Euler, sèries i funció zeta de Riemann

Joaquim Bruna

Department de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Jornada Euler, 14 de Febrer de 2007, UPC

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

Infinits nombres primers a la Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1,$$

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s), \quad -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \log \zeta(s)$$

$-\log(1-x) = x + O(x^2), 0 < x < \frac{1}{2}$ dóna

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}})$$

Fent $s \to 1, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$$

"Hi ha més primers que quadrats"

El càlcul de $\zeta(2)$

Jacob Bernouilli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =?$ Solució d'Euler el 1734: $P(x)$ polinomi de grau n, $P(0) = 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ arrels

$$P(x) = (1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2}) \dots (1 - \frac{x}{a_n})$$

Cert per a funcions més generals:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots$$

per a la qual $a_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots = \prod_{n \neq 0} (1 - \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

Coeficient de x^2 : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

El càlcul de $\zeta(2)$

Jacob Bernouilli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$? Solució d'Euler el 1734: $P(x)$ polinomi de grau n, $P(0) = 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ arrels

$$P(x) = (1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2})\ldots(1 - \frac{x}{a_n})$$

Cert per a funcions més generals:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots$$

per a la qual $a_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots = \prod_{n\neq 0}(1 - \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

Coeficient de x^2 : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

El càlcul de $\zeta(2)$

Jacob Bernouilli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =?$ Solució d'Euler el 1734: $P(x)$ polinomi de grau n, $P(0) = 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ arrels

$$P(x) = (1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2}) \ldots (1 - \frac{x}{a_n})$$

Cert per a funcions més generals:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots$$

per a la qual $a_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots = \prod_{n\neq 0}(1 - \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

Coeficient de x^2 : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

El càlcul de $\zeta(2)$

Jacob Bernouilli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =?$ Solució d'Euler el 1734: $P(x)$ polinomi de grau n, $P(0) = 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ arrels

$$P(x) = (1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2}) \ldots (1 - \frac{x}{a_n})$$

Cert per a funcions més generals:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots$$

per a la qual $a_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots = \prod_{n\neq 0}(1 - \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

Coeficient de x^2 : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Altres coeficients amb les formules de Girard-Newton. Coeficient de x^4:

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{1 \leq n < m} \frac{1}{n^2 m^2} = \frac{1}{2\pi^4} \left((\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)$$

d'on $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^4}{90}$.

Relació amb nombres de Bernouilli

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

Càlcul de $\zeta(2k), k \in \mathbb{N}$

Altres coeficients amb les formules de Girard-Newton. Coeficient de x^4:

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{1 \le n < m} \frac{1}{n^2 m^2} = \frac{1}{2\pi^4} \left((\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)$$

d'on $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^4}{90}$.

Relació amb nombres de Bernouilli

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

Sèries trigonomètriques

Euler (i també Bernouilli, d'Alembert, Clairaut)

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx, n \geq 0, a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx, n \geq 1$

$\int_0^{2\pi} h(x)g(x)\,dx = 0, h \neq g$; Fórmula de Bessel-Pitàgores

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \frac{b_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Amb $f(x) = x^k, 0 \leq x \leq 1$, hom pot trobar $\zeta(2k)$.

Sèries trigonomètriques

Euler (i també Bernouilli, d'Alembert, Clairaut)

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx,\, n \geq 0,\, a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx,\, n \geq 1$$

$\int_0^{2\pi} h(x)g(x)\,dx = 0,\, h \neq g$; Fórmula de Bessel-Pitàgores

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \frac{b_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Amb $f(x) = x^k, 0 \leq x \leq 1$, hom pot trobar $\zeta(2k)$.

Euler (i també Bernouilli, d'Alembert, Clairaut)

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\, dx, n \geq 0, a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\, dx, n \geq 1$$

$\int_0^{2\pi} h(x)g(x)\, dx = 0, h \neq g$; Fórmula de Bessel-Pitàgores

$$\int_0^1 f(x)^2\, dx = \frac{b_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Amb $f(x) = x^k, 0 \leq x \leq 1$, hom pot trobar $\zeta(2k)$.

Sèries trigonomètriques

Euler (i també Bernouilli, d'Alembert, Clairaut)

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx, n \geq 0, a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx, n \geq 1$$

$\int_0^{2\pi} h(x)g(x)\,dx = 0, h \neq g$; Fórmula de Bessel-Pitàgores

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \frac{b_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Amb $f(x) = x^k, 0 \leq x \leq 1$, hom pot trobar $\zeta(2k)$.

Un problema

Fórmula de Bessel general: $\{h_i(x)\}$ és un sistema ortonormal en un interval I,

$$\int_I h_i(x)h_j(x)\,dx = \delta_{i,j} \to \int_I |\sum_i c_i h_i(x)|^2\,dx = \sum_i c_i^2$$

Sistemes ortonormals on sumar $f(x) = \sum_i \frac{1}{i} h_i(x)$?

Bases d'ondetes:
$h_{n,k}(x) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^k x - n), (n-1)2^{-k} \leq x \leq n2^{-k}, n = 1, \dots 2^k$,
$c_{n,k} = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k}, \sum_{n,k} = \sum_k \frac{1}{k^2}$

Base de Haar, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k(x)$, R_k funcions de Rademacher.

