EULER Y LOS INFINITOS (GRANDES Y PEQUEÑOS)

ANTONIO J. DURÁN

Resumen. De entre la ingente producción matemática de Leonhard Euler la *Introductio in analysin infinitorum* destaca con luz propia. De ella alguien dijo que difícilmente se podía encontrar otra obra en toda la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor. Los protagonistas de la *Introductio* son, como reza en su título, los infinitos (grandes y pequeños): esas bestias que los griegos consideraron temibles hasta el punto de huir de ellos. En la *Introductio*, Euler no huyó, más bien al contrario, se acercó a los monstruos, les acarició el lomo y les unció un yugo que le permitió hacer fértiles campos antes estériles. Este artículo trata de poner de manifiesto que la *Introductio*, más que un texto de matemáticas, es en realidad una gran novela de amor: la de Euler y los infinitos. Una pasión que bien pudo sugerirle a Immanuel Kant su célebre categoría estética de lo sublime.

1. Dos citas y un consejo a manera de preámbulo

Todo lo que yo pueda decir sobre Euler estará necesariamente muy contaminado por mi experiencia como editor y anotador de la edición castellana de la "Introducción al análisis de los infinitos", edición facsimilar y crítica que preparé para la Real Sociedad Matemática Española; vio la luz en 2001 y supuso la primera traducción al castellano del clásico de Euler.[1]

[1]En esa colección, la Real Sociedad Matemática Española (junto a otras instituciones) está publicando ediciones críticas en castellano, acompañadas de un facsímile, de obras maestras de las matemáticas; ya han visto la luz tres números. El primero es ese de la *Introductio* mencionado arriba; el segundo, publicado en 2003, se dedicó al *Analysis* de Newton (traducido también por primera vez al castellano) y el tercero, publicado en 2006, se ha dedicado a una selección de obras de Arquímedes ("Sobre la esfera y el cilindro", "Sobre la medida del círculo" y "Sobre la cuadratura de la parábola"). Este tercer número, editado en colaboración con el

En lo que respecta a este artículo, me concentraré en el tomo I (es el que tuvo más relevancia histórica, aunque el tomo II contenga también hallazgos notables).

Hay que empezar afirmando que la *Introductio* no es un libro cualquiera: es un texto fundamental en el nacimiento del análisis. El historiador de las matemáticas Carl Boyer, en un artículo de 1969 donde repasa los textos de matemáticas más sobresalientes de la Historia, incluye la *Introductio* en un tríada formada nada menos que por los "Elementos" de Euclides y el "Álgebra" de Al-Khowarizmi: «Es fácil decidir que el texto de matemáticas más influyente de los tiempos antiguos (o, a este respecto, de todos los tiempos) son los "Elementos" de Euclides. El texto medieval que más decisivamente influyó en el desarrollo de las matemáticas no es tan fácil de identificar, aunque una buena elección es el *Al jabr wa'l muquabala* de Al-Khowarizmi. ¿Es posible indicar un texto moderno comparable en influencia y prestigio? Podríamos citar la *Géométrie* de Descartes, o los *Principia* de Newton, o aún las *Disquisitiones* de Gauss. Pero [...] la *Géométrie* no fue estrictamente un libro de texto y, por tanto, muchos matemáticos la aprendieron en textos de otros autores. [...] Los *Principia*, el más grande de todos los trabajos científicos, afectó el curso de las matemáticas puras sólo indirectamente; pocos de sus lectores apreciaron los elementos de cálculo que contenía, siendo Leibniz, L'Hospital y los Bernoulli los maestros efectivos en la enseñanza del cálculo. Las *Disquisitiones*, un trabajo de gran profundidad, fue demasiado especializado como para dejar sentir su influencia fuera de los dedicados a la teoría de números. En el siglo XVIII [...] aparecieron sobresalientes escritores de libros de texto. Al comienzo de siglo se encuentran los textos de L'Hospital dominando los campos de la teoría analítica de cónicas y el cálculo; al final, los

International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, sirvió como regalo institucional del Congreso. Para los facsímiles de Euler y Newton, se usaron ejemplares de las primeras ediciones conservados en el Observatorio astronómico de San Fernando (Cádiz), mientras que para el de Arquímedes se usó un magnífico manuscrito del siglo XVI del fondo griego de Diego Hurtado de Mendoza conservado en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial. Las ediciones han contado con estudios preliminares de Mariano Martínez, Javier Ordóñez (Euler), Javier Echeverría, José Manuel Sánchez Ron (Newton), Carlos García Gual, Pedro González Urbaneja (Arquímedes), y también míos. Para bien o para mal, he ejercido además las labores de editor (en el sentido anglosajón del término) en los tres números de la colección.

