirichlet o Neumann ¿determina la forma del dominio? La solución completa de este problema espectral inverso clásico se hizo esperar. En particular, el caso  $m = 2$  fue el más resistente y fue resuelto finalmente en 1992 por C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert y P. Bérard mediante contraejemplos. Para una red, es decir la traza de un grafo topológico, se plantea el mismo problema para el laplaciano bajo condiciones de transición de continuidad en los nudos de ramificación y de la ley de Kirchhoff en todos los nudos. La resolución se obtiene con ayuda de una reducción a un problema de valor propio para la matriz de adyacencia combinatoria del grafo. Las mismas técnicas espectrales se aplican para determinar los valores propios debidos a la estructura de la red y el comportamiento asintótico de los valores propios.

Esta disertación aborda el problema siguiente: ¿podemos reconstruir la forma de una red compuesta de nudos y aristas, en particular la estructura combinatoria del grafo abstracto de la red, con ayuda de los valores propios y sus multiplicidades del Laplaciano definido sobre la red? Previamente, recordemos cómo se resolvió el problema análogo en dominios o sobre variedades.

## 1. EL CASO DE UN DOMINIO O DE UNA VARIEDAD

Uno de los problemas espectrales inversos más famosos es el siguiente. Consideramos la ecuación de ondas  $u_{tt} = \Delta^{D/N} u$  en un dominio

---

Conferencia impartida el 24 de mayo de 2007 en el Seminari de Teoria de Grafs, Combinatòria i Aplicacions, FME, UPC Barcelona. El autor está muy agradecido a sus colegas de la FME por la invitación, en particular a José Antonio Lubary por la corrección de la versión en castellano.

acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  bajo condiciones de frontera de tipo Dirichlet o Neumann, es decir las soluciones se anulan sobre la frontera o sus derivadas normalizadas exteriores. La separación de variables nos lleva a la determinación de los valores propios del Laplaciano

$$\Delta v = -\lambda v$$

bajo dichas condiciones de frontera. Entonces se plantea la pregunta siguiente: ¿podemos reconstruir la forma de  $\Omega$ , es decir su frontera, a partir de los valores propios o de los valores propios y sus multiplicidades? De hecho, ya en 1892, A. SHUSTER escribió en un libro sobre la espectroscopía *that it might be interesting to find a shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out*. [que puede ser interesante encontrar la forma de una campana mediante los sonidos que es capaz de emitir.] En matemáticas, el mismo problema fue planteado por H. WEYL (1911), S. BOCHNER (1950) y otros, pero sin resolverlo, véase [18]. Finalmente M. KAC popularizó el problema de nuevo en un artículo de 1966 [19] mediante la famosa pregunta "Can one hear the shape of a drum?" [¿ Se puede oír la forma de un tambor?], pero igualmente sin resolverlo.

Con más detalle, supongamos que dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tienen los mismos valores propios y también las mismas multiplicidades correspondientes. ¿ Podemos concluir que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son congruentes, es decir isométricos?

$$\sigma\left(\Delta_{\Omega_1}^{D/N}\right) \stackrel{m}{=} \sigma\left(\Delta_{\Omega_2}^{D/N}\right) \stackrel{?}{\implies} \Omega_1 \cong \Omega_2$$

Naturalmente, la implicación inversa es verdadera, y en dimensión  $m = 1$  podemos calcular inmediatamente la longitud  $\ell$  del intervalo con la fórmula  $\lambda_k(\Omega) = \ell^{-2}\pi^2 k^2$ . Pero en dimensión superior, la solución completa del problema se hizo esperar; en particular, el caso  $m = 2$  fue el más resistente.

De hecho, para el operador de Laplace - Beltrami sobre variedades, J. MILNOR [20] encontró toros isoespectrales no isométricos de dimensión 16 en 1964, y M. KNESER construyó el mismo fenómeno para dimensión 12 en 1966. En 1971 M. BERGER, P. GAUDUCHON y E. MAZET [11] demostraron que todos los toros isoespectrales de dimensión 2 son

isométricos. Por el contrario, M.-F. VIGNÉRAS [25] construyó en 1980 variedades compactas isoespectrales de dimensión  $m$  y no isométricas para todo  $m \geq 2$ . En 1982 para el caso euclídeo, H. URAKAWA [24] dio un contraejemplo en  $\mathbb{R}^4$ , mientras que el caso  $m = 2$  se hizo esperar todavía durante diez años. En 1992, este caso fue resuelto finalmente por C. GORDON, D. WEBB y S. WOLPERT [15, 16] y P. BÉRARD [10] mediante contraejemplos, es decir, no podemos oír la forma de un tambor. Investiguemos el bello contraejemplo siguiente de S. J. CHAPMAN [13]. Los dos dominios en la figura 1, evidentemente no congruentes,

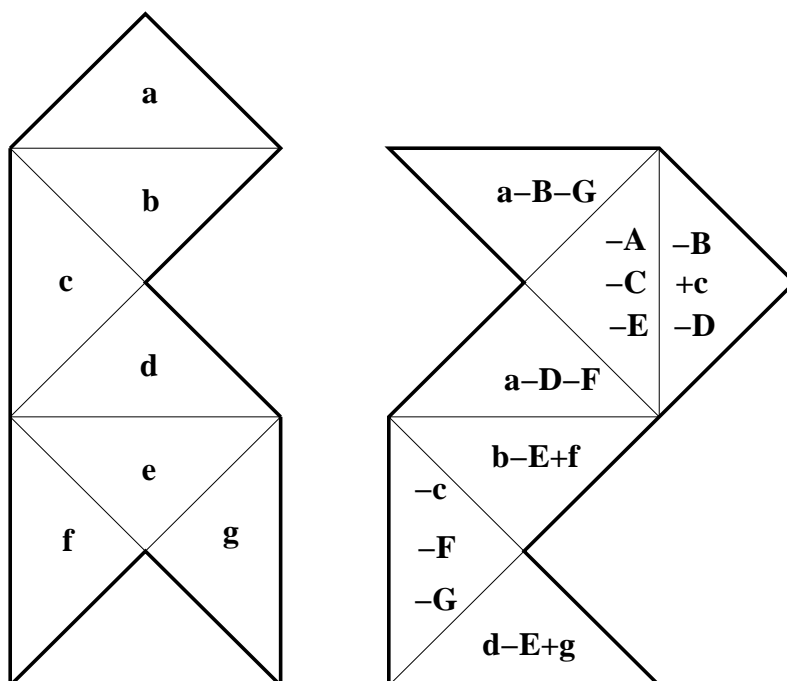


FIGURA 1. Dos dominios isoespectrales y no congruentes

se componen de triángulos isósceles congruentes. Si llamamos  $a, b, c \dots$  etc. a las restricciones de una función propia del dominio a la izquierda, entonces obtenemos otra para el dominio a la derecha mediante las restricciones definidas por las fórmulas indicadas, donde la mayúscula designa la reflexión respecto del eje de simetría del triángulo. En cierto sentido, el carácter poligonal de la frontera en este contraejemplo es

típico: hasta hoy, no conocemos la respuesta para dominios con frontera suave. Un resultado nuevo en el caso de dominios fue establecido por W. ARENDT [2] resolviendo el problema "Does diffusion determine the body?" [¿ La difusión determina el sólido?] Dicho de otra manera, supongamos que los dos semigrupos de evolución generados por los Laplacianos en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son conjugados para todo  $t \geq 0$ :

$$e^{-t\Delta_{\Omega_1}} = U^{-1}e^{-t\Delta_{\Omega_2}}U \stackrel{?}{\implies} \Omega_1 \cong \Omega_2$$

por un isomorfismo  $U : L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2)$  respetando el orden de  $L^2$ . ¿Podemos concluir que los dominios son congruentes? La respuesta es afirmativa bajo condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann, pero negativa para condiciones de frontera que incluyan identificaciones entre partes de la misma.

## 2. GRAFOS Y EL LAPLACIANO SOBRE REDES

Para investigar el problema inverso de valores propios para el Laplaciano sobre redes, recordemos y precisemos algunos términos de la teoría de grafos. Un *grafo finito*  $\Gamma$  es una tripleta  $(V, K, \in)$  que consiste en el conjunto de los *vértices* o de los *nudos*  $V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ , en el conjunto de las *aristas* o de los *brazos*  $K = \{k_j \mid 1 \leq j \leq N\}$  y en la *relación de incidencia*  $\in \subset V \times K$ . Excepto si se dice lo contrario, supondremos que todos los grafos son *simples*, es decir que el conjunto de las aristas  $K(\Gamma)$  es una colección de subconjuntos binarios del conjunto de los vértices, dicho de otra manera, el grafo no contiene ni bucles ni brazos múltiples. Además, supondremos que todos los grafos son *conexos*, es decir que dados dos vértices cualesquiera de  $V(\Gamma)$  existe un camino en  $\Gamma$  que los une. Se llama *grado*  $\gamma(v)$  de un vértice  $v$  al número de aristas incidentes con  $v$ :  $\gamma(v) = \#\{e \in K \mid v \in e\}$ . Distinguimos los *vértices terminales*  $V_b = \{v_i \in V \mid \gamma_i = 1\}$  de los *nudos de ramificación*  $V_r = \{v_i \in V \mid \gamma_i > 1\}$ , en particular los *nudos de ramificación esencial*  $V_{es} = \{v_i \in V \mid \gamma_i > 2\}$ .