Interpretació probabilista de f que permeti de calcular $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ d'una altra forma?

Un problema

Fórmula de Bessel general: $\{h_i(x)\}$ és un sistema ortonormal en un interval I,

$$\int_I h_i(x)h_j(x)\,dx = \delta_{i,j} \to \int_I |\sum_i c_i h_i(x)|^2\,dx = \sum_i c_i^2$$

Sistemes ortonormals on sumar $f(x) = \sum_i \frac{1}{i} h_i(x)$?

Bases d'ondetes:
$h_{n,k}(x) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^k x - n), (n-1)2^{-k} \leq x \leq n2^{-k}, n = 1, \ldots 2^k$,
$c_{n,k} = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k}, \sum_{n,k} = \sum_k \frac{1}{k^2}$

Base de Haar, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k(x)$, R_k funcions de Rademacher.

Interpretació probabilista de f que permeti de calcular $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ d'una altra forma?

Un problema

Fórmula de Bessel general: $\{h_i(x)\}$ és un sistema ortonormal en un interval I,

$$\int_I h_i(x)h_j(x)\,dx = \delta_{i,j} \to \int_I |\sum_i c_i h_i(x)|^2\,dx = \sum_i c_i^2$$

Sistemes ortonormals on sumar $f(x) = \sum_i \frac{1}{i} h_i(x)$?

Bases d'ondetes:
$h_{n,k}(x) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^k x - n), (n-1)2^{-k} \leq x \leq n2^{-k}, n = 1, \ldots 2^k,$
$c_{n,k} = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k}, \sum_{n,k} = \sum_k \frac{1}{k^2}$

Base de Haar, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k(x)$, R_k funcions de Rademacher.

Interpretació probabilista de f que permeti de calcular $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ d'una altra forma?

Un problema

Fórmula de Bessel general: $\{h_i(x)\}$ és un sistema ortonormal en un interval I,

$$\int_I h_i(x)h_j(x)\,dx = \delta_{i,j} \to \int_I |\sum_i c_i h_i(x)|^2\,dx = \sum_i c_i^2$$

Sistemes ortonormals on sumar $f(x) = \sum_i \frac{1}{i} h_i(x)$?

Bases d'ondetes:
$h_{n,k}(x) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^k x - n), (n-1)2^{-k} \le x \le n2^{-k}, n = 1, \ldots 2^k$,
$c_{n,k} = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k}, \sum_{n,k} = \sum_k \frac{1}{k^2}$

Base de Haar, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k(x)$, R_k funcions de Rademacher.

Interpretació probabilista de f que permeti de calcular $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ d'una altra forma?

Una prova elemental d'Antonio Córdoba

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx\right) \left(\int_0^1 y^{2k}\, dy\right)$

$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 y^2)^k \, dx\, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy =$

$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy$

Canvi de variable $x = \tanh(u), y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\, dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb $s = u - v, t = u + v$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

perquè $(x = e^s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Una prova elemental d'Antonio Córdoba

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx \right) \left(\int_0^1 y^{2k}\, dy \right)$

$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 y^2)^k \, dx\, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy =$

$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy$

Canvi de variable $x = \tanh(u), y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\, dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb $s = u - v, t = u + v$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

perquè $(x = e^s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Una prova elemental d'Antonio Córdoba

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx\right) \left(\int_0^1 y^{2k}\, dy\right)$

$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2y^2)^k \, dx\, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} \, dx\, dy =$

$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2} \, dx\, dy$

Canvi de variable $x = \tanh(u)$, $y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\, dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb $s = u - v$, $t = u + v$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

perquè $(x = e^s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Una prova elemental d'Antonio Córdoba

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx\right)\left(\int_0^1 y^{2k}\, dy\right)$

$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2y^2)^k \, dx\, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy =$

$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy$

Canvi de variable $x = \tanh(u), y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\, dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb $s = u - v, t = u + v$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

perquè $(x = e^s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Una prova elemental d'Antonio Córdoba

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx \right) \left(\int_0^1 y^{2k}\, dy \right)$

$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2y^2)^k \, dx\, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy =$

$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\, dx\, dy$

Canvi de variable $x = \tanh(u), y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\, dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb $s = u - v, t = u + v$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

perquè $(x = e^s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.
Raó: si

$\alpha = \frac{P}{Q}, (p,q) = (P,Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$

Exemple:

$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ és racional o no.

Ni $e + \pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

Sobre nombres irracionals

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.

Raó: si

$\alpha = \frac{P}{Q}, (p,q) = (P,Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$

Exemple:

$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ és racional o no.

Ni $e + \pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

Sobre nombres irracionals

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.
Raó: si

$$\alpha = \frac{P}{Q}, (p,q) = (P,Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$$

Exemple:

$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ és racional o no.

Ni $e + \pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.
Raó: si

$\alpha = \frac{P}{Q}, (p, q) = (P, Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$

Exemple:

$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ és racional o no.

Ni $e + \pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

Sobre nombres irracionals

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.
Raó: si

$\alpha = \frac{P}{Q}, (p,q) = (P,Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$

Exemple:

$$|e-(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}| = |e-\frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ és racional o no.