textos de Lacroix que cubren por completo los campos elementales y cuyas ediciones aparecen por docenas, sin olvidar la debida mención a Legendre, *Euclides* del momento. Pero sobre todos estos bien conocidos libros de texto se alza otro, un libro que aparece justo en la mitad de esta época pródiga en grandes textos y con el que prácticamente todos los autores posteriores admiten tener una deuda.[2] Se trata de la *Introductio in analysin infinitorum* de Euler. [...] Con él, Euler llevó a cabo lo que Euclides y Al-Khowarizmi habían hecho con la geometría sintética de los griegos y el álgebra elemental, respectivamente. El concepto de función y los procesos infinitos habían surgido durante el siglo XVII, pero fue la *Introductio* de Euler la que los elevó al grado de tercer miembro del triunvirato matemático compuesto por geometría, álgebra y análisis».[3]

Otra cita sobre la *Introductio* que es más acorde con el enfoque de este artículo es debida a E. W. Hobson: «Difícilmente podemos encontrar otra obra en la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor como produce la *Introductio*»[4].

A menudo se oye decir que las matemáticas son una ciencia fría, que por tratar de objetos ideales, abstractos, de números y triángulos, carecen de capacidad para emocionar. Esto es absolutamente falso. Las matemáticas tienen capacidad para emocionar, mucha capacidad para emocionar. He conocido a lo largo de mi carrera científica a bastantes matemáticos que se dedican a ellas de manera profesional. Cada cual lo

[2]Sobre la influencia de Euler en los matemáticos posteriores, baste recordar aquí la clásica cita de Laplace: «¡Leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros!». O la siguiente de Gauss, menos conocida, pero igualmente más ilustrativa: «el estudio de los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos». (La segunda cita está tomada de la página 157 de P. Stäckel, (1907-08): "Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen", *Biblioteca Mathematica* **3**, 37–54. También reproducido en Euler, L. *Opera* (1), **14**, 156-176.

[3]La cita la he tomado de *Selected papers on calculus*, p. 32–33, editado por T. Apostol et al. y publicado en 1969 por la Mathematical Association of America, Belmont, California.

[4]E. W. Hobson, *Squaring de circle* (notas del curso sobre el problema de la cuadratura del círculo en el *Chirst's College* de Cambridge el año 1913), p. 42, Chelsea, Nueva York, 1953.

hace por una u otra razón, en algunos casos muy diferentes. Pero hay una motivación que es común en todos: encontramos en las matemáticas un fuerte estímulo emocional. La cita de Hobson hace referencia explícita a esta capacidad emotiva que tienen las matemáticas; cualquiera que haya leído la *Introductio* coincidirá plenamente con lo que dice Hobson. Ahora bien, esa impresión de la genialidad de Euler se produce porque la *Introductio* tiene una enorme capacidad de emocionar; es, sin duda alguna, un libro que deja huella. A mi me gusta decir que la genialidad que muestra Euler en la *Introductio* se traduce en un texto cargado de belleza, un texto que tiene valor estético. De hecho, como elemento singular en la anotación de la edición castellana, hice una valoración estética de la *Introductio*, que iba más allá del mero sentido matemático. Quiero decir, no sólo busqué y analicé los aspectos marcados por Hardy en su célebre *A mathematician's apology*[5] sobre la belleza de las ideas y razonamientos matemáticos, sino que también rastreé y localicé en el libro de Euler categorías estéticas generales marcadas por algunos filósofos que, como Kant o Adorno, han estudiado el asunto de la estética. Pero de esto hablaré algo más adelante.

De todo lo cual sigue mi consejo para quien quiera leer la *Introductio* de Euler: dejarse llevar por la brillantez de las ideas eulerianas, sentir el vértigo que el uso de los infinitos comunica a los razonamientos; perderse en la profundidad que Euler sabe crear con unos cuantos cálculos aparentemente inocentes, y ser sacudido por lo inesperado que aguarda tras tan inocentes manipulaciones.