Aquí un grafo  $\Gamma$  se dota de una estructura métrica, es decir, sin perder generalidad, es un *grafo topológico*, cuyos vértices son un subconjunto  $V(\Gamma)$  de puntos en  $\mathbb{R}^m$  y cuyas aristas son los soportes  $k_j := \pi_j([0, \ell_j])$  de arcos parametrizados  $\pi_j$  por su parámetro de longitud  $x_j$  de manera

al menos  $C^2$ , y tienen sus extremos sólo en  $V(\Gamma)$ . La derivada  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  se denotará por  $\partial_j$ . La red  $G$  definida por  $\Gamma$  es la traza del grafo topológico  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^m$ , en particular un subconjunto conexo y compacto de  $\mathbb{R}^m$ ,

$$G = \bigcup_{j=1}^N k_j \subset \mathbb{R}^m.$$

Una matriz muy importante para la descripción de  $\Gamma$  es la *matriz de incidencia*  $\mathcal{D}(\Gamma) = (d_{ij})_{n \times N}$  definida por

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_j(\ell_j) = v_i, \\ -1 & \text{si } \pi_j(0) = v_i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Describe la orientación de la red y la derivada normalizada exterior en los nudos. Para una función  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  ponemos  $u_j := u \circ \pi_j : [0, \ell_j] \rightarrow \mathbb{R}$  la restricción sobre la arista  $k_j$  y en un vértice  $v_i$  para los valores y derivadas abreviamos

$$u_j(v_i) := u_j(\pi_j^{-1}(v_i)), \quad \partial_j u_j(v_i) := \left. \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(x_j) \right|_{x_j = \pi_j^{-1}(v_i)} \quad \text{etc.}$$

Precisemos ahora las condiciones de transición en los vértices, siendo la primera la *condición de continuidad* en los nudos de ramificación, que está incluida en la condición  $u$  pertenece a  $\mathcal{C}(G)$ , es decir que si dos aristas  $k_j$  y  $k_s$  confluyen en el vértice  $v_i \in V_r$ , entonces las restricciones  $u_j$  y  $u_s$  coinciden ahí:

$$\forall v_i \in V_r : k_j \cap k_s = \{v_i\} \implies u_j(v_i) = u_s(v_i).$$

La segunda condición de transición en todos los vértices es la *ley de Kirchhoff* clásica:

$$(K) \quad \sum_{j=1}^N d_{ij} \partial_j u_j(v_i) = 0.$$

Es decir, en cada  $v_i \in V$ , la suma de las corrientes incidentes al mismo se anula. Notamos que el término  $d_{ij} \partial_j u_j(v_i)$  es la derivada exterior, pero la ley de Kirchhoff no depende de la orientación definida por la matriz de incidencia. En un nudo terminal, la ley de Kirchhoff es justamente la condición de Neumann. Para  $\mu \in \mathbb{N}$ , los espacios de Banach

$\mathcal{C}^\mu(G)$  sobre la red se definen por

$$\mathcal{C}^\mu(G) = \{u \in \mathcal{C}(G) \mid \forall j \in \{1, \dots, N\} : u_j \in \mathcal{C}^\mu([0, \ell_j])\}$$

y dotados por la norma habitual  $\|u\|_{k,G} = \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{\mathcal{C}^k([0, \ell_j])}$ . El índice  $K$  indicará la validez de la ley de Kirchhoff en todos los nudos.

El *Laplaciano*  $\Delta_G^K$  sobre una red  $G$  se define como el operador que envía una función  $u$  al vector  $(\partial_j^2 u_j)_{N \times 1}$  de las derivadas segundas sobre las aristas, y cuyo dominio de definición es el espacio  $\mathcal{C}_K^2(G)$  ó  $\mathcal{H}_K^2(G)$ .

$$\Delta = \Delta_G^K = \left( u \mapsto (\partial_j^2 u_j)_{N \times 1} \right)$$

Los valores propios  $\mu$  de  $\Delta_G^K$  son reales y no positivos. Integrando por partes y debido a las condiciones en los vértices, calculamos que la suma a la izquierda es no positiva y también el valor propio  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mu \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} u_j^2 dx_j &= \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} u_j \partial_j^2 u_j dx_j \\ &= - \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} (\partial_j u_j)^2 dx_j + \sum_{j=1}^N [u_j \partial_j u_j]_0^{\ell_j} \\ &= - \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} (\partial_j u_j)^2 dx_j + \underbrace{\sum_{i=1}^n u(v_i) \sum_{j=1}^N d_{ij} \partial_j u_j(v_i)}_{=0} \leq 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos plantear el problema espectral inverso para el Laplaciano: si los espectros de éste sobre dos redes  $G_1$  y  $G_2$  coinciden respetando las multiplicidades, es decir las redes son *isoespectrales*, ¿podemos concluir que las dos redes son isométricas, y en particular que los grafos abstractos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son isomorfos?

$$\sigma(\Delta_{G_1}^K) \stackrel{m}{=} \sigma(\Delta_{G_2}^K) \stackrel{?}{\implies} G_1 \cong G_2 \implies \Gamma_1 \simeq \Gamma_2$$

Recordemos que las redes  $G_1$  y  $G_2$  se llaman *isométricas* ( $G_1 \cong G_2$ ) si existe un homeomorfismo  $H : G_1 \rightarrow G_2$  tal que para cada arista  $k \subset G_1$ , la restricción  $H|_k$  sea un difeomorfismo isométrico sobre una arista de  $G_2$ . En particular,  $H$  preserva las longitudes. Además, los grafos abstractos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se llaman *isomorfos* ( $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ ) si existe una

biyección  $\beta$  entre  $V(\Gamma_1)$  y  $V(\Gamma_2)$  tal que dos vértices cualesquiera  $v$  y  $w$  son vecinos en  $\Gamma_1$  sii  $\beta(v)$  y  $\beta(w)$  son vecinos en  $\Gamma_2$ .

De ahora en adelante, excepto si se dice lo contrario, supondremos que todas las longitudes valen 1:

$$\ell_j \equiv 1.$$

Entonces

$$G_1 \cong G_2 \iff \Gamma_1 \simeq \Gamma_2$$

y el problema de valores propios para el Laplaciano se escribe

$$(1) \quad \begin{cases} u \in C^2(G), \\ \partial_j^2 u_j = -\lambda u_j & \text{para todo } 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{j=1}^N d_{ij} \partial_j u_j(v_i) = 0 & \text{para todo } 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (K).$$

### 3. LAPLACIANO Y ADYACENCIA

Para determinar los valores propios y sus multiplicidades, transformamos el problema (1) en otro que respeta la adyacencia del grafo. Se llama *matriz de adyacencia* del grafo  $\Gamma$  a la matriz  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Gamma) = (e_{ih})_{n \times n}$  definida por

$$e_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_h \text{ son vecinos en } \Gamma, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por la simplicidad del grafo el índice del brazo que une dos vértices está definido de manera única:

$$s(i, h) = \begin{cases} s & \text{si } k_s \cap V = \{v_i, v_h\}, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recordemos que el *producto de Hadamard* de dos matrices se define por

$$A \star B = (a_{ik}) \star (b_{ik})_{n \times n} = (a_{ik} b_{ik})_{n \times n}.$$

Además, denotamos el vector con todas sus coordenadas iguales a 1 por  $\mathbf{e} = (1)_{n \times 1}$ . Para una función  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  la distribución de sus valores en los nudos se describe por el operador

$$\mathbf{n} = (u \mapsto (u(v_i))_{n \times 1}) : \mathbb{R}^G \rightarrow \mathbb{R}^{V(\Gamma)}$$

Además,  $u$  determina de manera única la matriz  $\mathbf{U}(x) = (u_{ih}(x))_{n \times n}$  cuyos elementos se definen con la variable real  $x \in [0, 1]$  así:

$$(2) \quad u_{ih}(x) := e_{ih} u_{s(i,h)} \left( \frac{1 + d_{is(i,h)}}{2} - x d_{is(i,h)} \right), \quad x \in [0, 1].$$

La construcción es tal que en  $x = 0$  la matriz resultante se escribe, con  $\varphi = \mathbf{n}(u)$ , en la forma

$$\mathbf{U}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_1 & \varphi_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_i & \varphi_i & \cdots & \varphi_i & \varphi_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_n & \varphi_n & \cdots & \varphi_n & \varphi_n \end{pmatrix}}_{\varphi \mathbf{e}^*} \star \mathcal{A}.$$