Ni $e+\pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

Sobre nombres irracionals

Cóm saber si α és irracional?

Estratègia: trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$.
Raó: si

$\alpha = \frac{P}{Q}, (p,q) = (P,Q) = 1, |\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP-Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ}, q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}$

Exemple:

$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

No es coneix si el nombre d'Euler $\gamma = \lim_n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ és racional o no.

Ni $e + \pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 1$

La irracionalitat de $\zeta(3)$, una prova recent amb mètodes d'Euler

R. Apery provà el 1978 la irracionalitat de $\zeta(3)$. Prova simplificada (F.Beukers-A.Cordoba): partim de

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log st}{1-st}\,ds\,dt$$

P_n un polinomi amb coeficients enters de grau $\leq n$ en s, t $\rightarrow$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(s,t)\log st}{1-st}\,ds\,dt = A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}$$

amb A_n, B_n, C_n enters i C_n que divideix $[m.c.m.(1,2,...,n)]^3$ Tria $P_n(s,t) = P_n(s)P_n(t)$, amb $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[s^n(1-s)^n]$ (Legendre) produeix

$$|A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}| \leq C(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

La irracionalitat de $\zeta(3)$, una prova recent amb mètodes d'Euler

R. Apery provà el 1978 la irracionalitat de $\zeta(3)$. Prova simplificada (F.Beukers-A.Cordoba): partim de

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log st}{1-st}\,ds\,dt$$

P_n un polinomi amb coeficients enters de grau $\leq n$ en $s,t \rightarrow$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(s,t)\log st}{1-st}\,ds\,dt = A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}$$

amb A_n, B_n, C_n enters i C_n que divideix $[m.c.m.(1,2,...,n)]^3$ Tria $P_n(s,t) = P_n(s)P_n(t)$, amb $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[s^n(1-s)^n]$ (Legendre) produeix

$$|A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}| \leq C(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

La irracionalitat de $\zeta(3)$, una prova recent amb mètodes d'Euler

R. Apery provà el 1978 la irracionalitat de $\zeta(3)$. Prova simplificada (F.Beukers-A.Cordoba): partim de

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log st}{1-st}\,ds\,dt$$

P_n un polinomi amb coeficients enters de grau $\leq n$ en $s, t \rightarrow$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(s,t)\log st}{1-st}\,ds\,dt = A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}$$

amb A_n, B_n, C_n enters i C_n que divideix $[m.c.m.(1,2,...,n)]^3$ Tria $P_n(s,t) = P_n(s)P_n(t)$, amb $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[s^n(1-s)^n]$ (Legendre) produeix

$$|A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}| \leq C(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

La irracionalitat de $\zeta(3)$, una prova recent amb mètodes d'Euler

R. Apery provà el 1978 la irracionalitat de $\zeta(3)$. Prova simplificada (F.Beukers-A.Cordoba): partim de

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log st}{1-st}\, ds\, dt$$

P_n un polinomi amb coeficients enters de grau $\leq n$ en $s, t \to$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(s,t)\log st}{1-st}\, ds\, dt = A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}$$

amb A_n, B_n, C_n enters i C_n que divideix $[m.c.m.(1,2,...,n)]^3$ Tria $P_n(s,t) = P_n(s)P_n(t)$, amb $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[s^n(1-s)^n]$ (Legendre) produeix

$$|A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}| \leq C(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

$$d_n = m.c.m.[1, 2, \dots, n] = \leq \prod_{p \leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = \prod_{p \leq n} e^{\log n} =$$

$$n^{\pi(n)} \leq \quad \text{teorema dels nombres primers} \leq n^{\frac{n(1+\varepsilon)}{\log n}} = e^{n(1+\varepsilon)}$$

Per tant $C_n \leq e^{3n(1+\varepsilon)}$

$$C_n A_n |\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n A_n}| \leq C e^{3n(1+\varepsilon)} (\sqrt{2} - 1)^{4n} =$$

$$C[e^{3(1+\varepsilon)} (\sqrt{2} - 1)^4]^n = C\lambda^n, \lambda < 1$$

$$d_n = m.c.m.[1,2,\ldots,n] =\leq \prod_{p\leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = \prod_{p\leq n} e^{\log n} =$$

$$n^{\pi(n)} \leq \quad \text{teorema dels nombres primers} \leq n^{\frac{n(1+\varepsilon)}{\log n}} = e^{n(1+\varepsilon)}$$

Per tant $C_n \leq e^{3n(1+\varepsilon)}$

$$C_n A_n |\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n A_n}| \leq C e^{3n(1+\varepsilon)}(\sqrt{2}-1)^{4n} =$$

$$C[e^{3(1+\varepsilon)}(\sqrt{2}-1)^4]^n = C\lambda^n, \lambda < 1$$

L'equació funcional de ζ a l'Euler

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = A_k(2\pi)^{2k}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \Phi(s)$$

$$\Phi(2) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = (1 - \frac{1}{2})A_1\pi^2$$

$$\Phi(4) = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \cdots = (1 - \frac{1}{2^3})A_2\pi^4$$

$$\Phi(6) = \frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots == (1 - \frac{1}{2^5})A_3\pi^6$$