2. La *Introductio*: consideraciones históricas

El próximo 1 de abril, se cumplirán 260 años desde que la *Introductio* viera por primera vez la luz en Lausana ese día del año *de la era de Dionisos* de 1748. Euler ya la había compuesto y enviado al editor Bousquet en 1744. Bousquet acababa de publicar en 1742 las obras completas de Juan Bernoulli (el *maestro* de Euler) y estaba preparando la correspondencia matemática de este con Leibniz que aparecería en dos tomos en 1745. Euler tenía la intención de escribir un texto sobre cálculo diferencial e integral, y se dio cuenta de que antes había que

[5]Hay edición castellana: "Apología de un matemático", G.H. Hardy, Nivola, Madrid, 1999.

comenzar por una introducción al análisis de los infinitos; así consta en una carta que envió a su amigo Goldbach en 1744: «Después de haberme hecho el plan de un tratado completo sobre el análisis de los infinitos me di cuenta de que tenían que precederle muchas cosas que propiamente no están incluidas en él ni se encuentran apenas tratadas en ninguna parte; y de ellas ha salido esta obra como pródomo al análisis de los infinitos».

Después de su primera etapa en la Academia de San Petersburgo (1727-1741), Euler compuso la *Introductio* en sus primeros años en la Academia de Berlín, justo en mitad de su vida. A pesar de que iba a permanecer en Berlín durante 25 años (1741-1766) y de que llegaría a presidir la Academia durante sus últimos años de estancia (tras la muerte de Maupertuis), Euler nunca se llevó bien con el rey Federico II de Prusia, que lo había contratado tras decidir Euler dejar Rusia por la inestabilidad política que siguió a la muerte de la reina Ana Yoánnovna. Según Federico II, Euler carecía de la brillantez, el ingenio y la elegancia imprescindibles para "la vida de salón" que tanto le gustaba al rey. Euler era más bien sencillo, directo e ingenuo, nada que ver con Voltaire que, antes de enemistarse, tanto hiciera las delicias del rey; precisamente en una carta al filósofo francés, Federico II se llegó a referir a Euler como "el gran cíclope de la geometría", broma de pésimo gusto teniendo en cuenta que Euler era tuerto.

El fruto del plan de Euler de escribir un tratado completo sobre el análisis de los infinitos fue una trilogía que comenzó con la *Introductio*, continuó con *Institutiones calculi differentialis* (dedicado, como su nombre indica, al cálculo diferencial), publicado en San Petersburgo en 1755, y culminó con los tres tomos del *Institutiones calculi integralis* (dedicado al cálculo integral) y publicado también en San Petersburgo entre 1768 y 1770.

Como queda implícito en lo dicho por Euler en la cita de arriba, en la *Introductio* no hay ni cálculo diferencial ni cálculo integral: el libro es, como reza su título, una introducción al análisis con los infinitos. En particular, se estudian las funciones elementales por medio de procesos infinitos; se desarrollan en series, algunas en productos infinitos (por primera vez en la historia de las matemáticas), y en fracciones continuas; y se usa todo esto con diversos propósitos. Algunos propios del análisis: sumar series, por ejemplo; otros más propios de la teoría de números: estudiar la descomposición de números naturales como suma de otros números naturales, problema este donde Euler usó, también por primera vez en la historia, la teoría de funciones generatrices.

Es lógico que uno se acerque a un libro de análisis con tal edad esperando encontrar matemáticas con cierto sabor antiguo. Es razonable pensar que el desarrollo del análisis durante el siglo XIX, con la introducción de la teoría de límites de Bolzano, Cauchy y Weierstrass, va a permitir hacer de manera más eficiente el estudio de las funciones de como Euler lo hace en la *Introductio*. Pues no: la primera sorpresa con que uno se encuentra al sumergirse en la *Introductio* es que su sabor no sólo no es rancio, sino que por el contrario, las matemáticas que uno encuentra saben a futuro. No es una matemática antigua lo que uno encuentra, sino que parece mucho más eficaz que la que ahora usamos. Por poner un ejemplo: cuando Euler muestra el desarrollo en serie de las funciones elementales, lo hace de manera muy distinta al procedimiento que hoy usamos. Pero esta manera es más directa, eficiente y más instructiva sobre la naturaleza de la función y de su correspondiente desarrollo en serie. La herramienta que usa Euler para obtener estos desarrollos en serie no es, como dije antes, el cálculo diferencial[6], sino los infinitos: cantidades infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas. Son los infinitos los que le permiten poner al descubierto la estructura interna de las funciones. En el análisis actual estas cantidades infinitamente grandes y pequeñas han desaparecido. La teoría de límites desarrollada en la primera parte del siglo XIX por Bolzano, Cauchy y Weierstrass ha dejado a los infinitos de Euler (y en general de los matemáticos del XVIII) en la cuneta de la historia.

