LES EQUACIONS D'EULER DELS FLUIDS NO VISCOSOS

JOAN SOLÀ-MORALES

La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouïr nos lumières, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera les raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité. (L. Euler)

Resum. El sistema d'equacions en derivades parcials que modela el flux d'un fluid no viscós, un líquid o un gas, publicat el 1756, va ser una de les descobertes més transcendentals de L. Euler. El plantejament d'aquestes equacions representa un important moment de trobada entre la matemàtica, l'enginyeria i la física, i, bàsicament, pot dir-se que en aquella ocasió per primera vegada a la història unes equacions en derivades parcials apareixen com un model indiscutible d'un fenomen físic.

En aquest escrit intentarem exposar alguns dels problemes matemàtics que aquestes equacions han generat al llarg dels seus doscents cinquanta anys d'existència, sense entrar en la investigació específica de la seva gènesi històrica. Les connexions dels problemes generats per aquestes equacions amb diverses branques de la matemàtica, com ara la Geometria i l'Anàlisi Matemàtica principalment, han estat molt grans i importants, i volem destacar que segueixen generant problemes rellevants de la recerca matemàtica actual.

També descriurem una mica com aquestes equacions són utilitzades en la modelització matemàtica, és a dir, com a partir d'elles s'obtenen equacions més senzilles, adaptades a la representació de fenòmens concrets. També és rellevant la relació d'aquestes equacions amb les equacions de Navier-Stokes, que potser són més conegudes o més importants avui en dia perquè inclouen els efectes viscosos. Tot i això, la comparació entre unes i altres equacions ens portaria al problema general de la comparació entre la mecànica conservativa i la dissipativa, que és un tema sobre el que també valdria la pena de reflexionar, potser en una altra ocasió.

Introducció

El tema d'aquest escrit és el de les Equacions d'Euler dels fluids no viscosos. És un tema que considero molt important, especialment dins del món de les Equacions Diferencials, que seria el meu particular micromón com a matemàtic, però que també és molt important dins del món en general de la Matemàtica, com intentaré demostrar, i també de l'Enginyeria i de la Física.

Las traducció de la frase de L. Euler amb la que he encapçalat aquest escrit podria ser mes o menys la següent: Aquesta generalitat que jo abraço, en lloc d'enlluernar els nostres pensaments, ens descobrirà més aviat les veritables lleis de la natura en tot el seu esclat i hom hi trobarà raons encara més fortes d'admirar-ne la bellesa i la simplicitat.

Voldria posar l'accent en què aquí no està parlant de la bellesa i la simplicitat de les matemàtiques, sinó de la bellesa i la simplicitat de les lleis de la naturalesa. Així ho diu amb prou claredat. No cal que defensi el paper de L. Euler com a creador de bellesa i simplicitat matemàtica, però sí que m'agradaria de posar de manifest aquest altre punt de vista, tampoc molt allunyat, però significativament diferent.

La Història, la Matemàtica, la Física i l'Enginyeria les podem imaginar com quatre regions que tenen diverses interseccions entre elles i també alguna intersecció entre totes quatre. La primera cosa que vull dir és que les Equacions d'Euler de la mecànica de fluids es troben en un lloc molt central d'aquesta intersecció entre les quatre regions i que aquest lloc tan central apareix també destacat per la presència que han mantingut aquestes equacions fins als nostres dies.

Per tant, aquest sistema d'equacions podria ser mirat des d'un punt de vista més especialment històric, més especialment físic o més especialment tecnològic. L'altra cosa que vull dir és que el meu punt de vista serà principalment matemàtic. Intentaré marcar la relació entre les Equacions d'Euler i alguns dels problemes que considero més centrals de la Matemàtica. No em sento molt capaç de fer una anàlisi històrica de d'aquestes equacions i les referències que faré a la Física i l'Enginyeria seran una mica laterals. El que voldria és reivindicar el paper d'aquestes equacions dins de la Matemàtica.

Dins del món de la Matemàtica també m'imagino tres grans regions, que són la de la Geometria, la de l'Anàlisi i la de la Modelització Matemàtica. Les equacions en derivades parcials en general, i en particular les Equacions d'Euler, intersecten aquestes tres regions de forma molt important. I la meva intenció és situar el sistema d'Equacions d'Euler dins d'aquestes tres interseccions. Deixo una mica de banda el tema de la Anàlisi Numèrica, que també estaria present en els tres casos. Però és un tema molt important, al qual seria interessant de poder-li dedicar una atenció més particularitzada.

Euler i les Equacions Diferencials

Abans d'entrar a parlar de les Equacions d'Euler de la Mecànica de Fluids, voldria parlar d'altres intervencions importants d'Euler en el món de les Equacions Diferencials. Són intervencions importants que es mantenen vives avui en dia. Coses que els professors i investigadors en Equacions Diferencials tenim sovints presents en la nostra docència i en la nostra recerca.

Les equacions d'Euler-Lagrange. Les equacions d'Euler-Lagrange es corresponen a allò que Euler en deia "problemes isoperimètrics en un sentit molt ampli", *latissimo sensu accepti.* El problema isoperimètric pròpiament dit consisteix en trobar, entre totes les corbes tancades del pla que tenen una longitud donada, aquella que abraça una àrea màxima, que com és ben sabut resulta ser la circumferència.