Aplica $x\frac{d}{dx}$ a la sèrie geomètrica

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \cdots = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

L'equació funcional de ζ a l'Euler

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = A_k(2\pi)^{2k}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \Phi(s)$$

$$\Phi(2) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = (1-\frac{1}{2})A_1\pi^2$$

$$\Phi(4) = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \cdots = (1-\frac{1}{2^3})A_2\pi^4$$

$$\Phi(6) = \frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots == (1-\frac{1}{2^5})A_3\pi^6$$

Aplica $x\frac{d}{dx}$ a la sèrie geomètrica

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \cdots = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

Fent $x = 1$:

$$\Phi(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4} = 1\,\frac{2^2 - 1}{2} A_1$$

$$\Phi(-2) = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0$$

$$\Phi(-3) = 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{2}{16} = -1 \times 2 \times 3 \times \frac{2^4 - 1}{2^3} A_2$$

Observa que $\Phi(1-n) = \Phi(n) = -\frac{(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n} \cos(\frac{n}{2}\pi)$
s per n, $(n-1)!$ per $\Gamma(n)$.
Conjectura:

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2} \zeta(s)$$

Equació funcional (çette conjecture paroîtra sans doute fort hardie")

Fent $x = 1$:

$$\Phi(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4} = 1\frac{2^2-1}{2}A_1$$

$$\Phi(-2) = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0$$

$$\Phi(-3) = 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{2}{16} = -1 \times 2 \times 3 \times \frac{2^4-1}{2^3}A_2$$

Observa que $\Phi(1-n) = \Phi(n) = -\frac{(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n}\cos(\frac{n}{2}\pi)$
s per n, $(n-1)!$ per $\Gamma(n)$.
Conjectura:

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s}2^{1-s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s)$$

Equació funcional (çette conjecture paroîtra sans doute fort hardie")

Fent $x = 1$:

$$\Phi(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4} = 1\,\frac{2^2 - 1}{2} A_1$$

$$\Phi(-2) = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0$$

$$\Phi(-3) = 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{2}{16} = -1 \times 2 \times 3 \times \frac{2^4 - 1}{2^3} A_2$$

Observa que $\Phi(1-n) = \Phi(n) = -\frac{(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n} \cos(\frac{n}{2}\pi)$
s per n, $(n-1)!$ per $\Gamma(n)$.
Conjectura:

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos\frac{s\pi}{2} \zeta(s)$$

Equació funcional (çette conjecture paroîtra sans doute fort hardie")

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1$$

Equació funcional $\to \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials"en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$.

$\zeta(z) \neq 0, \Re z = 1 \to$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x) =$ número de p primers $p \leq x$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\to$ control de $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$.

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1$$

Equació funcional $\rightarrow \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials"en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$.

$\zeta(z) \neq 0, \Re z = 1 \rightarrow$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x) =$ número de p primers $p \leq x$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\rightarrow$ control de $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$.

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1$$

Equació funcional $\rightarrow \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials"en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$.

$\zeta(z) \neq 0, \Re z = 1 \rightarrow$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x) =$ número de p primers $p \leq x$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\rightarrow$ control de $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$.

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}, \Re s>1$$

Equació funcional $\rightarrow \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z=1$, i zeros "trivials"en $z=-2k, k\in\mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0<\Re z<1$, simètrics respecte $\Re z=\frac{1}{2}, \Im z=0$.

$\zeta(z)\neq 0, \Re z=1\rightarrow$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x)=$ número de p primers $p\leq x$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\rightarrow$ control de $\pi(x)-\frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z=\frac{1}{2}$.

L'equació ζ de Riemann. La hipòtesi de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1$$

Equació funcional $\rightarrow \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials"en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$.

$\zeta(z) \neq 0, \Re z = 1 \rightarrow$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x) =$ número de p primers $p \leq x$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\rightarrow$ control de $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$.

L'equació ζ de Riemann. La hipòtesi de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1$$

Equació funcional $\rightarrow \zeta$ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials"en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$.

$\zeta(z) \neq 0, \Re z = 1 \rightarrow$ Teorema dels nombres primers: si $\pi(x) =$ número de p primers $p \leq x$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica $\rightarrow$ control de $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$

Hipòtesi de Riemann (HR): tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$.

Cap a una reformulació de HR. La transformació de Fourier i de Mellin

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx, \hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{ix\xi}\, dx, \text{q.p.t.}\xi$$

$f \to \hat{f}$ isometria de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \|\hat{f}\|_2^2$

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle, e_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}$$

Fórmula d'inversió:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi, f = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi\, d\xi,$$

e_ξ "frame continu"de $L^2(\mathbb{R})$

Cap a una reformulació de HR. La transformació de Fourier i de Mellin

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx, \hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{ix\xi}\, dx, \text{q.p.t.}\xi$$

$f \to \hat{f}$ isometria de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \|\hat{f}\|_2^2$

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle, e_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}$$

Fórmula d'inversió:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi, f = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi\, d\xi,$$

e_ξ "frame continu"de $L^2(\mathbb{R})$

Cap a una reformulació de HR. La transformació de Fourier i de Mellin

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx, \hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{ix\xi}\, dx, \text{q.p.t.}\xi$$