La razón por la que los matemáticos se decantaron por los límites y dejaron de lado las cantidades infinitamente pequeñas y grandes es la del rigor lógico. Desde que los infinitésimos se empezaron a manejar en el siglo XVII carecieron de una adecuada formulación precisa o rigurosa desde el punto de vista lógico. En este sentido las matemáticas que

[6]O, más específicamente, lo que hoy llamamos fórmula de Taylor; aunque Euler la habría llamado fórmula de Bernoulli, que fue quien primero publicó la expresión diferencial para los coeficientes del desarrollo en serie de una función. Fue sin embargo Newton el primero en encontrarla pero, como tantas otras de sus cosas, nunca la dio a la imprenta.

uno encuentra en la *Introductio* parecen poco rigurosas. Parecen poco rigurosas pero hoy sabemos que el análisis usando cantidades infinitesimales es tan riguroso como el que hacemos hoy en día usando límites. Para ser exactos, el fundamento lógico del análisis del siglo XVIII lo hizo Abraham Robinson[7] en 1966 usando teoría de modelos para construir una extensión no estándar de la teoría de primer orden de los números reales. Es lo que hoy conocemos como análisis no estándar. No quiero extenderme sobre este punto, aunque conviene retener en la mente que los ejemplos que después expondré parecen poco rigurosos, pero en realidad son rigurosos: lo único es que necesitan de una interpretación lógica más complicada que la lógica de primer orden sobre la que se sustenta el análisis estándar. Me gustaría leer una cita de Gödel sobre el análisis no estándar; en cierta forma porque describe muy bien esa impresión que dije le queda a uno cuando lee la *Introductio* de que es matemática del futuro: «El análisis no estándar no es una extravagancia o moda de los lógicos matemáticos. Más bien hay buenas razones para creer que el análisis no estándar será el análisis del futuro. Una de estas razones es la simplificación de las demostraciones, pues la simplificación facilita el descubrimiento». Esta referencia al descubrimiento es sumamente interesante y volveré sobre ella más adelante.

La manera como Euler maneja los infinitos en la *Introductio* es puramente intuitiva. Y ahí, precisamente, radica la genialidad a la que hacía referencia la cita de Hobson anterior. Los infinitos son entidades peligrosas, que gozan de propiedades extrañas; su manejo, si no se hace con la debida prudencia, puede tener consecuencias desastrosas. La genialidad de Euler se muestra precisamente ahí: en el manejo exquisito de los infinitesimales.

3. Los infinitos en la *Introductio*: ejemplos de uso

Pero, ¿qué es una cantidad infinitamente pequeña? Un número infinitamente pequeño w es un número que no es el 0, pero que será incapaz, por más que lo repitamos, de superar al 1, o al $1/2$, o a cualquier otro número positivo que imaginemos. Para alcanzar el 1 con un número infinitamente pequeño w hace falta poner en funcionamiento un número infinitamente grande i de manera que entonces sí $iw = 1$.

[7] *Non-standard Analysis*, Robinson, A., Noth Holland, Amsterdam, 1966.

Euler manejó intuitivamente estas cantidades infinitamente pequeñas y grandes en la *Introductio* y, por tanto, no encontramos en el libro ninguna definición de ellas. El propósito de Euler era que leyendo su libro uno acabara desarrollando cierta práctica en el manejo de los cantidades infinitamente grandes y pequeñas, cierta intuición sobre la manera en que funcionan. Para ilustrar, mostraré un poco más adelante cómo aparecen por primera vez las cantidades infinitamente pequeñas en el texto de Euler.

Las cantidades infinitamente grandes y pequeñas trascendieron todos los conceptos del análisis durante los siglos XVII, XVIII y buena parte del XIX. Así, una curva se pensaba como una poligonal de infinitos lados con longitud infinitamente pequeña. Cada punto de la curva correspondía con uno de estos lados infinitamente pequeños, de manera que cuando este lado se prolonga da lugar a la tangente a la curva en ese punto. Esta manera de pensar las curvas la encontramos en Leibniz (1684): «trazar la recta que una dos puntos de una curva que estén a una distancia infinitamente pequeña o el lado prolongado de un polígono de infinitos ángulos, que para nosotros equivale a la curva». O en el segundo postulado del "Análisis de los infinitamente pequeños", del Marqués de L'Hospital (1696): «Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño, los cuales determinan, por los ángulos que forman entre sí, la curvatura de la línea».[8]

Pero ilustremos todo esto con un ejemplo. Veamos cómo desarrolló Euler en la *Introductio* la función exponencial e^z en serie de potencias de z.