Utilizando estas fórmulas el problema (1) se transforma en el problema (3) siguiente, que consiste en determinar matrices  $\mathbf{U}$  no nulas tales que

$$(3) \quad \begin{cases} u_{ih} \in C^2([0, 1]) & \text{para todo } 1 \leq i, h \leq n \\ e_{ih} = 0 \Rightarrow u_{ih} = 0 & \text{para todo } 1 \leq i, h \leq n \\ \mathbf{U}'' = -\lambda \mathbf{U} & \text{en } [0, 1] \\ \mathbf{U}(0) = \varphi \mathbf{e}^* \star \mathcal{A} & \text{(continuidad en } V_r(\Gamma)) \\ \mathbf{U}^*(x) = \mathbf{U}(1-x) & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ \mathbf{U}'(0) \mathbf{e} = 0 & \text{(ley de Kirchhoff)} \end{cases}$$

De ahora en adelante pondremos

$$\Phi := \mathbf{U}(0) = \varphi \mathbf{e}^* \star \mathcal{A}, \quad \Psi := \mathbf{U}'(0),$$

y recordemos las reglas simples

$$(4) \quad (M \star \mathbf{e} \varphi^*) \mathbf{e} = M \varphi \quad \text{y} \quad (M \star \varphi \mathbf{e}^*) \mathbf{e} = \text{Diag}(M \mathbf{e}) \varphi.$$

Introducimos la *matriz de transición* estocástica por filas

$$\mathbf{Z} = \text{Diag}_i(\mathcal{A} \mathbf{e})^{-1} \mathcal{A} = \text{Diag}_i(\gamma_i^{-1}) \mathcal{A}.$$

Para  $\lambda = 0$ , una solución se representa de manera lineal  $\mathbf{U}(x) = \Phi + x(\Phi^* - \Phi)$ , y la ley de Kirchhoff se transforma en la condición  $(\Phi^* - \Phi) \mathbf{e} = 0$ . Entonces concluimos que

$$(\Phi^* - \Phi) \mathbf{e} = 0 \iff \mathcal{A} \varphi = \text{Diag}_i(\mathcal{A} \mathbf{e}) \varphi \iff \mathbf{Z} \varphi = \varphi.$$



Como el grafo es conexo sii la matriz  $\mathcal{A}$  es indescomponible, podemos concluir con ayuda del teorema de Perron - Frobenius que la multiplicidad de 0 vale 1 y  $\mathbf{U}(x) = \text{const. } \mathcal{A}$ .

En el caso  $\lambda > 0$  tenemos la solución fundamental

$$(5) \quad \mathbf{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda})\Phi + \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\Psi.$$

La fórmula  $\mathbf{U}^*(x) = \mathbf{U}(1-x)$  implica que

$$\mathbf{U}(1) = \Phi^* = \Phi \cos \sqrt{\lambda} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\Psi,$$

y la continuidad  $\Phi = \varphi \mathbf{e}^* \star \mathcal{A}$  en el caso  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$  da

$$\mathbf{U}'(0) = \Psi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}} \left( \mathbf{e}\varphi^* - \cos \sqrt{\lambda} \varphi \mathbf{e}^* \right) \star \mathcal{A}.$$

Luego, usando la ley de Kirchhoff  $\Psi \mathbf{e} = 0$ , se verifica

$$(\mathcal{A} \star \mathbf{e}\varphi^*) \mathbf{e} - \cos \sqrt{\lambda} (\mathcal{A} \star \varphi \mathbf{e}^*) \mathbf{e} = 0,$$

es decir, la importante ecuación característica

$$(6) \quad \mathcal{A}(\Gamma)\varphi = \cos \sqrt{\lambda} \text{Diag}_i(\gamma_i) \varphi.$$

Esto es parte del resultado siguiente.

**Teorema 1.** ([3]) *Un número  $\lambda \geq 0$  es un valor propio de  $-\Delta_G^K$  sii o bien*

$$\varphi = (u(v_i))_{n \times 1} = 0 \quad y \quad \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

*o bien  $\varphi$  es un vector propio del valor propio  $\cos \sqrt{\lambda}$  de la matriz estocástica por filas  $\mathbf{Z} = \text{Diag}_i(\gamma_i^{-1}) \mathcal{A}(\Gamma)$ . Las multiplicidades geométricas son*

$$M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ m(\cos \sqrt{\lambda}, \mathbf{Z}) & \text{si } \sin \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ N - n + 2 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 1, \\ N - n + 2 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1, \Gamma \text{ bipartido,} \\ N - n & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1, \Gamma \text{ no bipartido.} \end{cases}$$

Recordemos que se llama *bipartido* a un grafo que admite una coloración de los vértices a dos colores, es decir, el conjunto de vértices puede separarse en dos clases disjuntas tales que todas las adyacencias tengan lugar solamente entre ellas y ninguna entre vértices de la misma clase. Además, en las fórmulas se esconde el corrancho  $\text{corank}(\Gamma)$  del grafo definido por  $N - n + 1$ .

*Demostración:* En primer lugar investigamos el caso de los valores propios debidos a la estructura de la red, es decir, aquellos valores propios que no lo son sobre una arista individual bajo condiciones de Dirichlet o de Neumann. Dicho de otra manera

$$\sin \sqrt{\lambda} \neq 0.$$

Debemos demostrar que el operador lineal  $\mathbf{n} = (u \mapsto (u(v_i))_{n \times 1})$  establece un isomorfismo entre los espacios propios:

$$\ker(-\Delta - \lambda I; \mathcal{C}_K^2(G)) \stackrel{\mathbf{n}}{\cong} \ker(\mathcal{Z} - \cos \sqrt{\lambda} \mathbf{I})$$

Pero bajo la condición  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ , una distribución en los nudos  $\varphi = 0$  implica que  $u = 0$  sobre cada arista, es decir que  $\mathbf{n}$  es una inyección. Para el carácter exhaustivo, sea  $\varphi = (\varphi_i)_{n \times 1} \in \ker(\mathcal{Z} - \cos \sqrt{\lambda} \mathbf{I})$ . Luego, para cada arista  $k_j \in K(\Gamma)$  existe una solución única  $u_j \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  tal que para  $k_j \cap V(\Gamma) = \{v_i, v_k\}$

$$\begin{aligned} \partial_j^2 u_j &= -\lambda u_j \text{ en } [0, 1], \\ u_j(v_i) &= \varphi_i, \quad u_j(v_k) = \varphi_k. \end{aligned}$$

Finalmente, la pertenencia al núcleo corresponde a la validez de la ley de Kirchhoff. Concluimos que existe una solución única  $u \in \mathcal{C}_K^2(G)$  del problema (1) con  $\mathbf{n}(u) = \varphi$ . Esto termina la demostración en el caso  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ .

En segundo lugar, investigamos los valores propios resultantes de un solo brazo, es decir

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0.$$

Aquí debemos distinguir el caso  $\cos \sqrt{\lambda} = 1$  del caso opuesto  $\cos \sqrt{\lambda} = -1$ . En el primero, necesariamente  $\varphi \in \mathbb{R}\mathbf{e}$ , ó sea  $\Phi = \Phi^*$ , y una

solución propia del problema (3) está dada por

$$\mathbf{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}) \mathcal{A}.$$

Todas las soluciones propias que quedan y independientes de ésta se representan en la forma  $\lambda^{-\frac{1}{2}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \Psi$  con una matriz  $\Psi$  perteneciente a  $\mathcal{M}^+(\Gamma)$ :

$$\mathcal{M}^+(\Gamma) := \{ \Psi \prec \mathcal{A} \mid \Psi^* = -\Psi, \Psi \mathbf{e} = 0 \},$$

donde

$$(\psi_{ih})_{n \times n} = \Psi \prec \mathcal{A} : \iff (e_{ih} = 0 \Rightarrow \psi_{ih} = 0).$$

Este espacio es isomorfo a  $\ker \mathcal{D}(\Gamma)$  mediante el isomorfismo

$$h_1 = \left( y \longmapsto (e_{ih} d_{is(i,h)} y_{s(i,h)})_{n \times n} \right).$$

Entonces

$$\dim \ker \mathcal{D}(\Gamma) = \text{corank}(\Gamma) = N - n + 1.$$

Para el caso  $\cos \sqrt{\lambda} = -1$ , notamos que necesariamente  $\mathbf{U}(0) = \Phi = -\Phi^*$ , es decir  $\varphi \neq 0$  sii  $\Gamma$  es bipartido. En este caso, de nuevo

$$\mathbf{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}) \varphi \mathbf{e}^* \star \mathcal{A}$$

es una solución propia de(3). Todas las soluciones propias que quedan y independientes de ésta se representan en la forma  $\lambda^{-\frac{1}{2}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \Psi$  con una matriz  $\Psi$  perteneciente a  $\mathcal{M}^-(\Gamma)$ :

$$\mathcal{M}^-(\Gamma) := \{ \Psi \prec \mathcal{A} \mid \Psi^* = \Psi, \Psi \mathbf{e} = 0 \}.$$

En el grafo bipartido  $\Gamma$  podemos elegir la orientación de fuentes y sumideros. Entonces  $\mathcal{M}^-(\Gamma)$  es isomorfo a  $\ker \mathcal{D}(\Gamma)$  mediante el isomorfismo  $h_2$

$$h_2 = \left( y \longmapsto (e_{ih} y_{s(i,h)})_{i,h \in \mathbb{N}} \right),$$

y podemos concluir como antes.