$f \to \hat{f}$ isometria de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \|\hat{f}\|_2^2$

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle, e_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}$$

Fórmula d'inversió:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi, f = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi\, d\xi,$$

e_ξ "frame continu"de $L^2(\mathbb{R})$

Teoremes tauberians de Wiener

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R})$: $E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\rightarrow$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Teoremes tauberians de Wiener

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R}) : E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\rightarrow$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Teoremes tauberians de Wiener

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R}) : E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\rightarrow$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Teoremes tauberians de Wiener

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R})$: $E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\to$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R})$: $E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\rightarrow$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Teoremes tauberians de Wiener

Operador T acotats en $L^2(\mathbb{R})$ ($\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), invariant per translacions IT (si $\tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$, $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$) diagonalitza:

$$(Tf)\hat{}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), |M(\xi)| \leq C$$

T operador acotat IT $\sim$ M multiplicador funció acotada

Subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions (IT) $\sim$ operadors T IT, $T^2 = T$ $\sim$ multiplicadors M amb $M^2 = M$

Expressió general d'un subespai tancat IT de $L^2(\mathbb{R}) : E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t.} \xi \in S\}$

Teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$: subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ IT dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero$\rightarrow$ $\tau_\lambda f$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ

Teorema tauberià de Wiener en $L^1(\mathbb{R})$: $\tau_\lambda f$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ

Versions multiplicatives

$f \in L^p(\mathbb{R}), g(t) = f(\log t), t > 0, \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$

$g \in L^p((0,+\infty), \frac{dt}{t}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \frac{dt}{t}$

$h \in L^p(0,\infty), g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t), M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p}+i\xi-1} \, dt$

$Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{s-1} \, dt$

Transformada de Mellin; en $L^1(0,\infty)$ definida en $\Re s = 1$; en $L^2(0,\infty)$ definida en $\Re s = \frac{1}{2}$.

Diagonalitza els operadors en $L^p(0,\infty)$ invariants per dilatacions: $D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0$

Versions multiplicatives

$f \in L^p(\mathbb{R}), g(t) = f(\log t), t > 0, \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$

$g \in L^p((0,+\infty), \frac{dt}{t}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \, \frac{dt}{t}$

$h \in L^p(0,\infty), g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t), M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p}+i\xi-1} \, dt$

$Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{s-1} \, dt$

Transformada de Mellin; en $L^1(0,\infty)$ definida en $\Re s = 1$; en $L^2(0,\infty)$ definida en $\Re s = \frac{1}{2}$.

Diagonalitza els operadors en $L^p(0,\infty)$ invariants per dilatacions: $D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0$

Versions multiplicatives

$f \in L^p(\mathbb{R}), g(t) = f(\log t), t > 0, \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$

$g \in L^p((0, +\infty), \frac{dt}{t}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \, \frac{dt}{t}$

$h \in L^p(0, \infty), g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t), M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p} + i\xi - 1} \, dt$

$Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{s-1} \, dt$

Transformada de Mellin; en $L^1(0, \infty)$ definida en $\Re s = 1$; en $L^2(0, \infty)$ definida en $\Re s = \frac{1}{2}$.

Diagonalitza els operadors en $L^p(0, \infty)$ invariants per dilatacions: $D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0$

Versions multiplicatives

$f \in L^p(\mathbb{R}), g(t) = f(\log t), t > 0, \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$

$g \in L^p((0, +\infty), \frac{dt}{t}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \, \frac{dt}{t}$

$h \in L^p(0, \infty), g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t), M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p} + i\xi - 1} \, dt$

$Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{s-1} \, dt$

Transformada de Mellin; en $L^1(0, \infty)$ definida en $\Re s = 1$; en $L^2(0, \infty)$ definida en $\Re s = \frac{1}{2}$.

Diagonalitza els operadors en $L^p(0, \infty)$ invariants per dilatacions: $D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0$

Versions multiplicatives

$f \in L^p(\mathbb{R}), g(t) = f(\log t), t > 0, \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$

$g \in L^p((0, +\infty), \frac{dt}{t}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \, \frac{dt}{t}$

$h \in L^p(0, \infty), g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t), M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p}+i\xi-1} \, dt$

$Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{s-1} \, dt$

Transformada de Mellin; en $L^1(0, \infty)$ definida en $\Re s = 1$; en $L^2(0, \infty)$ definida en $\Re s = \frac{1}{2}$.

Diagonalitza els operadors en $L^p(0, \infty)$ invariants per dilatacions: $D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0$

Teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^1: subespai E de $L^1(0,\infty)$ ID ($D_\alpha E = E$) dens en $L^1(0,+\infty)$ si i només si

$$\{\xi, Mh(1+i\xi)=0, h\in E\}=\emptyset.$$

Les dilatades $D_\alpha h, \alpha>0$ generen topològicament $L^1(0,+\infty)$ si i només si $Mh(1+i\xi)\neq 0$