El problema isoperimètric és un problema en el que es tracta de minimitzar (o maximitzar) una quantitat que ja no depèn d'un nombre finit de variables, sinó una funció l'argument de la qual és també una funció, o en aquest cas una corba. Aquest argument ja no depèn d'un nombre finit de variables, sinó que varia en un espai de funcions de dimensió infinita. La quantitat que s'ha de minimitzar no rep el nom de *funció*, sinó que és coneguda com un *funcional.* Això representa un canvi molt gran del punt de vista d'Euler respecte dels que el van precedir.

Comencem per recordar un exemple especialment important, que és el problema de la minimització del funcional de Dirichlet, o integral de Dirichlet en un domini Ω, per exemple contingut en el pla (x, y):

Minimitzar

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_x^2 + u_y^2)dxdy$$

entre totes les funcions $u(x,y)$ definides a Ω tals que $u(x,y)$ coincideix amb una funció donada $\phi(x,y)$ quan (x,y) es troba a la frontera de Ω.

És un resultat ben conegut, obtingut per Dirichlet, però amb els mètodes deguts a L. Euler, que la funció que minimitza la integral de Dirichlet és la funció harmònica a Ω que a la frontera de Ω coincideix amb ϕ:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy}(= \Delta u) = 0 & \text{a } \Omega. \\ u(x,y) = \phi(x,y) & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

Això és el que s'anomena el *problema de Dirichlet*, que és un dels problemes que han resultat més rics i més suggerents de la matemàtica dels darrers cent-cinquanta anys. I cal remarcar que el sistema que dóna la solució són les equacions d'Euler, o d'Euler–Lagrange, del funcional $E[u]$.

Un altre exemple, també ben conegut, en aquest cas provenint de la mecànica de partícules, o la mecànica lagrangiana, és el que se'n diuen Equacions d'Euler–Lagrange corresponents a un determinat lagrangià.

Per recordar aquestes equacions, ens fixarem en un cas particular, que és el problema de les corbes geodèsiques. Quan la funció lagrangiana es redueix a l'energia cinètica, que és el cas en que no actuen forces exteriors, o, millor dit, que les úniques forces que actuen son les forces de lligadura que fan que la partícula es mantingui sobre la superfície, aleshores la trajectòria de la partícula haurà de coincidir amb una geodèsica.

Les geodèsiques d'una superfície són les corbes de longitud mínima entre totes les corbes d'aquesta superfície que passen per dos punts donats. També és un problema isoperimètric, *latissimo sensu*: Tenim una funció fixada en el seu contorn, en els seus extrems, i per dins la deixem variar fins a minimitzar una certa quantitat. Aquesta quantitat és la longitud $S[x(t)]$ (o també pot ser l'acció $A[x(t)]$, perquè dóna lloc a les mateixes solucions). Se n'escriuen les equacions d'Euler–Lagrange i es poden així obtenir les geodèsiques:

$$S[x(t)] = \int \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))}dt,$$

$$A[x(t)] = \int L(x(t), x'(t))dt = \int g_{x(t)}(x'(t), x'(t))dt.$$

(Aquí g és la mètrica de la superfície).

Les solucions d'aquest problema de miminització hauran de complir les corresponents Equacions d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial (x^k)'} = 0.$$

Ara vull recordar una petita cosa que tindrà importància més tard quan parli de fluids. Les geodèsiques en zones d'una superfície on la curvatura de Gauss és positiva tenen tendència a tallar-se entre elles, mentre que en les zones de curvatura negativa tenen tendència a allunyar-se les unes de les altres. Això es reconeix per exemple en les geodèsiques del tor de revolució, perquè les geodèsiques properes a l'equador exterior oscil·len al voltant d'aquest, mentre que les properes a l'equador interior se n'allunyen.

El Mètode de les Poligonals d'Euler. Una altra cosa molt coneguda és el Mètode de les Poligonals d'Euler per resoldre aproximadament o numèricament el problema de valor inicial per a equacions (o sistemes d'equacions) diferencials ordinàries. Es tracta de:

Trobar una funció $y(x)$ definida per $0 \leq x \leq \ell$ tal que compleixi

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) & \text{per } 0 < x < \ell \\ y(0) = y_0 & \text{(donat).} \end{cases}$$

En aplicar el Mètode d'Euler es divideix l'interval $(0, \ell)$ en N parts iguals d'amplada $h = \dfrac{\ell}{N}$, i es defineix $y_j \simeq y(jh)$ per

$$y_{n+1} = y_n + hf(nh, y_n)$$

per $n = 0, \cdots N - 1$.

Aquest mètode apareix per primera vegada a la obra *Institutionum Calculi Integralis*, de 1768. Ha de ser considerat un descobriment molt rellevant, base de tots els mètodes numèrics que després es van desenvolupar, especialment a partir de Runge, a finals del segle XIX, i que encara avui s'ensenya i s'analitza curosament en tots els cursos d'Anàlisi Numèrica.