Si  $\Gamma$  no es bipartido, entonces todas las soluciones propias se anulan en todos los vértices. El resto de la demostración es más técnica y larga que la del caso bipartido; omitimos los detalles y remitimos a [3, Sec.5].  $\square$

Todos los valores propios, sus multiplicidades y sus soluciones propias pueden verse en el cuadro siguiente.

$\lambda$	$M(\lambda)$	$\mu \in \sigma(\mathbf{Z})$	$\varphi = \mathbf{n}(u)$	$\mathbf{U}$
0	1	1	$\varphi = \mathbf{e}$	$\mathbf{U} = \mathcal{A}$
$\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$	$m(\mu, \mathbf{Z})$	$\mu = \cos \sqrt{\lambda}$	$\mathbf{Z}\varphi = \mu\varphi$ $\varphi \neq \mathbf{0}$	$\cos(x\sqrt{\lambda})\varphi\mathbf{e}^* \star \mathcal{A}$ $+\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})}\mathbf{e}\varphi^* \star \mathcal{A}$ $-\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\tan(\sqrt{\lambda})}\varphi\mathbf{e}^* \star \mathcal{A}$
$\sin \sqrt{\lambda} = 0$ $\cos \sqrt{\lambda} = 1$ $0 < \lambda = 4\pi^2 k^2$	$N - n + 2$	(1)	$\varphi = c\mathbf{e}$ $c \in \mathbb{R}$ $\mathbf{Z}\mathbf{e} = \mathbf{e}$	$\cos(x\sqrt{\lambda})c\mathcal{A}$ $+\lambda^{-\frac{1}{2}}\sin(x\sqrt{\lambda})\Psi$ $\Psi^* = -\Psi, \Psi\mathbf{e} = 0,$ $\Psi \prec \mathcal{A}$
$\sin \sqrt{\lambda} = 0$ $\cos \sqrt{\lambda} = -1$ $\Gamma$ bipartido $\lambda = (2k + 1)^2\pi^2$	$N - n + 2$	(-1)	$\varphi = c\zeta$ $c \in \mathbb{R}$ $\mathbf{Z}\zeta = -\zeta$	$\cos(x\sqrt{\lambda})c\zeta\mathbf{e}^* \star \mathcal{A}$ $+\lambda^{-\frac{1}{2}}\sin(x\sqrt{\lambda})\Psi$ $\Psi^* = \Psi, \Psi\mathbf{e} = 0,$ $\Psi \prec \mathcal{A}$
$\sin \sqrt{\lambda} = 0$ $\cos \sqrt{\lambda} = -1$ $\Gamma$ no bipartido $\lambda = (2k + 1)^2\pi^2$	$N - n$	—	$\mathbf{0}$	$\lambda^{-\frac{1}{2}}\sin(x\sqrt{\lambda})\Psi$  $\Psi^* = \Psi, \Psi\mathbf{e} = 0,$ $\Psi \prec \mathcal{A}$

#### 4. APLICACIONES

Como primera aplicación se obtiene el comportamiento asintótico de los valores propios. Denotando el valor propio  $k$ -ésimo por  $\lambda_k$ , y evaluando la función que cuenta los valores propios

$$\#\{\lambda \mid \lambda \leq (2\pi k)^2\} = 2Nk + 1,$$

demostré en 1985 [3], e independientemente Ali Mehmeti en 1986 [1] y Nicaise en 1987 [22], que los valores propios crecen como  $k^2$ , es decir con la misma potencia que en el caso de un solo intervalo. A este respecto, las redes se comportan como dominios de dimensión 1.

**Corolario 1.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{\lambda \mid \lambda \leq x\}}{\sqrt{x}} = \frac{N}{\pi} \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{N^2}.$$

**Corolario 2.** *Dos redes  $G_1$  y  $G_2$  isoespectrales tienen el mismo número de vértices y el mismo número de aristas. Además, el carácter bipartido es una invariante isoespectral.*

*Demostración:* Por hipótesis, sabemos que las matrices estocásticas por filas  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  son isoespectrales

$$\sigma(\mathbf{Z}_1) \stackrel{m}{=} \sigma(\mathbf{Z}_2).$$

Por construcción, la matriz  $\mathbf{Z}$  tiene solamente valores propios reales y es diagonalizable. Entonces, como el orden de  $\mathbf{Z}$  es justamente el número de vértices, obtenemos la primera igualdad deseada

$$n_1 = \sum_{\mu \in \sigma(\mathbf{Z}_1)} \dim \ker(\mathbf{Z}_1 - \mu \mathbf{I}_n) = \sum_{\mu \in \sigma(\mathbf{Z}_2)} \dim \ker(\mathbf{Z}_2 - \mu \mathbf{I}_n) = n_2$$

y la segunda por la igualdad de los corrangos

$$N_1 = \text{corank}(\Gamma_1) + n_1 - 1 = \text{corank}(\Gamma_2) + n_2 - 1 = N_2.$$

Finalmente, para la invariabilidad del carácter bipartido, recordemos de [3] que  $\Gamma$  es bipartido sii  $-1 \in \sigma(\mathbf{Z})$ .  $\square$

El último resultado se aplica inmediatamente para obtener una respuesta afirmativa, parcial todavía, a la pregunta:

**Corolario 3.**

$$\sigma(\Delta_{G_1}^K) \stackrel{m}{=} \sigma(\Delta_{G_2}^K) \implies G_1 \cong G_2$$

*si las redes  $G_1$  y  $G_2$  son ambas caminos, o ambas circuitos, o ambas estrellas.*

Otra aplicación es que hay una relación entre las multiplicidades y el grupo de automorfismos  $\text{Aut}(\Gamma)$  del grafo. Notamos que  $\text{Aut}(\Gamma)$  es justamente el centralizador de la matriz de adyacencia en el grupo simétrico de los vértices  $\{\beta \in \mathbf{S}_n \mid P_\beta \mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma) P_\beta\}$ .

**Corolario 4.** *Si el orden de  $\text{Aut}(\Gamma)$  no es una potencia de 2, entonces el espectro del Laplaciano contiene múltiples valores propios debidos a la estructura de la red.*

Notemos algunas generalizaciones. Para condiciones de transición más generales de tipo dinámico, es decir, una transición proveniente de una relación entre la derivada normalizada exterior y la derivada temporal, una ecuación característica se obtiene como sigue. Una ley de Kirchhoff en la forma

$$\rho_i u(v_i) + \sum_j d_{ij} a_j(v_i) \partial_j u_j(v_i) = \lambda \sigma_i u(v_i)$$

se escribe, al nivel de las matrices de adyacencia, en la forma

$$[\mathbf{L}^{(-1)} \star \mathbf{A} \star \mathbf{U}'(0)] \mathbf{e} = \text{Diag}(\mathbf{r} - \lambda \mathbf{s}) \varphi,$$

donde  $\mathbf{L}$  designa la matriz de longitudes adyacentes. Entonces, con la matriz

$$\mathbf{B} := \mathbf{L} \star \mathbf{A}^{(-1/2)}$$

se plantea la ecuación característica

$$0 = \det \left\{ \mathbf{A}^{(1/2)} \left[ \sin \left( \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \right) \right]^{(-1)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{Diag}(\mathbf{r} - \lambda \mathbf{s}) \right. \\ \left. - \text{Diag} \left( \left( \mathbf{A}^{(1/2)} \cos \left( \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \right) \star \left[ \sin \left( \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \right) \right]^{(-1)} \right) \mathbf{e} \right) \right\}$$

que es trascendente en general, pero el uso de un determinante finito es la parte importante de este resultado, véase [3, Sec.4].