Expressió general dels subespais tancats ID de $L^2(0,+\infty)$:

$$E_S=\{h\in L^p(0,+\infty): Mh(s)=0 s\in S\subset \frac{1}{2}+i\mathbb{R}\}$$

Teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^2: un subespai E de $L^2(0,\infty)$ ID dens en $L^2(0,+\infty)$ si i només si

$$\{s=\frac{1}{2}+i\xi, Mh(s)=0, h\in E\}$$

té mesura zero. Les dilatades $D_\alpha h, \alpha\in\mathbb{R}$ generen topologicament $L^2(0,+\infty)$ si i només si $Mh(s)\neq 0$ q.p.t. $s, \Re s=\frac{1}{2}$

Teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^1: subespai E de $L^1(0, \infty)$ ID ($D_\alpha E = E$) dens en $L^1(0, +\infty)$ si i només si

$$\{\xi, Mh(1 + i\xi) = 0, h \in E\} = \emptyset.$$

Les dilatades $D_\alpha h, \alpha > 0$ generen topològicament $L^1(0, +\infty)$ si i només si $Mh(1 + i\xi) \neq 0$

Expressió general dels subespais tancats ID de $L^2(0, +\infty)$:

$$E_S = \{h \in L^p(0, +\infty) : Mh(s) = 0 s \in S \subset \frac{1}{2} + i\mathbb{R}\}$$

Teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^2: un subespai E de $L^2(0, \infty)$ ID dens en $L^2(0, +\infty)$ si i només si

$$\{s = \frac{1}{2} + i\xi, Mh(s) = 0, h \in E\}$$

té mesura zero. Les dilatades $D_\alpha h, \alpha \in \mathbb{R}$ generen topologicament $L^2(0, +\infty)$ si i només si $Mh(s) \neq 0$ q.p.t. $s, \Re s = \frac{1}{2}$

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2 \, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a \tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t) \, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b} \, da \, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int \int |Wf(a,b)|^2 \, da \, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2\, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a\tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b}\, da\, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int\int |Wf(a,b)|^2\, da\, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2 \, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a \tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b} \, da \, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int \int |Wf(a,b)|^2 \, da \, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2 \, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a \tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R})$, $Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b} \, da \, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int \int |Wf(a,b)|^2 \, da \, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2\, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a\tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b}\, da\, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int\int |Wf(a,b)|^2\, da\, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2 \, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a\tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b} \, da \, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int \int |Wf(a,b)|^2 \, da \, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Dilatades i traslladades. Ondetes

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\Psi\|_2^2 = \int |\Psi(t)|^2\, dt = 1$

$$\Psi_{a,b}(t) = (D_a \tau_b)(t) = \sqrt{a}\Psi(a(t-b)), \|\Psi_{a,b}\|_2 = 1$$

Anàlisi amb ondetes:
$f \in L^2(\mathbb{R}), Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,b}(t)\, dt$

Síntesi amb ondetes: $f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a,b)\Psi_{a,b}\, da\, db$

Parseval-Pitàgores: $\|f\|_2^2 = \int \int |Wf(a,b)|^2\, da\, db$

Discretitzacions $\Rightarrow$ bases ortonormals d'ondetes

Res d'això és possible només amb translacions o només amb dilatacions $\Rightarrow$ generadors per translacions o generadors per dilatacions

Una formulació de Salem

$$\int_0^\infty \frac{t^{\sigma+i\xi}-1}{e^t+1}\,dt = \Gamma(s)(1-2^{1-s})\zeta(s), s=\sigma+i\xi, 0<\sigma<1$$

Theorem

La no anulació de ζ en $\Re s=\sigma$ equival al fet que les funcions $D_\alpha k, k(t)=\frac{t^{\sigma-1}}{e^t+1}$, generen $L^1(0,+\infty)$

Una formulació de Salem

$$\int_0^\infty \frac{t^{\sigma+i\xi}-1}{e^t+1}\,dt = \Gamma(s)(1-2^{1-s})\zeta(s), s=\sigma+i\xi, 0<\sigma<1$$

Theorem

La no anulació de ζ en $\Re s = \sigma$ equival al fet que les funcions $D_\alpha k, k(t) = \frac{t^{\sigma-1}}{e^t+1}$, generen $L^1(0,+\infty)$

$\rho(t) = t - [t]$, part fraccionària de t

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{1}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$$

Sigui E el subespai generat per $\rho_\theta(t) = \rho(\frac{\theta}{t}) - \theta\rho(\frac{1}{t}), 0 < \theta, t < 1$.

$$E = \{h(t) = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t}), \sum_k c_k\theta_k = 0, 0 < \theta_k \leq 1\}$$

Theorem

(Beurling-Nyman-Baez) Són equivalents, $1 \leq p \leq 2$:

1. *La funció ζ no té zeros en $\Re s > \frac{1}{p}$*
2. *L'espai E és dens en $L^p(0,1)$*
3. *La funció $\mathbf{1}$ característica de $[0,1]$ és aproximable*
4. $\mathbf{1} = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t})$ *en* $L^p(0,\infty)$
5. *Hom pot utilitzar tan sols $\theta_k = \frac{1}{k}$ en els enunciats anteriors*

$\rho(t) = t - [t]$, part fraccionària de t

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{1}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$$

Sigui E el subespai generat per $\rho_\theta(t) = \rho(\frac{\theta}{t}) - \theta\rho(\frac{1}{t}), 0 < \theta, t < 1$.

$$E = \{h(t) = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t}), \sum_k c_k\theta_k = 0, 0 < \theta_k \leq 1\}$$