Altres equacions diferencials degudes a Euler. Hem esmentat dues contribucions molt importants d'Euler sobre Equacions Diferencials. De manera resumida, podem llistar a continuació també les següents:

• Les Equacions d'Euler dels fluids no viscosos, a les quals dediquem les seccions posteriors, i que constitueixen la part principal d'aquest article.

• El problema de tres cossos i el problema restringit de tres cossos. La Mecànica Celeste és la font de molts temes d'equacions diferencials. Precisament va ser L. Euler el primer que va estudiar el problema restringit de tres cossos.

• L'*elàstica* d'Euler. És el següent problema no lineal amb condicions als extrems. Es tracta de trobar la funció $\theta(x)$ definida per $0 \leq x \leq \ell$ tal que

$$B\theta''(x) + R\sin(\theta(x)) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(\ell) = 0.$$

Si la variable x fos el temps, per comptes de ser una variable d'espai, aquesta seria l'equació de les oscil·lacions d'un pèndol. Però és una variable d'espai, i no és un problema de valor inicial sinó un problema de contorn. Es correspon amb el problema físic següent:

Tenim una barnilla encastada a terra, amb un pes en el seu extrem superior. Si el pes és petit, l'única solució d'equilibri és la vertical. Però quan el pes va creixent, van apareixent més solucions, de les quals només és estable la primera que es bifurca. Però després n'hi ha d'altres, se'n bifurquen d'altres, que són inestables. En aquest tema, Euler es va anticipar molts anys a la moderna teoria de la bifurcarció que més aviat atribuïm a Poincaré i al seu principi d'intercanvi d'estabilitats.

• Les equacions d'Euler del moviment d'un sòlid rígid, referides als seus eixos principals d'inèrcia:

$$\begin{cases} I_1 d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0, \\ I_2 d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0, \\ I_3 d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = 0. \end{cases}$$

• L'Equació de Cauchy-Euler (o equació equidimensional):

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

Les Equacions d'Euler dels fluids no viscosos

Euler va estar interessat durant molts períodes de la seva vida en temes de mecànica fluids, com quan va escriure la *Teoria del so i de la física de l'aire* (1727-1737). Després va tenir un fort compromís amb el disseny de vaixells i va escriure *Scientia Navalis* (1749) sobre la construcció de vaixells. Encara no necessitava una mecànica de fluids molt complexa.

Aquesta teoria la va necessitar per a elaborar la *Théorie plus complete des machines que son mises en mouvement par la réaction de l'eau* (1754), és a dir per les turbines. Les equacions d'Euler pròpiament dites apareixen per primera vegada aquí i molt més desenvolupades en els tractats de mecànica de fluids que van venir més tard: *Principes généraux du mouvement des fluides* (1755) i *Traité de mécanique des fluides* (1766).

Voldria destacar que l'aparició dels problemes de la mecànica de fluids en Euler ve clarament de motivacions aplicades, i fins i tot de l'enginyeria, com ara l'enginyeria naval i el disseny de turbines. Per una discussió més detallada d'aquestes qüestions em plau remetre al lector al treball [PERE84] de C. Perelló.

Les Equacions d'Euler. Escrivim ara les Equacions d'Euler pel cas incompressible i homogeni, en el que la densitat ρ és una constant:

$$\begin{cases} \vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p & \text{a } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 & \text{a } \Omega \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

Una incògnita és el camp de velocitats $\vec{v}$, que depèn de l'espai i el temps. És la formulació euleriana de la mecànica de fluids (o en general dels medis continus): no ens preocupem per les trajectòries concretes de les partícules, sinó que només volem conèixer el camp de velocitats en cada instant del temps. En un cert punt de l'espai volem saber quina és la velocitat de la partícula que en aquell moment passa per allà. En contraposició a les variables lagrangianes, que esmentarem després, aquí les variables independents són l'espai i el temps, no les partícules. L'altra incògnita és la pressió p, que també depèn de l'espai i del temps.

Hem escrit també una condició de contorn que correspon al cas en que les parets del recinte que conté al fluid estan immòbils.

En components cartesianes, amb $\vec{v} = (u, v, w)$, les equacions d'Euler, sense incloure la condició de contorn, tenen la forma següent:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x/\rho \\ v_y + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y/\rho \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z/\rho \\ u_x + v_y + w_z = 0. \end{cases}$$

El terme $\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ és la derivada material de la velocitat, que no és més que l'acceleració de les partícules referida a la posició. La primera equació és exactament la llei de Newton, atès que p és la pressió i $-\nabla p$ la força per unitat de volum. L'equació $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ens diu que el fluid és incompressible. Queden quatre incògnites: les components de la velocitat i la pressió. El model es correspon amb una determinada hipòtesi sobre quins són els esforços a l'interior del fluid, que és on intervé d'una manera molt important que el fluid no sigui viscós.

En les equacions de Navier–Stokes, que aquí no estan escrites, la primera equació conté un terme addicional que té a veure amb la viscositat i que és un múltiple de la laplaciana de $\vec{v}$. Si hom recorda l'equació del calor i el caràcter dissipatiu que té la laplaciana posada d'aquesta manera, les equacions de Navier–Stokes, en comparació a les d'Euler, produeixen una dissipació que està basada en que els esforços en un punt del fluid dificulten el moviment de les partícules contigües. També la condició de contorn seria diferent per a les equacions de Navier-Stokes: en el cas viscós les partícules de fluid que estan en contacte amb les parets han d'estar en repòs.