De hecho, el resultado asintótico susodicho se aplica para determinar igualmente el crecimiento de los valores propios del problema de tipo Sturm–Liouville sobre una red  $G$  con aristas de longitudes arbitrarias

$$\begin{cases} u \in C^2(G), \\ \frac{1}{r_j} \partial_j (a_j \partial_j u_j) - q_j u_j = -\lambda u_j & \text{para todo } 1 \leq j \leq N, \\ \rho_{i1} u(v_i) + \rho_{i2} \sum_j d_{ij} a_j(v_i) \partial_j u_j(v_i) = \lambda \sigma_i u(v_i) & \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \\ \rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 > 0, \quad (\sigma_i \neq 0 \Rightarrow \sigma_i \rho_{i2} > 0) & \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

que contiene la mencionada ley de Kirchoff dinámica. En 1988 [5] demostré que el problema se trata como un problema de frontera y de valores propios *S-hermitico* [23]

$$\mathbf{F}\mathbf{y} = -\lambda\mathbf{G}\mathbf{y}$$

con operadores apropiados, aunque la condición de frontera dependa del parámetro valor propio. En particular, se obtienen la existencia de una base de Hilbert compuesta de funciones propias, desarrollos en serie espectrales, principios variacionales y el cociente de Rayleigh, que se escribe en la forma

$$R(u) = \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} (r_j q_j u_j^2 + a_j (\partial_j u_j)^2) dx_j + \sum_{i=1, \rho_{i2} \neq 0}^n \frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2} \gamma_i} u^2(v_i)}{\sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} r_j u_j^2 dx_j + \sum_{i=1, \rho_{i2} \neq 0}^n \frac{\sigma_i}{\rho_{i2} \gamma_i} u^2(v_i)}.$$

Por lo demás, notamos el efecto amortiguador del término dinámico disipativo en el cociente. El espectro se desplaza a la izquierda respecto del caso sin este término. En particular, los principios de mín - máx se aplican para reducir la determinación del comportamiento asintótico de los valores propios al caso constante susodicho. De nuevo, los valores propios crecen de manera cuadrática:

**Corolario 5.** ([4, 6])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = C > 0, \quad C = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} \sqrt{\frac{r_j}{a_j}} dx_j \right)^{-2}.$$

Pero, la deducción de la constante de Weyl  $C$  necesita algunas técnicas suplementarias. En todo caso, el orden del crecimiento de los valores propios sobre redes es el de un intervalo, y la constante de Weyl no es nada más que la de un intervalo compuesto de todas las aristas de la red con coeficientes  $a$  y  $r$  eventualmente discontinuos. La estructura de la red se pierde completamente, y las redes se comportan como intervalos a este respecto.

## 5. UN CONTRAEJEMPLO

La ecuación característica se simplifica mucho para las redes regulares de grado  $\gamma$  y enlaza directamente los espectros del Laplaciano y del operador de adyacencia. Recordemos que un grafo  $\Gamma$  se dice  $\gamma$ -regular si todos los grados de los vértices son iguales a  $\gamma$ . En este caso, la ecuación característica se reduce a

$$(6) \quad \mathcal{A}(\Gamma)\varphi = \gamma \cos \sqrt{\lambda} \varphi,$$

y los vectores  $\varphi$  de funciones propias son vectores propios de la matriz de adyacencia. Para las multiplicidades, recordemos las fórmulas de antes.

**Corolario 6.**

$$\gamma \cos \sqrt{\sigma(-\Delta_G^K)} = \begin{cases} \sigma(\mathcal{A}(\Gamma)) & \text{si } \Gamma \text{ es bipartido,} \\ & \text{ó un circuito impar,} \\ \sigma(\mathcal{A}(\Gamma)) \cup \{-\gamma\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además

$$M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ \dim \ker (\mathcal{A} - \gamma \cos \sqrt{\lambda} \mathbf{I}_n) & \text{si } \sin \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ N - n + 2 \text{ ó } N - n & \text{si } \sin \sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Este caso combinatorio es el truco esencial para resolver el problema inverso en general. Dos redes isoespectrales pueden ser no isométricas, porque sus grafos abstractos pueden ser no isomorfos. Debemos solamente encontrar dos grafos regulares  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  no isomorfos con  $\sigma(\mathcal{A}(\Gamma_1)) \stackrel{m}{=} \sigma(\mathcal{A}(\Gamma_2))$ . La teoría algebraica de los grafos conoce muchos grafos generales isoespectrales y no isomorfos, véase [12, 14], pero los ejemplos regulares son un poco más difíciles de encontrar y podemos utilizar el de Hoffman and Ray - Chaudhuri [17] como sigue.

**Ejemplo 1.** *Los dos grafos 4- regulares en la figura 2 con  $n_1 = n_2 = 12$  vértices y con espectros*

$$\sigma(\mathcal{A}(\Gamma_1)) \equiv (4, 2, 2, 2, 0, 0, 0, -2, -2, -2, -2, -2) \equiv \sigma(\mathcal{A}(\Gamma_1))$$

*son no isomorfos, porque el grafo a la izquierda es planar, mientras que el grafo a la derecha no lo es, como vemos en la figura 3, donde debemos identificar los nudos blancos en cada grafo.*



Entonces, podemos concluir que, en general, no se puede oír la forma de una red; a este respecto, las redes se comportan como dominios de dimensión superior [6, 7].

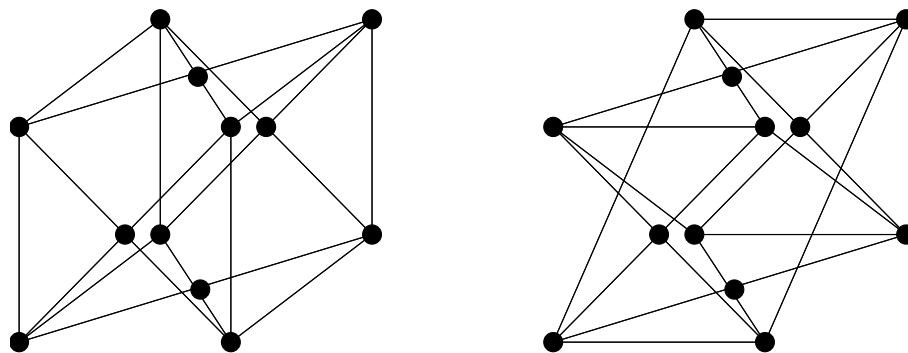


FIGURA 2. Dos grafos isospectrales.

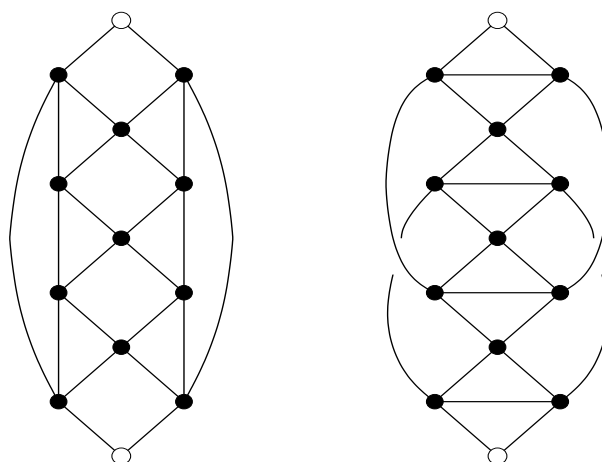


FIGURA 3. Los dos grafos en la figura 2 no son isomorfos.

## 6. REDES INFINITAS

¿Qué pasa para redes infinitas? En primer lugar, notamos que la misma ecuación característica (6) y las mismas fórmulas para las multiplicidades de los valores propios del teorema 1 son válidas usando el

corrango del grafo infinito en vez de  $N - n + 1$ , véase [8]. En segundo lugar, podemos citar el resultado siguiente que J. A. LUBARY y yo mismo descubrimos en 2005.

**Teorema 2.** [8] *Todos los árboles  $T$  con aristas de la misma longitud 1 y con un número finito de vértices terminales, pero infinitos nudos de ramificación esencial, son isoespectrales. Su espectro en  $\mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)$  consiste en valores propios y satisface*

$$\sigma_{(p)}(-\Delta_T^K; \mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)) = [0, \infty)$$

con las multiplicidades

$$\forall \lambda \in [0, \infty) : M(\lambda; T) = \infty.$$

Pero ¿hay ejemplos con multiplicidades finitas? En este contexto podemos citar el ejemplo siguiente de [9].

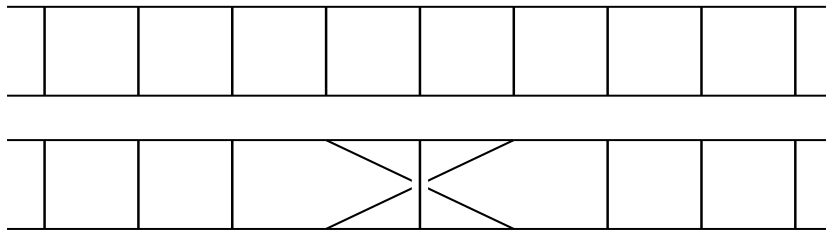


FIGURA 4. Los grafos  $B_1$  y  $B_2$  del ejemplo 2.