Theorem

(Beurling-Nyman-Baez) Són equivalents, $1 \leq p \leq 2$:

1. *La funció ζ no té zeros en $\Re s > \frac{1}{p}$*
2. *L'espai E és dens en $L^p(0,1)$*
3. *La funció $\mathbf{1}$ característica de $[0,1]$ és aproximable*
4. $\mathbf{1} = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t})$ *en* $L^p(0,\infty)$
5. *Hom pot utilitzar tan sols $\theta_k = \frac{1}{k}$ en els enunciats anteriors*

$\rho(t) = t - [t]$, part fraccionària de t

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{1}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$$

Sigui E el subespai generat per $\rho_\theta(t) = \rho(\frac{\theta}{t}) - \theta\rho(\frac{1}{t}), 0 < \theta, t < 1$.

$$E = \{h(t) = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t}), \sum_k c_k \theta_k = 0, 0 < \theta_k \leq 1\}$$

Theorem

(Beurling-Nyman-Baez) Són equivalents, $1 \leq p \leq 2$:

1. *La funció ζ no té zeros en $\Re s > \frac{1}{p}$*
2. *L'espai E és dens en $L^p(0,1)$*
3. *La funció $\mathbf{1}$ característica de $[0,1]$ és aproximable*
4. $\mathbf{1} = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t})$ *en $L^p(0,\infty)$*
5. *Hom pot utilitzar tan sols $\theta_k = \frac{1}{k}$ en els enunciats anteriors*

L'aproximació de A. Beurling a la hipòtesi de Riemann

$\rho(t) = t - [t]$, part fraccionària de t

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{1}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$$

Sigui E el subespai generat per $\rho_\theta(t) = \rho(\frac{\theta}{t}) - \theta\rho(\frac{1}{t}), 0 < \theta, t < 1$.

$$E = \{h(t) = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t}), \sum_k c_k \theta_k = 0, 0 < \theta_k \leq 1\}$$

Theorem

(Beurling-Nyman-Baez) Són equivalents, $1 \leq p \leq 2$*:*

1. *La funció* ζ *no té zeros en* $\Re s > \frac{1}{p}$
2. *L'espai* E *és dens en* $L^p(0,1)$
3. *La funció* $\mathbf{1}$ *característica de* $[0,1]$ *és aproximable*
4. $\mathbf{1} = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t})$ *en* $L^p(0,\infty)$
5. *Hom pot utilitzar tan sols* $\theta_k = \frac{1}{k}$ *en els enunciats anteriors*

Explicació de la relació

Pel teorema tauberià de Wiener, les $\sum c_\theta \rho(\frac{\theta}{t}), \theta > 0$, generen $L^2(0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{\theta}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s \zeta(s)}{s}$$

$$\int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt = -\frac{\zeta(s) \sum_k c_k \theta_k^s}{s}, 1 - \zeta(s) \sum_k c_k \theta_k^s = s \int_0^1 (1 + h(t)) t^{s-1}\, dt$$

Desigüaltat de Holder: $\varepsilon > \|1 + h\|_p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|1 - \zeta(s) \sum_k c_k \theta_k^s|^q < \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q(\Re s - \frac{1}{p})}$$

$$\zeta(s) \neq 0, \Re s > \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q}$$

Pel teorema tauberià de Wiener, les $\sum c_\theta \rho(\frac{\theta}{t}), \theta > 0$, generen $L^2(0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{\theta}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s \zeta(s)}{s}$$

$$\int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt = -\frac{\zeta(s)\sum_k c_k \theta_k^s}{s}, 1 - \zeta(s) \sum_k c_k \theta_k^s = s \int_0^1 (1+h(t)) t^{s-1}\, dt$$

Desigüaltat de Holder: $\varepsilon > \|1 + h\|_p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|1 - \zeta(s) \sum_k c_k \theta_k^s|^q < \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q(\Re s - \frac{1}{p})}$$

$$\zeta(s) \neq 0, \Re s > \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q}$$

Explicació de la relació

Pel teorema tauberià de Wiener, les $\sum c_\theta \rho(\frac{\theta}{t}), \theta > 0$, generen $L^2(0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{\theta}{t}) t^{s-1}\, dt = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s \zeta(s)}{s}$$

$$\int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt = -\frac{\zeta(s)\sum_k c_k \theta_k^s}{s}, 1 - \zeta(s)\sum_k c_k \theta_k^s = s\int_0^1 (1+h(t))t^{s-1}\, dt$$

Desigüaltat de Holder: $\varepsilon > \|1+h\|_p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|1 - \zeta(s)\sum_k c_k \theta_k^s|^q < \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q(\Re s - \frac{1}{p})}$$

$$\zeta(s) \neq 0, \Re s > \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon^q |s|^q}{q}$$

Una "prova"de la hipòtesi de Riemann

$\sum_k c_k \theta_k^s$ quasi-invers de ζ si $h+1$ és petit.

$$\prod_p (1-\frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s)$$

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1-\frac{1}{p^s}) = \sum_k \mu(k)(\frac{1}{k})^s$$

on $\mu(k)$ és la funció de Möebius $=(-1)^m$ si k és producte de m primers diferents, $=0$ si m té divisors quadrats $c_k = \mu(k), \theta_k = \frac{1}{k}$. Però efectivament

$$h(t) = \sum_{k\geq 1} \mu(k)\rho(\frac{1}{kt}) = -1, 0 < t < 1$$

Conseqüència de $\sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} = 0, \sum_{k\geq 1} \mu(k)\left[\frac{y}{k}\right] = 1, y > 1$ (fórmula d'inversió de Möebius).