El cas compressible isentròpic és el cas més senzill dels dels fluids compressibles, però no el més realista en moltes situacions. En aquest cas hi ha una relació funcional entre la pressió i la densitat. És el cas típic per a gasos en condicions no extremes. Normalment la llei $p = P(\rho)$ té una forma concreta, com per exemple una potència de la densitat, $p = a\rho^\gamma$.

$$\begin{cases} (\rho\vec{v})_t + (\rho\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + (\nabla\cdot(\rho\vec{v}))\vec{v} = -\nabla p & \text{a } \Omega \\ \rho_t + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 & \text{a } \Omega \\ p = P(\rho),\ \ \rho \geq 0, & \\ \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

Com abans, la primera equació expressa el balanç de la quantitat de moviment. La segona és la conservació de la massa. La condició de contorn $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$, vàlida per a fluids compressibles i no compressibles, diu que les partícules es mouen de manera paral·lela a la paret.

Vigència actual. L'opinió que tenia el mateix L. Euler sobre aquest sistema d'equacions no pot ser mes clara, ja que va deixar escrit: *Per sublims que siguin les recerques sobre fluids que devem als senyors Bernoulli, Clairaut i d'Alembert, aquestes es segueixen naturalment de les meves dues fórmules generals, a les quals vaig ser portat immediatament pels primers axiomes de la mecànica.*

Aquesta opinió potser podria semblar una mica vanitosa, especialment si es treu del context, però penso que hem d'admetre que és completament correcta. Dos segles i mig més tard aquestes equacions es mantenen amb la mateixa forma. Naturalment s'hi poden afegir termes, com la gravetat, la força de Coriolis, es pot estar estudiant l'atmosfera o el mar, es pot estar estudiant el flux de petroli en una canyeria, o el que sigui, però els principis són els mateixos.

I una cosa molt important: aquestes equacions són no lineals en la seva naturalesa. Hi ha moltes equacions en derivades parcials, conegudes des de fa molt de temps, que corresponen a modelitzacions que són essencialment linealitzacions o aproximacions. Les equacions d'Euler han mantingut la seva vigència perquè són unes equacions completes. L'única cosa que es pot discutir és el paper de la viscositat en certs casos, però pel demés són unes equacions completes.

Com a prova de l'afirmació que les Equacions d'Euler són un problema matemàtic viu, vull presentar la realització de dos importants congressos internacionals sobre aquest tema, realitzats aquest mateix any, i tres llibres de gran nivell matemàtic que s'han publicat en els darrers quinze anys.

El primer congrés s'ha titulat *Euler Equations: 250 Years On*, i s'ha celebrat a Aussois (França) del 18 al 23 de juny del 2007. No vull reproduir aquí el nom dels membres del comitè científic organitzador, però qualsevol persona que conegui una mica aquest tema podrà confirmar que es tracta de científics de primera categoria mundial en el món de les equacions en derivades parcials i la mecànica de fluids. Sí que em permeto reproduir els títols de les seccions, que són els següents:

– L'origen de les equacions d'Euler en el context de la recerca en el segle XVIII.
– Capacitat de les solucions no regulars de les equacions d'Euler per descriure el comportament turbulent.
– Presència o no d'explosions en temps finit a partir de condicions inicials regulars per a les equacions d'Euler en 3 dimensions.
– Relació amb turbulència i amb nombres de Reynolds molt alts.
– Matèria fosca en cosmologia.
– Dinàmica de fluids de l'atmosfera.
– Les equacions d'Euler en l'aerodinàmica i disseny d'avions.

El que em sembla més notable de la lectura d'aquests títols és constatar, a més del caràcter interdisciplinari d'aquests temes (Matemàtica, Física, Enginyeria i Història de la Ciència), és també la seva vigència i el seu interès industrial.

Un segon congrés s'ha celebrat a Sant Petersburg (Rússia), ciutat molt vinculada a la biografia de L. Euler. I s'ha celebrat precisament a l'*Euler International Mathematical Institute.* El títol del congrés ha estat *Mathematical Hydrodynamics, Euler Equations and Related Topics*, i s'ha dut a terme del 7 al 9 de juny del 2007. L'estil del congrés ha estat potser una mica mes matemàtic que l'altre congrés que ja hem descrit.

Els tres llibres recents que vull esmentar són els següents. D'una manera una mica aproximada van en les tres direccions de les tres seccions finals d'aquest mateix escrit: Modelització Matemàtica, Anàlisi Matemàtica i Geometria.

H. Ockendon i J.R. Ockendon (2004), *Waves and compressible flow.* [OCOC04]. És un llibre pensat per a estudiants de Matemàtica Aplicada, però des del punt de vista de la modelització i la motivació és un llibre d'un nivell molt alt.

P.-L. Lions (1996, 1998), *Mathematical topics in fluid mechanics.* [PLLI96], [PLLI98]. És una extensa obra, en dos volums, dedicada a l'anàlisi matemàtica de les equacions de la mecànica de fluids. Dedica una part important a les Equacions d'Euler.