En esencia, la manera en que Euler define el número e es la siguiente: las funciones exponenciales a^z, $a \geq 1$, conforman un conjunto de curvas todas las cuales toman en el origen el valor 1; el valor de la pendiente

[8]Hay traducción castellana de los textos donde se incluyen las citas anteriores. Para la primera véase "Análisis infinitesimal", G. Leibniz, (con un estudio preliminar de Javier de Lorenzo), Tecnos, Madrid 1987; y para la segunda, "Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas", Marqués de L'Hospital, edición en español de Rodrigo Cambray Núñez, UNAM, México, 1998.

de la recta tangente a esas curvas en el origen depende naturalmente de a, y va creciendo indefinidamente desde el valor 0 correspondiente a $a = 1$ hasta tomar valores tan grandes como se quiera. El número e es definido como aquel para el cual la pendiente de e^z en el origen vale 1. O sea, la tangente de e^z en el origen viene dada por $1 + z$. Atendiendo a las consideraciones anteriores sobre la naturaleza de las curvas, esto quiere decir que el segmento recto infinitesimalmente pequeño de la curva exponencial $y = e^z$ donde se sitúa el punto $(0, 1)$ (corresponde a $e^0 = 1$) coincide con la recta $y = 1 + z$. Para números infinitamente pequeños w se tendrá que están sobre la recta y sobre la curva (que coinciden), esto es, para w infinitamente pequeño se tiene la igualdad $e^w = 1 + w$. Y digo bien, para Euler eso no era una aproximación, sino una igualdad.[9]

Teniendo esto en cuenta, dado un número z lo escribimos como producto de un número w infinitamente pequeño por otro i infinitamente grande: $z = wi$.[10] Las propiedades de la exponencial permiten ahora escribir: $e^z = e^{wi} = (e^w)^i$, y como w es infinitamente pequeño, tenemos, según la discusión anterior sobre las tangentes, que $e^z = (1 + w)^i$.[11] Aplicando ahora el teorema del binomio

$$e^z = (1 + w)^i = 1 + iw + \frac{i(i-1)}{2!}w^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}w^3 + \cdots$$

---

[9]En este contexto introduce Euler por primera vez los números infinitamente pequeños en la *Introductio*: «sea ω un número infinitamente pequeño», escribe en la página 85 (104 en la versión castellana), «o una fracción tan exigua que, sin ser igual a cero, sea $a^\omega = 1 + \psi$, siendo también ψ un número infinitamente pequeño».

[10]Imagínese el lector que $z = 2$ y escribimos $2 = 2 \cdot 10^{1000000}/10^{1000000}$, de manera que $w = 1/10^{1000000}$ e $i = 2 \cdot 10^{1000000}$; con todo, esto no es suficiente, porque siendo este w muy pequeño no es infinitamente pequeño, ni tampoco este i infinitamente grande, pero seguro que la sagacidad del lector sabrá llenar la laguna que va de lo muy pequeño o muy grande a lo infinitamente pequeño o infinitamente grande.

[11]Dado que $w = z/i$, esto no es más que decir que $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, donde i es un número infinitamente grande. Esto hoy lo escribimos así: $e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, aunque como se verá más adelante, Euler supo sacar ventaja de su forma de escribir la exponencial.

Dado que i es infinitamente grande tenemos que $i-1=i$, $i-2=i$, etcétera. Lo que nos permite concluir el desarrollo:

$$e^z = 1 + iw + \frac{(iw)^2}{2!} + \frac{(iw)^3}{3!} + \cdots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Si el lector está tentado de poner el grito en el cielo, cálmese. Si piensa que Euler hace razonamientos escandalosamente parecidos a esos que tanto nos disgustan cuando los hacen los alumnos de un curso elemental de cálculo diferencial e integral, pensará muy equivocadamente, pues la diferencia entre lo que hace Euler y lo que hacen esos alumnos es tanta como la que va de los óleos de Picasso a esos horribles dibujos que todos hemos hecho de niños y que con tanta frecuencia oímos comparar con los del genio. No le dé el lector más vueltas y siga mi consejo: disfrute del vértigo que Euler transmite a sus razonamiento con los infinitos.[12]

Observe el lector cómo en la forma en que Euler ha obtenido el desarrollo para la exponencial, los números infinitamente grandes y pequeños aparecen y luego desaparecen, como en un juego de magia, pero su presencia no ha sido en vano. Han servido para transformar la función dejando al descubierto importantes propiedades ocultas. Los infinitos han sido como una especie de rayos X que nos han permitido conocer la estructura interna de la función.