**Ejemplo 2.** *Los dos grafos 3-regulares  $B_1$  y  $B_2$  en la figura 4 son isoespectrales, pero no isomorfos. De hecho,*

$$\sigma_{(p)}(\mathcal{A}) = [-3, 3] \quad y \quad \sigma_{(p)}(-\Delta_G^K, \mathcal{C}_K^2 \cap L^\infty) = [0, \infty)$$

y

$$m(\mu, \mathcal{A}(B_i)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \pm 3, \\ 2 & \text{si } -3 < \mu < -1 \text{ ó } 1 < \mu < 3, \\ 3 & \text{si } \mu = \pm 1, \\ 4 & \text{si } -1 < \mu < 1. \end{cases}$$

Entonces, para el Laplaciano en  $\mathcal{C}_K^2 \cap L^\infty$ , obtenemos en ambos casos con  $\text{corank}(B_i) = \infty$

$$M(\lambda, -\Delta_G^K(B_i)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ m(3 \cos \sqrt{\lambda}, \mathcal{A}(B_i)) & \text{si } \lambda \in (0, \infty) \text{ y } \sin \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ \infty & \text{si } \lambda \in (0, \infty) \text{ y } \sin \sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

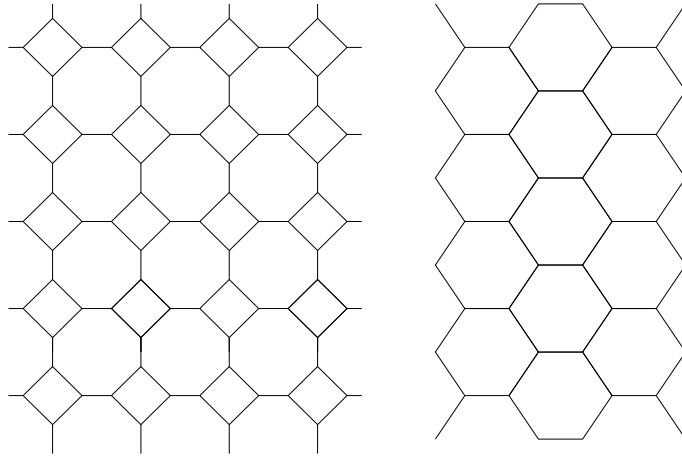


FIGURA 5. Los grafos de las pavimentaciones  $\mathbf{K}_4$  y  $\mathbf{K}_2$ .

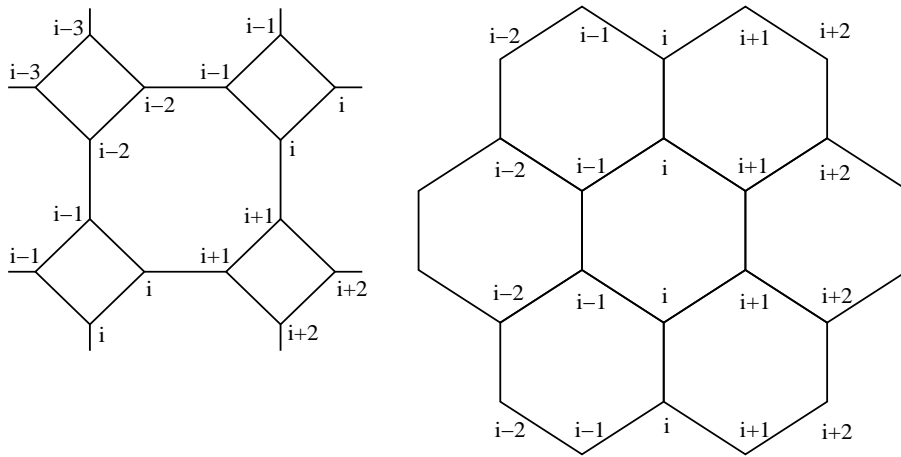


FIGURA 6. Las inyecciones espectrales de  $\Gamma_1$  en  $\mathbf{K}_4$  y  $\mathbf{K}_2$ .

Presentamos ahora dos grafos con multiplicidades finitas e infinitas para el operador de adyacencia. Tomamos los grafos de la pavimentación de Kepler  $\mathbf{K}_2$  con hexágonos y de la pavimentación de Kepler  $\mathbf{K}_4$  con cuadrados y octágonos, véase la figura 5. Los dos espectros en  $\mathcal{C}_K^2 \cap L^\infty$  del Laplaciano son la semirrecta real positiva y el del operador de adyacencia  $\mathcal{A}$  es el intervalo  $[-3, 3]$ :

$$\sigma_{(p)}(\mathcal{A}) = [-3, 3] \quad \text{y} \quad \sigma_{(p)}(-\Delta_G^K, \mathcal{C}_K^2 \cap L^\infty) = [0, \infty).$$

Podemos demostrar esto mediante una inyección espectral del espectro

$$\sigma_{(p)}(\mathcal{A}(\Gamma_1), \ell^\infty(\mathbb{Z})) = [-2, 2],$$

por lo demás igual al espectro puntual, del camino simple y bilateralmente infinito  $\Gamma_1 = (\mathbb{Z}, K, \epsilon)$  con la adyacencia natural de los enteros  $e_{ih} = 1 \Leftrightarrow |i - k| = 1$  en el espectro de  $\mathbf{K}_2$  ó  $\mathbf{K}_4$ . Para toda sucesión propia acotada asociada a  $\mu$  sobre el camino  $\Gamma_1$  que satisface  $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  con  $\mu x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$ , encontramos una sucesión propia acotada asociada a  $\mu + 1$  como la dibujada en la figura 6, donde solamente aparecen los índices de los elementos. Descubrimos de esta manera que el intervalo  $[-1, 3]$  pertenece al espectro puntual deseado. La parte restante se obtiene por el carácter bipartido porque éso es sinónimo de la simetría del espectro respecto del origen.

El valor 3 es simple en ambos casos, y también 0 para el Laplaciano. Realmente encontramos aquí un fenómeno curioso. El valor propio 1 tiene no sólo multiplicidad infinita, sino que además su espacio propio contiene un subespacio isomorfo a  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ , especialmente de dimensión no numerable. Se llamará *agujero negro* a todo valor propio, de un endomorfismo, que tenga esta propiedad. Obtenemos el agujero negro 1 en  $\mathbf{K}_4$  con  $\ell^\infty(\mathbb{Z})^2$  como un subespacio isomorfo de los espacios propios  $E_{\pm 1}(\mathcal{A}, \ell^\infty(\mathbf{K}_4))$  como sigue. A lo largo de cada vertical en la figura 7 prescribimos cualquier valor y su opuesto según negro y blanco respectivamente y a lo largo de cada horizontal también. Atención, vértices vecinos del mismo color, que no están sobre la misma horizontal o la misma vertical, no tienen necesariamente el mismo valor. Para  $\mathbf{K}_2$ , el agujero negro 1 se encuentra de la misma manera asignando los colores negro y blanco como en la figura 8. Obtenemos  $\ell^\infty(\mathbb{Z})^2$  como un subespacio isomorfo de los espacios propios  $E_{\pm 1}(\mathcal{A}, \ell^\infty(\mathbf{K}_2))$ . No queremos demostrar los detalles de la igualdad entre la multiplicidades, pero si

pedir al auditorio que encuentre una demostración simple de la identidad de las multiplicidades...

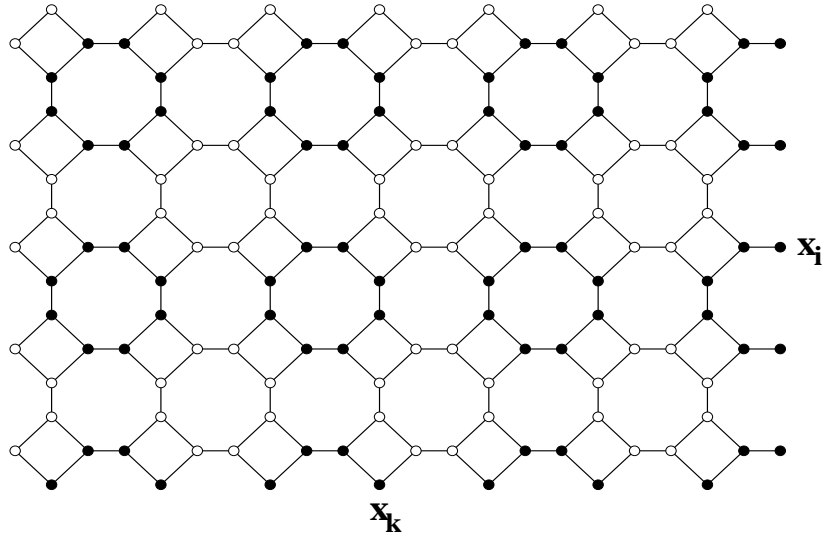


FIGURA 7. El agujero negro 1 de  $K_4$ .