C. Marchioro i M. Pulvirenti (1994), *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids.* [MAPU94]. És un llibre general sobre les Equacions d'Euler en el cas incompressible. Encara que també toca temes de Modelització i d'Anàlisi, nosaltres l'hem consultat especialment per la part de Geometria i de Sistemes Dinàmics.

Teoria classica i flux potencial. Farem ara esment a la teoria clàssica de les equacions d'Euler. Una característica important de les equacions d'Euler és que no tenen dissipació. Per tant és natural que hi hagi quantitats conservades. Una d'elles és la circulació. En el cas incompressible i homogeni es té el següent resultat:

Teorema (Kelvin): *La circulació al llarg d'una corba tancada C,*

$$Circ[C] = \oint_C \vec{v} \cdot ds,$$

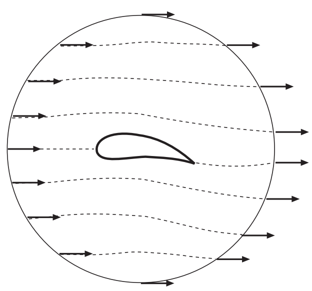
es manté constant en el temps quan aquesta corba es mou seguint les trajectòries de les partícules de fluid.

Això implica que els moviments dels fluids que "originàriament" estaven en repòs, en qualsevol instant de temps tindràn la propietat que la seva circulació al llarg de qualsevol corba és zero. En aquest cas, $\vec{v} = \nabla\Phi$ (potencial de velocitats). Per tant, entre totes les solucions de les equacions d'Euler n'hi ha unes d'especialment importants, que són aquelles en què la velocitat és el gradient d'una funció. Aquestes solucions estacionàries s'anomenen *fluxos potencials.*

En el cas incompressible tindrem a més que $\nabla \cdot \nabla\Phi = 0$ (equació de Laplace), que dóna lloc a solucions de les equacions d'Euler si se li posen condicions de contorn no homogènies (flux F donat a la vora).

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{a } \Omega \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = F \end{cases}$$

Això és el que es coneix com a *Problema de Neumann* per a l'equació de Lapalace, i dona peu a la teoria clàssica de les equacions d'Euler en el cas potencial. En dimensió dos es fa amb variable complexa, que és l'instrument matemàtic natural per estudiar funcions harmòniques en el pla. A la figura següent es veu un flux de fluid al voltant d'un objecte com podria ser l'ala d'un avió.



La teoria de la sustentació d'una ala d'avió, deguda a Joukowsky, encara es troba a molts llibres de text de variable complexa, encara que no estic molt segur que sigui un capítol que s'expliqui massa sovint...

Modelització Matemàtica amb Equacions en Derivades Parcials

Hem dit que tractaríem de les equacions d'Euler com a equacions en derivades parcials en relació a tres temes de la matemàtica: modelització, anàlisi i geometria.

Comencem amb la modelització. La modelització permet relacionar la matemàtica amb la no matemática, i essencialment és el que en una terminologia més classica se'n deia *plantajament d'equacions.* A partir de problemes que no són matemàtics, volem convertir-los, o convertir-ne una part o algun aspecte, en problemes matemàtics. És una activitat cada cop més important en la qual la matemàtica no va sola, sinó supeditada de vegades, de bracet de vegades, altres vegades amb protagonisme, en relació amb l'enginyeria, en relació amb la física, o també en relació a altres ciències.

L'aproximació acústica. Vegem un exemple clàssic de modelització. Es tracta d'usar les equacions d'Euler, que són prou complicades, i obtenir-ne unes de més senzilles, en aquest cas l'equació d'ones, que és lineal, per modelitzar un cert fenomen. Fent això es pot prescindir de molts detalls, es poden fer diverses simplificacions, per arribar a una equació mes senzilla que descrigui el model.

El fenomen que volem modelitzar aquí és la que se'n diu l'*aproximació acústica*, és a dir, el moviment d'un fluid compressible en el qual les variacions de pressió i densitat siguin petites en comparació amb les condicions ambientals. Suposarem que en aquestes condicions ambientals no pertorbades $\vec{v} = 0$ amb $p = p_0$ i $\rho = \rho_0$.

En aquest cas es procedeix a una linealització de les equacions d'Euler, en un sentit apropiat, i es prova que $\vec{v} = \nabla\Phi$ per a qualsevol valor del temps. Aleshores es té:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} = c^2 \Delta\Phi & \text{a } \Omega \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

on $c^2 = P'(\rho_0)$. La primera equació ens diu que Φ obeeix l'equació d'ones de velocitat c. La segona condició ens diu que la velocitat no té component transversal a les parets del domini.

Esmentem de passada que si en les condicions ambientals és $\vec{v} = \vec{V}_0$, aleshores s'arriba a l'equació

$$(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla))^2 \Phi = c^2 \Delta \Phi$$

en la qual el paràmetre $|\vec{V}_0|/c$ juga un paper molt important (nombre de Mach). En efecte, quan el nombre de Mach és < 1 (règim subsònic), l'equació estacionària és el·líptica, però quan el nombre de Mach és > 1 (règim supersònic) l'equació esdevé hiperbòlica.