Però només puntualment!. **Si la convergència fós en $L^2(0,1)$, la hipòtesi de Riemann estaria provada.**

Una "prova"de la hipòtesi de Riemann

$\sum_k c_k \theta_k^s$ quasi-invers de ζ si $h+1$ és petit.

$$\prod_p (1-\frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s)$$

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1-\frac{1}{p^s}) = \sum_k \mu(k)(\frac{1}{k})^s$$

on $\mu(k)$ és la funció de Möebius $= (-1)^m$ si k és producte de m primers diferents, $= 0$ si m té divisors quadrats $c_k = \mu(k), \theta_k = \frac{1}{k}$.
Però efectivament

$$h(t) = \sum_{k\geq 1} \mu(k)\rho(\frac{1}{kt}) = -1, 0 < t < 1$$

Conseqüència de $\sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} = 0, \sum_{k\geq 1} \mu(k) \left[\frac{y}{k}\right] = 1, y > 1$ (fórmula d'inversió de Möebius).
Però només puntualment!. **Si la convergència fós en $L^2(0,1)$, la hipòtesi de Riemann estaria provada.**

Una "prova"de la hipòtesi de Riemann

$\sum_k c_k \theta_k^s$ quasi-invers de ζ si $h+1$ és petit.

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s)$$

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s}) = \sum_k \mu(k)(\frac{1}{k})^s$$

on $\mu(k)$ és la funció de Möebius $= (-1)^m$ si k és producte de m primers diferents, $= 0$ si m té divisors quadrats $c_k = \mu(k), \theta_k = \frac{1}{k}$.
Però efectivament

$$h(t) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \rho(\frac{1}{kt}) = -1, 0 < t < 1$$

Conseqüència de $\sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} = 0, \sum_{k \geq 1} \mu(k) \left[\frac{y}{k}\right] = 1, y > 1$ (fórmula d'inversió de Möebius).
Però només puntualment!. **Si la convergència fós en $L^2(0,1)$, la hipòtesi de Riemann estaria provada.**

Una "prova"de la hipòtesi de Riemann

$\sum_k c_k \theta_k^s$ quasi-invers de ζ si $h+1$ és petit.

$$\prod_p (1-\frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s)$$

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1-\frac{1}{p^s}) = \sum_k \mu(k)(\frac{1}{k})^s$$

on $\mu(k)$ és la funció de Möebius $=(-1)^m$ si k és producte de m primers diferents, $=0$ si m té divisors quadrats $c_k = \mu(k), \theta_k = \frac{1}{k}$.
Però efectivament

$$h(t) = \sum_{k\geq 1} \mu(k)\rho(\frac{1}{kt}) = -1, 0 < t < 1$$

Conseqüència de $\sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} = 0, \sum_{k\geq 1} \mu(k)\left[\frac{y}{k}\right] = 1, y > 1$ (fórmula d'inversió de Möebius).
Però només puntualment!. **Si la convergència fós en $L^2(0,1)$, la hipòtesi de Riemann estaria provada.**

Convergència puntual vs convergència en L^2

Sèries de Fourier:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$$S_N f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{n>N} (a_n^2 + b_n^2) \to 0$

Carleson, duríssim: $S_N f(x) \to f(x) q.p.t.x$

Convergència puntual vs convergència en L^2

Sèries de Fourier:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$$S_N f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

$\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{n>N} (a_n^2 + b_n^2) \to 0$

Carleson, duríssim: $S_N f(x) \to f(x) q.p.t.x$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.
Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2 \, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z} \zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.

Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z} \zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t)t^{s-1}\,dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.

Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z}\zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t)t^{s-1}\,dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.

Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\,d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H\in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H\in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z}\zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t)t^{s-1}\, dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.

Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z}\zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t)t^{s-1}\, dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.

Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z} \zeta(z)$$

Idea de la prova

$D_\alpha \rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta} - \theta\rho_\alpha) \to E$ invariant per $D_\alpha, 0 < \alpha < 1$

$h \in L^2(0,1) \to Mh(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t) t^{s-1}\, dt$ holomorfa en $\Re s > \frac{1}{2}$.
Espai de Hardy $H^2(B)$ de H holomorfes en $B = \{\Re s > \frac{1}{2}\}$ tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2 \, d\xi < +\infty$$

Cada H està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re s = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re s = \frac{1}{2}$; $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament.

Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z = \emptyset, \mu_H = 0$ (H funció externa).

Descripció dels subespais E densos en $L^2(0,1)$ invariants per les dilatacions $D_\alpha, \alpha < 1 : \cap_{H \in E} Z(H) = \emptyset, \inf_{H \in I} \mu_H(I) = 0, I \subset \mathbb{R}$.

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z} \zeta(z)$$

MOLTES GRÀCIES