En cierta forma estas cuentas de Euler sobre el desarrollo de la función exponencial ilustran bien esa genialidad de la que hablaba Hobson en la cita que les puse al principio. El filósofo Jorge Santayana, en su libro sobre estética "El sentido de la belleza",[13] explicó muy bien la característica de la genialidad, o del ingenio como él lo llamaba, atribuyéndole valor estético; su descripción se aplica muy bien a estos razonamientos de Euler: «es característico del ingenio penetrar hasta las ocultas profundidades de las cosas, para extraer de allí alguna circunstancia o

[12]Una digresión: Euler usa la fórmula del binomio para obtener la de la exponencial; también se puede obtener el recíproco: partiendo del desarrollo en serie de la exponencial llegar al del binomio: son unas cuentas muy ingeniosas que se deben al matemático portugués Jose Anastasio da Cunha, que las publicó en su magnífico libro *Principios mathematicos* publicado en Lisboa póstumamente en 1790; quien esté interesado, la Universidad de Coimbra publicó un facsímile del libro en 1987. Da Cunha fue, además de matemático, poeta y de espíritu revolucionario, lo que hizo que la Inquisición ordenara su encarcelamiento.

[13]"El sentido de la belleza", George Santayana, Tecnos, Madrid, 1999

relación significativa que hace que el objeto se presente bajo una nueva y más clara luz».

Les dejo aquí, para su disfrute, la forma en que Euler desarrolló el seno en serie de potencias. Escribimos como antes $z = nw$, donde w es infinitamente pequeño y n infinitamente grande. Esto da $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(nw)$. Aplicamos ahora la fórmula para el seno del ángulo múltiple:

$$\operatorname{sen}(z) = n\cos^{n-1}(w)\operatorname{sen}(w) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}(w)\operatorname{sen}^3(w) + \cdots$$

Ahora, como w es infinitamente pequeño tenemos $\cos(w) = 1$ y $\operatorname{sen}(w) = w$ (igualdad de la curva y su tangente en el origen para números infinitamente pequeños), o sea

$$\operatorname{sen}(z) = nw - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}w^3 + \cdots = nw - \frac{(nw)^3}{3!} + \cdots = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

4. Los infinitos de Euler y lo *sublime* de Kant

Para lo que ahora voy a explicar me gustaría pedirles que analizaran si estos razonamientos de Euler les han generado algún tipo de emoción. A mí desde luego me la producen. Yo tengo muy presente las sensaciones que me generaron cuando los leí por primera vez. Por un lado sentí una fuerte atracción hacia la manera de proceder de Euler. Me sorprendió mucho la fuerza de su razonamiento: cómo esas propiedades especiales de los infinitos le permitían en apenas un par de renglones obtener la estructura del desarrollo en serie para las funciones elementales. Pero a la vez los razonamientos de Euler me generaron un sentimiento de repulsión, tal vez porque juzgaba muy dudosos desde el punto de vista lógico esos razonamientos: ¡¡qué desgarro para nuestro corazón de matemáticos weierstrassianos-bourbakistas ver escrito que $i = i - 1$!!

Sea lo que sea lo que los produzca, son muchos los momentos en que leyendo los razonamientos y las explicaciones de Euler en la *Introductio*, uno no deja de sentir una especie de escalofríos.

Eso es lo que me lleva a mí a asegurar que el libro de Euler atesora un profundo valor estético. Decía Voltaire que «para el gusto no basta ver o conocer la belleza de una obra: hay que sentirla, ser afectado por ella». Les recuerdo también que el filósofo alemán Theodore Adorno aseguraba que el logro estético de un objeto reside precisamente en su capacidad de conmocionar, de producir algún tipo de escalofrío. Esta idea aparece también en las célebres conferencias que para la gente de la calle impartió Serge Lang en el Palais de la Decouverte de París a principios de los 80 bajo el título "La belleza de hacer matemáticas"; allí Lang se refería a «ese escalofrío en la columna vertebral» que los más hermosos razonamientos matemáticos producen.