El lector pot consultar els detalls a [OCOC04].

Ones gravitacionals en flux incompressible i aigües profundes. En aquest segon exemple de modelització es tracta de descriure el moviment de les ones superficials d'un volum d'aigua. Aquest és un problema particularment difícil perquè hem de resoldre una equació en derivades parcials en un domini del qual desconeixem la forma, que és precisament el que volem saber.

Una de les maneres més simples d'enfocar aquest problema és també linealitzar-lo, la qual cosa el redueix, introduint un potencial Φ per a les velocitats, a les equacions següents.

En un recinte de la forma $-\infty < x < \infty$, $-h < z < 0$ busquem solucions $\Phi(x, z, t)$ del problema següent:

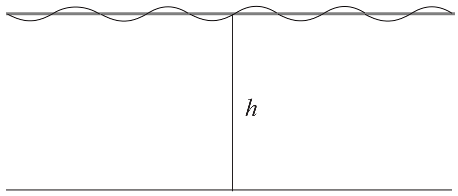
$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0 & \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{a } z = -h \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{a } z = 0. \end{cases}$$

És a dir, es tracta de trobar funcions harmòniques $\Phi(x, z)$ que compleixen la condició de contorn senzilla per a $z = -h$ i una altra de més complicada, que en particular depèn del temps, a la superfície $z = 0$. Aquestes solucions ens permeten calcular la primera aproximació de la forma $\eta(x, t)$ de la superfície lliure del fluid, $-h < z < \eta(x, t)$, usant que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

a $z = 0$.

Aquesta situació està esquematitzada en la figura següent. El lector pot consultar els detalls també a [OCOC04].



Remarquem, doncs, que una de les utilitats de les Equacions d'Euler és que unifiquen totes aquestes equacions. Aquestes i moltes d'altres. En un cert sentit podem entendre la modelització matemàtica en teoria de fluids no viscosos com a simplificacions que es fan a partir de les equacions d'Euler. Naturalment no podria ser d'una altra manera, perquè els dos principis essencials de les equacions d'Euler són força indiscutibles: el balanç de la quantitat de moviment i la conservació de la massa.

Equacions en derivades parcials i Anàlisi

Pel que fa a l'anàlisi, considerem el problema d'existència i unicitat de solució del problema del valor inicial. És a dir, donada la velocitat inicial d'un fluid, es tracta de veure si és possible de conèixer la velocitat a partir d'aquell moment. Com veurem, la situació actual d'aquest problema és molt diferent si estem en dimensió 2 o en dimensió 3. Un fluid en dimensió 2 vol dir un fluid en què només dues de les coordenades són rellevants, en el sentit de que cap de les incògnites depèn de la tercera coordenada i que la component de la velocitat en la direcció d'aquesta tercera coordenada és zero.

Un espai de funcions rellevant en aquest cas és, donat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$H(\Omega) = \{\vec{u} \in L^2(\Omega)^n | \nabla \cdot \vec{u} = 0, \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ a } \partial\Omega\}.$$

Són funcions vectorials, amb components de quadrat integrable, amb divergència zero, en el sentit de les distribucions, i tangents a la frontera. La mateixa definició d'aquest espai ja té algunes dificultats, però ara no ens hi entretindrem. Les dificultats es resolen perquè quan la divergència és zero pot donar-se sentit a la component normal de la velocitat, encara que es tracti de funcions definides només quasi per tot arreu.

Anem ara a donar algunes pinzellades de l'actual estat del coneixement en relació al problema de valor inicial. El lector interessat pot trobar més detalls en les referències [PLLI96] i [PLLI98] i també en el resum [FCAR05] d'E. Fernández-Cara.

Solucions en el cas incompressible. En dimensió 2, el teorema que segueix mostra que essencialment no hi ha cap problema per a fluids incompressibles: donada una condició inicial, existeixen solucions definides per tot t, i que si les condicions inicials són més regulars, les solucions són també més regulars.

Teorema (Yudovich '95, P.L. Lions '96): *Suposem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i la condició inicial $\vec{v}_0 \in H$ amb $\nabla \times \vec{v}_0 \in L^\infty(\Omega)$. Aleshores existeix una i una sola solució (dèbil) que compleix $\vec{v} \in \mathcal{C}([0,\infty); W^{1,q}(\Omega)^2)$ per tot $q \in (1,\infty)$. A més, si $\vec{v}_0 \in W^{k,p}(\Omega)$, on $k \in \mathbb{N}$, $i < p < \infty$, $k > 1 + 2/p$, aleshores $\vec{v} \in \mathcal{C}([0,\infty); W^{k,p})$ i $\vec{v}_t \in \mathcal{C}([0,\infty); W^{k-1,p})$.*

Com es diu a la bibliografia citada, pot justificar-se que seria important conèixer la unicitat de solució afeblint una mica més la condició $\nabla \times \vec{v}_0 \in L^\infty(\Omega)$, però això encara és un problema obert.