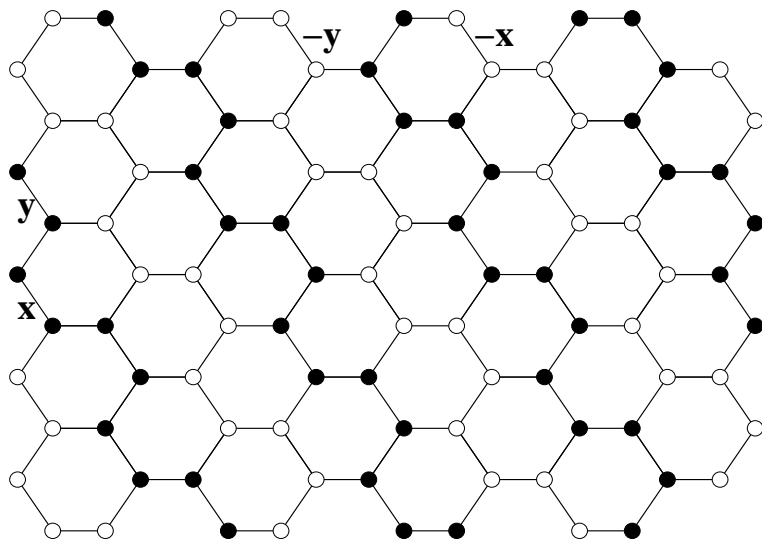


FIGURA 8. El agujero negro 1 de  $K_2$ .

## 7. ¿PODEMOS OÍR DE VERDAD UNA RED?

Finalmente, investiguemos los valores propios debidos a la estructura de la red contra los resultantes de un solo brazo. O dicho de otra manera, queremos comprender por qué los triángulos suenan bien, mientras que los tetraedros son cacofónicos. Consideramos el grafo completo  $\Gamma = \mathcal{K}_n$  con la matriz de adyacencia  $\mathcal{A} = \mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{I}_n$  y la red  $G$  correspondiente con longitudes de aristas iguales a 1. La ventaja de este grafo es que tiene sólo una sucesión de valores propios debidos a su estructura de la red. Los valores propios del Laplaciano  $\lambda$ , sus multiplicidades  $m(\lambda)$  y posibles distribuciones en los nudos  $\varphi$  pueden verse en la tabla espectral siguiente:

(1) $\lambda = 0, m(0) = 1, \varphi = \mathbf{e}$
(2) $\lambda = 4\pi^2 k^2, k \neq 0, m(\lambda) = 2 + \frac{1}{2}n(n-3), \varphi = \mathbf{e}$
(3) $\lambda = \pi^2(2k+1)^2, k \neq 0, m(\lambda) = \frac{1}{2}n(n-3), \varphi = \mathbf{0}$
(4) $\cos \sqrt{\lambda} = -(n-1)^{-1}, m(\lambda) = n-1, \varphi \in \ker \mathbf{e}\mathbf{e}^*$

¿ Cuándo esta red es cacofónica? Si todas las longitudes de onda tienen cocientes racionales, entonces todas las frecuencias de la red pertenecen a los sonidos armónicos de una sola cuerda. Recordemos que las raíces de las frecuencias se comportan como los inversos de las longitudes de onda. Entonces, la red del grafo completo es cacofónica sii

$$\arccos \frac{-1}{n-1} \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Veamos qué pasa en el caso más simple no trivial, es decir para  $n = 3$ .

Aquí  $\Gamma = \mathcal{K}_3$  es un triángulo,  $\mathcal{A} = \mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  su matriz

de adyacencia, y la tabla espectral se reduce a

<b>(1)</b> $\lambda = 0, m(0) = 1, U(x) = r\mathcal{A}, r \in \mathbb{R}^*$
<b>(2)</b> $\lambda = 4\pi^2 k^2, m(\lambda) = 2$
$\mathbf{U}(x) = \cos(x2\pi k) \begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin(x2\pi k)}{2\pi k} \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}$
<b>(3)</b> $\lambda = \pi^2(2k + 1)^2, m(\lambda) = 0$
<b>(4)</b> $-\frac{1}{2} = \cos \sqrt{\lambda}, \lambda = \left(\frac{2}{3} + 2\mathbf{k}\right)^2 \pi^2, m(\lambda) = 2, \mathbf{e}_3^* \varphi = 0$
$\mathbf{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda})\varphi\mathbf{e}_3^* \star \mathcal{A} + \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sin \sqrt{\lambda}} \left(\mathbf{e}_3 \varphi^* - \cos(\sqrt{\lambda})\varphi\mathbf{e}_3^*\right) \star \mathcal{A}$

Notamos que el tercer caso no contribuye al espectro. Más importante es que los valores propios definidos por  $-\frac{1}{2} = \cos \sqrt{\lambda}$ , es decir  $\sqrt{\lambda} = \left(\frac{2}{3} + 2k\right) \pi$ , son múltiplos racionales de  $\pi$ . De hecho, respecto de un tono fundamental, digamos "do",  $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{3}\pi$  corresponde a una quinta, es decir "sol". Concluimos que el triángulo suena bien y que su espectro puede ser el de una cuerda.

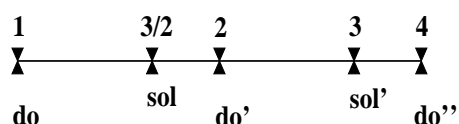


FIGURA 9. La gama asociada al grafo del triángulo.

En el caso  $n = 4$  obtenemos el tetraedro  $\Gamma = \mathcal{K}_4$  con  $\mathcal{A} = \mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{I}_4$ , y sus valores propios, sus multiplicidades y funciones propias con posibles distribuciones en los nudos  $\varphi$  pueden verse en la tabla siguiente.

(1) $\lambda = 0, m(0) = 1, U(x) = r\mathcal{A}, r \in \mathbb{R}$
(2) $\lambda = 4\pi^2 k^2, m(\lambda) = 4 \quad c \in \mathbb{R}, \Psi^* = -\Psi, \Psi \mathbf{e}_4 = 0, \Psi \prec \mathcal{A}$ $\mathbf{U}(x) = c \cos(x2\pi k) (\mathbf{e}_4 \mathbf{e}_4^* - \mathbf{I}_4) + \frac{\sin(x2\pi k)}{2\pi k} \Psi$
(3) $\lambda = \pi^2(2k+1)^2, m(\lambda) = 2, \varphi = 0$ $\mathbf{U}(x) = \frac{\sin(x\pi(2k+1))}{\pi(2k+1)} \Psi, \quad \Psi^* = \Psi, \Psi \mathbf{e}_4 = 0, \Psi \prec \mathcal{A}$
(4) $-\frac{1}{3} = \cos \sqrt{\lambda}, \arccos \frac{-1}{3} \notin \pi\mathbb{Q}, m(\lambda) = 3, \mathbf{e}_4^* \varphi = 0$ $\mathbf{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}) \varphi \mathbf{e}_4^* \star \mathcal{A} + \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sin \sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_4 \varphi^* - \cos(\sqrt{\lambda}) \varphi \mathbf{e}_4^*) \star \mathcal{A}$

Como soportes de los elementos que se anulan en los nudos y pertenecen a bases de los espacios propios en el caso de una sola arista, se presentan los circuitos en la figura 10 para los casos (2) y (3) de la tabla. En el caso (2) debemos añadir la matriz  $\mathbf{U}(x) = c \cos(x2\pi k) (\mathbf{e}_4 \mathbf{e}_4^* - \mathbf{I}_4)$ .

La sucesión de valores propios debidos a su estructura de la red se define por  $-\frac{1}{3} = \cos \sqrt{\lambda}$  y es incompatible con las frecuencias de una arista en la red porque

$$\arccos \frac{-1}{3} \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Pero ¿podemos oír de verdad las frecuencias que corresponden a  $-\frac{1}{3} = \cos \sqrt{\lambda}$ ? Con este fin, construí el grafo físicamente en 1986 con la ayuda del Laboratoire de Mécanique Paris VI en un experimento real. Naturalmente es imposible realizar un tetraedro con cuerdas tensadas. Pero una realización con vigas sería inapropiada y poco hábil, porque la ecuación de ondas describe vigas con poca precisión, y es mejor modelizarlos con el Bilaplaciano, las llamadas vigas de Euler. Por el contrario, la ecuación de ondas describe bien y con precisión cuerdas que se hacen vibrar. Entonces debimos crear una construcción auxiliar



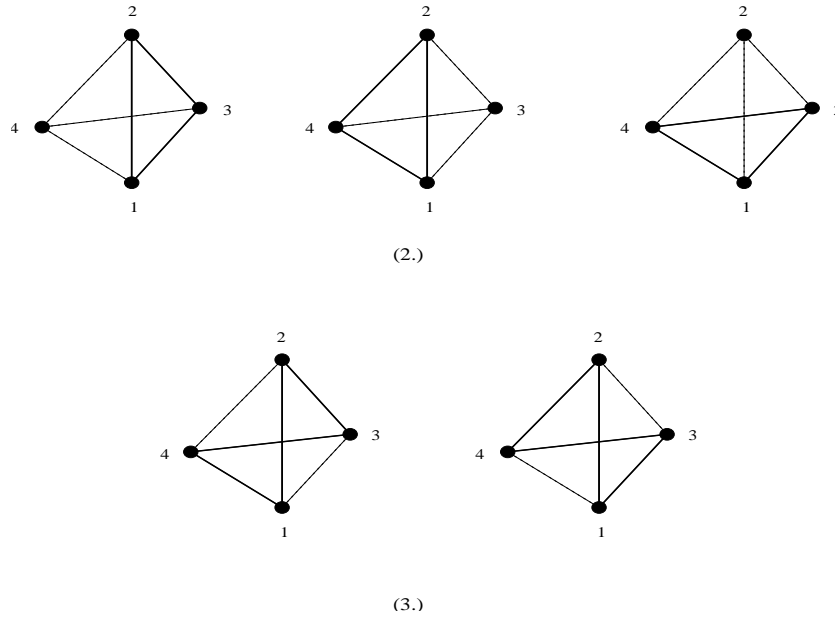


FIGURA 10. Soportes de funciones propias que se anulan en los nudos para (2) y (3).