En canvi, en dimensió 3 els resultats que es tenen a l'actualitat són encara exclusivament locals en el temps, sense que es conegui si aquesta limitació és una limitació deguda al mètode de demostració o bé és deguda a la mateixa naturalesa del problema.

Teorema (Beale, Kato, Majda '85, vegi's [BKMA85]): *Suposem $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i la condició inicial $\vec{v}_0 \in H \cap W^{s,2}(\Omega)$ amb $s > 5/2$. Aleshores existeix $T^* > 0$* (màxim) *i una i una sola solució* (dèbil)*, que compleix $\vec{v} \in \mathcal{C}([0,T^*); W^{s,2}(\Omega)^3)$. A més, si $T^* < \infty$, aleshores*

$$\int_0^{T^*} \|\nabla \times \vec{v}(\cdot,t)\| dt = \infty.$$

És a dir, existeix una solució però només està definida des de $t = 0$ fins a un cert temps màxim T^*. D'aquest temps màxim se'n saben molt poques coses. De fet, podria ser infinit, però això no és conegut. El que van demostrar Beale, Kato i Majda és que si el temps d'existència és finit, és a dir, si no existeixen per tot a temps, hi ha una certa quantitat que es fa infinita, i això és tot que es sap. Algunes indicacions numèriques semblen mostrar que no és infreqüent que $T^* < \infty$ per a algunes condicions inicials.

Això em porta a relacionar-ho amb el mateix problema per a les equacions de Navier–Stokes. Per aquestes equacions tampoc se sap en dimensió 3 si les solucions existeixen per tot temps $t \geq 0$ o be si exploten en un temps finit. Com és ben sabut, aquest problema és molt famós, i fins i tot hi ha un premi important que s'ha ofert a qui el resolgui.

Però jo em permeto d'observar el següent: Si la resposta fos que per a les equacions de Navier–Stokes hi ha condicions inicials que donen lloc a una solució que explota en un temps finit, hauria de ser més fàcil de trobar-les a les equacions d'Euler que no pas a les de Navier–Stokes, perquè a les de Euler no hi ha dissipació i per tant les quantitats que han d'explotar en cert sentit tenen més facilitat de fer-ho.

Solucions en el cas compressible. En aquest cas la situació encara és més difícil. En dimensió 1, un gas en un tub, per dir-ho breument, la situació està bastant entesa, però tampoc pod dir-se que és completament satisfactòria. Però la situació és encara menys satisfactòria en dimensió superior.

Si escrivim les equacions en el cas isentròpic en dimensió 1, amb $p = a\rho^\gamma$, tenim

$$\begin{cases} (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = -a\rho^{\gamma-1}\rho_x \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ \rho \geq 0. \end{cases}$$

I és un resultat degut a P. Lax que si les dades inicials són suficientment regulars, aleshores existeix una única solució regular definida en un interval maximal $0 \leq t < T^*$.

Però és clar que en molts casos $T^* < \infty$ perquè en fluids compressibles es produeixen xocs, que representen discontinuïtats de les solucions. Per tant el concepte de solució s'ha d'estendre a admetre solucions *dèbils*, solucions amb discontinuïtats.

Les solucions dèbils es defineixen a partir de les equacions d'Euler i d'una versió discreta de les equacions d'Euler, que són les condicions de Rankine–Hugoniot, és a dir, les mateixes condicions de conservació de la massa i de la quantitat de moviment a través de superfícies de discontinuïtat. El gran descobriment de Lax és que per garantir la unicitat es necessitaven més que els dos principis d'Euler, es necessitava la condició d'entropia, que ha de créixer al llarg dels xocs. En moltes situacions concretes s'ha vist que es poden construir diverses solucions a partir de la mateix condició inicial si no s'usa la condició d'entropia.

El teorema d'existència que es té és el següent, sense esmentar la questió de la unicitat:

Teorema (Lax, DiPerna, PL Lions, Perthame, Tadmor, Souganidis): *Siguin $\rho_0, u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Aleshores existeix una solució d'entropia definida per tot $t \geq 0$.*

Equacions en derivades parcials i Geometria

En aquesta darrera secció volem relacionar les equacions d'Euler amb problemes geomètrics. Ho farem amb dos exemples. El primer posa de manifest l'estructura Hamiltoniana d'aquestes equacions, i el segon relaciona les equacions d'Euler amb un flux geodèsic en dimensió infinita.

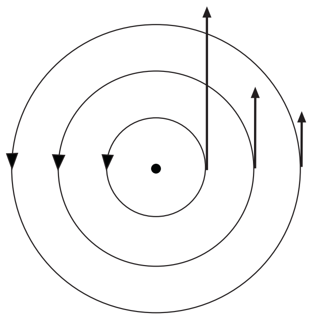
El moviment de N vortexs és un sistema hamiltonià. El primer exemple és una aproximació, coneguda des de fa temps, de les equacions d'Euler en dimensió 2 i que només recentment s'ha demostrat que és una bona aproximació. Es tracta del moviment de N vòrtexs.

Un *vòrtex potencial* centrat en el punt $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ és el flux definit pel camp de velocitats

$$\vec{v}_j(x,y) = \frac{\Gamma_j}{2}\left(-\frac{y-y_j}{r^2}, \frac{x-x_j}{r^2}\right),$$

on r és la distància entre (x,y) i (x_j, y_j).

Un vòrtex és una solució de les equacions d'Euler, llevat en el centre, i en aquest punt el seu rotacional és una delta de Dirac. En un vòrtex totes les partícules giren al voltant del centre amb velocitats que van creixent quan ens acostem al centre, com en un remolí. La constant Γ_j s'anomena *intensitat del vòrtex* i coincideix amb la circulació al voltant de qualsevol corba tancada que encercli el centre. El flux creat per un vòrtex està esquematitzat a la figura següent.



Imaginem que tenim diversos vòrtexs en el pla i cerquem una llei que ens digui com aquests vòrtexs evolucionen els uns al voltant dels altres. Doncs bé, la llei que es correspon amb les equacions d'Euler és simplement que cada vòrtex es mou com si no hi fos i fossin els altres els que el fan moure. És una mica com la llei de gravitació de Newton en què una massa puntual es mou seguint la força exercida per les altres forces que hi ha a l'univers, però aquí no estem parlant d'un camp de forces, sinó d'un camp de velocitats. La velocitat a la que es mou el centre d'un vòrtex és una funció de les velocitats dels centres dels altres vòrtexs.

Aquesta dinàmica té moltes propietats geomètriques. Per exemple, és un sistema hamiltonià. Més concretament, donats N vortexs, cada vòrtex es mou sota l'acció dels altres $N-1$ (sistema de $2N$ equacions diferencials de primer ordre) segons el hamiltonià

$$H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}\Gamma_i\Gamma_j \ln((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)^{1/2}.$$

Aquest sistema hamiltonià és molt diferent del sistema hamiltonià format per N cossos sota la influència de l'atracció gravitatòria. Per exemple, mentre que per N cossos les variables conjugades són les posicions i els moments, en el cas de N vòrtexs les variables conjugades són les abscisses i les ordenades dels centres.

El lector pot trobar més detalls a [MAPU94].

Les Equacions d'Euler són un flux geodèsic. Finalment considerem un resultat que afirma que les equacions d'Euler són un flux geodèsic. Abans hem dit, en parlar de sistemes lagrangians, que si la lagrangiana del moviment d'una partícula es redueix a l'energia cinètica, llavors el moviment de la partícula és una línia geodèsica, en el sentit de que les úniques forces que actuen sobre ella són aquelles forces que la fan mantenir sobre la varietat diferenciable en la que està (són les forces de lligadura). Doncs bé, les equacions d'Euler estan, en un cert sentit, en la mateixa situació, ja que les úniques forces són el gradient de la pressió. Però també pot observar-se que el gradient de la pressió és inevitable si volem conservar la condició de divergència igual a zero, amb el que podem mirar-lo com una força de lligadura.

Les equacions d'Euler per a fluids incompressibles es poden escriure d'una manera molt abstracta com segueix:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi_t(\mathbf{x}) = -\nabla p(\Phi_t(\mathbf{x})),$$

on $\Phi_t(x)$ representa les trajectòries de les partícules. La descripció és en termes de les coordenades lagrangianes x, que és la posició que la partícula ocupava en l'instant inicial. El que diu l'equació és la conservació de la quantitat de moviment, ja que expressa que l'acceleració és igual a la força. La conservació de la massa s'expressa per l'equació

$$J(\Phi_t) \equiv 1,$$

en la que J vol dir el Jacobià.

Això és el flux geodèsic de la varietat diferenciable (grup de Lie) dels difeomorfismes del recinte Ω que preserven volum, amb la mètrica de l'energia cinètica donada per $L^2(\Omega)$. Aquest és el punt de vista adoptat per geòmetres com Arnold, Ebin i Marsden.

I ara és el moment d'esmentar un resultat de V.I. Arnold, que pot trobar-se al seu llibre [ARNO76]. Arnold pot calcular la curvatura en un punt d'aquesta varietat diferenciable, i troba que és negativa, i no només això, sinó que aleshores pot extrapolar una mica els seus càlculs i concloure la impossibilitat de fer prediccions meteorològiques, és a dir, de preveure el comportament de l'atmosfera terrestre més enllà d'uns pocs dies.

Referències

[ARNO76] Arnold, V.: *Méthodes mathématiques de la Mécanique classique*. Editions MIR, 1976 (traducció francesa; l'original en rus és de 1974).

[BKMA85] Beale, J. T.; Kato, T.; Majda, A.: Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.* 94 (1984), no. 1, 61–66.

[FCAR05] Fernández-Cara, Enrique: A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. S$\vec{e}$MA* No. 32 (2005), 45–73.

[PLLI96] Lions, Pierre-Louis: *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[PLLI98] Lions, Pierre-Louis: *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[MAPU94] Marchioro, Carlo; Pulvirenti, Mario: *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[OCOC04] H. Ockendon; J.R. Ockendon: *Waves and compressible flow.* Springer-Verlag, 2004.

[PERE84] Perelló, C.: Bombament de columnes i disseny de turbines hidràuliques amb L. Euler, *Butl. Soc. Catalana Ciènc. Fís. Quím. Mat.* (2) 2 (1984).