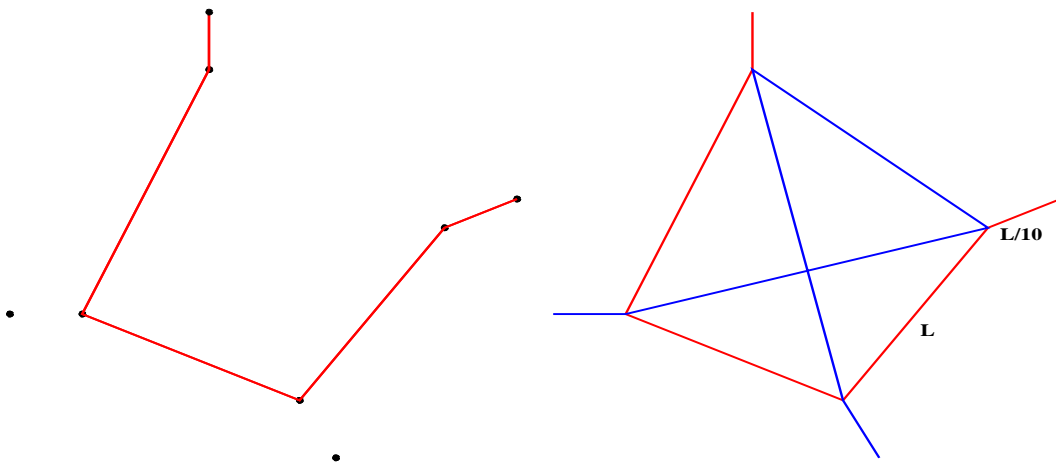


FIGURA 11. Oír las frecuencias inmanentes del tetraedro.

para fijar el tetraedro compuesto de cuerdas, sin perturbar sus frecuencias bajas. La solución fue simple: sólo tuvimos que fijar cada vértice

con una arista auxiliar adyacente con un nudo de fijación de forma que la longitud de ésta fuese un décimo de la longitud de las aristas del tetraedro u otra fracción pequeña. Entonces tomamos dos cuerdas de la misma longitud y tensión y fijamos la primera entre dos nudos de fijación y todos los nudos del tetraedro como vemos en la figura 11 a la izquierda, y la segunda de la misma manera entre los otros nudos de fijación para obtener la configuración en la figura 11 a la derecha. Entonces tensamos toda la red teniendo en cuenta el cociente constante igual a un décimo entre aristas de fijación y aristas intrínsecas y colocamos todo ello en un tetraedro de fijación compuesto esencialmente de hierro colado, que es plumado en la figura 12. Realmente, este ajuste fue el paso más difícil de todo el experimento. Para hacer resaltar las frecuencias inmanentes deseadas, amortiguamos todas las aristas excepto una del tetraedro y primero grabamos el espectro de esta cuerda sola. Entonces hicimos vibrar toda la red de cuerdas y lo grabamos suprimiendo el espectro de la arista sola con un filtro de sonidos de Fourier. Por una parte, la cacofonía nos molestó mucho, y por otra tuvimos la gran satisfacción de oír la frecuencia debida sólo a la red  $\cos \sqrt{\lambda} = -\frac{1}{3}$ . Habíamos encontrado una red que se podía oír.

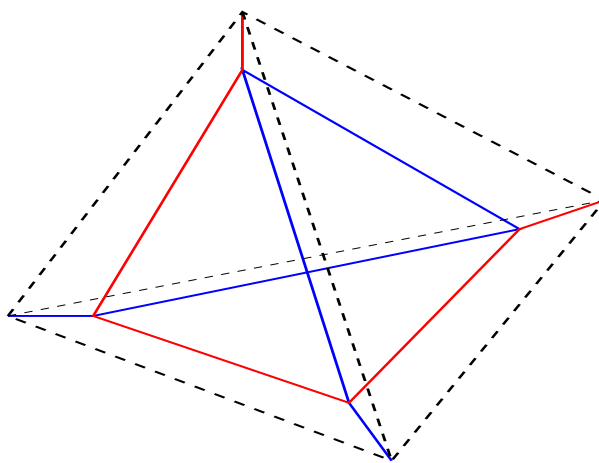


FIGURA 12. Fijación del tetraedro.

## REFERENCIAS

- [1] F. ALI MEHMETI, A characterization of generalized  $C^\infty$ -notion on nets, *Integral Equ. Operator Theory* **9** (1986) 753 - 766.
- [2] W. ARENDT, Does diffusion determine the body? *J. Reine Angew. Math.* **550** (2002) 97–123.
- [3] J. VON BELOW, A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on  $c^2$ -networks, *Lin. Alg. Appl.* **71** (1985) 309 - 325.
- [4] J. VON BELOW, Kirchhoff laws and diffusion on networks, *Lin. Alg. Appl.* **121** (1989) 692 - 697.
- [5] J. VON BELOW, Sturm - Liouville eigenvalue problems on networks, *Math. Meth. Applied Sciences* **10** (1988) 383 - 395.
- [6] J. VON BELOW, *Parabolic network equations*, 2nd ed. 1994, 3rd edition to appear.
- [7] J. VON BELOW, Can one hear the shape of a network? *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* Vol. **219**, Marcel Dekker Inc. New York, (2000) 19–36.
- [8] J. VON BELOW y J. A. LUBARY, The eigenvalues of the Laplacian on locally finite networks, *Results in Math.* **47** (2005) 199–225.
- [9] J. VON BELOW y J. A. LUBARY, Isospectral infinite graphs and infinite eigenvalue multiplicities, *in progress*.
- [10] P. BÉRARD, Transplantation et isospectralité, *Math. Annalen*, **292** (1992) 547–559.
- [11] M. BERGER, P. GAUDUCHON y E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne. *Lecture Notes Math.* **194**, Springer Verlag Berlin, 1971.
- [12] N. L. BIGGS, Algebraic graph theory. *Cambridge Tracts Math.* **67**, Cambridge University Press, 1967.
- [13] S. J. CHAPMAN, Drums that sound the same, *Amer. Math. Monthly* **102** (1995) 124–138.
- [14] D. M. CVETCOVIĆ, M. DOOB, H. SACHS, Spectra of graphs. Academic Press New York, 1980.
- [15] C. GORDON, D. L. WEBB y S. WOLPERT, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Inventiones Math.* **110** (1992) 1–22.
- [16] C. GORDON, D. L. WEBB y S. WOLPERT, One cannot hear the shape of a drum, *Bull. AMS* **27** (1992) 134–138.
- [17] A. J. HOFFMAN y D. K. RAY - CHAUDHURI, On the line graph of a symmetric balanced incomplete block design, *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965) 238 - 252.
- [18] V. ISAKOV, Inverse problems for partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [19] M. KAC, Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* **73** (1966) II:1–23.
- [20] J. MILNOR, Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifolds. *Pr. Nat. Ac. Sci. USA* **51** (1964) 542.

- [21] B. MOHAR y W. WOESS, A survey on spectra of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989) 209-234.
- [22] S. NICAISE, Spectre des réseaux topologiques finis. *Bull. Sc. Math.* 2<sup>e</sup> Série **111** (1987) 401 - 413.
- [23] F. W. SCHÄFKE y A. SCHNEIDER,  $S$  - hermitesche Rand - Eigenwertprobleme I,II,III *Math. Ann.* **162** (1965) 9 - 26; **165** (1966) 236-260 y **177** (1968) 67 - 94.
- [24] H. URAKAWA, Bounded domains which are isospectral but not congruent. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **15** (1982) 441-456.
- [25] M.-F. VIGNÉRAS, Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. Math.* **112** (1980) 21-32.