En particular, creo que hay un concepto de la estética que tiene su origen en estos manejos que Euler hace con el infinito en la *Introductio*. Me refiero a la categoría estética de lo "sublime" que definió Immanuel Kant en su libro "Crítica del juicio", el tratado que Kant dedicó a la estética.[14] No tengo ninguna prueba de ello, pero no es exagerado decir que la inspiración para definir ese concepto estético bien la pudo encontrar Kant en los razonamientos de Euler con las cantidades infinitesimales.[15] Les recuerdo que Kant (1724–1804) fue de la generación posterior a Euler, y nació y vivió prácticamente toda su vida en Königsberg. Königsberg es una de las ciudades eulerianas, junto con Basilea donde nació, y San Petersburgo y Berlín donde ejerció como matemático en las correspondientes academias de ciencias; Euler no residió en Königsberg pero sí resolvió el célebre problema de los siete puentes que luego dio origen a la teoría de grafos.

Les voy a leer la definición del concepto de sublime de Kant y ustedes juzgarán hasta qué punto es acertada o no mi creencia de que Kant, para sintetizarlo y definirlo, bien pudo encontrar inspiración en los manejos de Euler con el infinito. «Lo sublime es aquello», escribe Kant, «en comparación con lo cual toda otra cosa es pequeña; es lo que, sólo porque se puede pensar, demuestra una facultad de espíritu que supera toda medida de los sentidos. El sentimiento de lo sublime es un sentimiento de dolor y, al mismo tiempo, un placer despertado, una conmoción, un movimiento alternativo, rápido, de atracción y repulsión de un mismo objeto».

[14]"Crítica del juicio", E. Kant, Espasa Calpe, Madrid, 1977.

[15]Podrían ser los de Euler o los de cualquier otro matemático del siglo XVIII; lo que pasa es que Euler es quien, con diferencia, expone mejor la fuerza de los infinitos.

No quiero extenderme aquí sobre el análisis de los valores estéticos de la *Introductio* de Euler (los pueden ustedes encontrar en mis notas de la versión castellana del texto); aquí valdría la cita de Jorge Santayana: «sentir la belleza es cosa mejor que entender cómo la sentimos». Pero sí me gustaría apuntar que uno puede rastrear y encontrar en la *Introductio* numerosos ejemplos para todas las categorías que Hardy apuntó en su opúsculo *A mathematician's apology* sobre el valor estético de las matemáticas: ya sea la generalidad y profundidad de los razonamientos, ya las disposiciones que miden la capacidad de una idea para producir una determinada respuesta estética, lo que Hardy llamó calidad de lo inesperado, de lo inevitable y de lo económico.

5. Euler, ¿descubridor o creador?

Los valores estéticos de una obra van ligados a un acto creativo. Si una obra científica tiene valor estético parece que tendría que suponer también un acto creativo. Esto nos lleva al clásico debate de si los científicos crean o descubren. Euler es un buen ejemplo para ilustrar esta controversia, por lo que expondré a continuación uno de los resultados más espectaculares contenidos en la *Introductio*, a partir del cual poder razonar después sobre si cabe aplicar el sustantivo creación a un *descubrimiento* científico.

Se trata de cómo sumó Euler la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Conviene antes situar históricamente el problema.

Cuando en el año 1673 Leibniz logró sumar la serie $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$,[16] quedó tan entusiasmado que afirmó poder sumar cualquier otra serie. Esa actitud tan optimista cuadra bien con quien dijo vivir en el mejor de los mundos posibles; y decir esto no mucho después de acabada la

[16]Descomponiéndola, igual que hoy seguimos haciendo, en fracciones simples $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, y viendo que al sumar la diferencia sólo quedaba el primer término. Por cierto, en este usar una diferencia para calcular una suma supo, años después, ver Leibniz el teorema fundamental del cálculo: diferencial e integral son procesos inversos. De hecho fue a partir de esta observación trivial como construyó su versión del cálculo infinitesimal, pasando de diferencias y sumas de números a diferencias y sumas de segmentos infinitesimales.

Guerra de los Treinta años ya tiene mérito. Ese mismo año de 1673, Leibniz hizo gala de ese optimismo bobo, como Voltaire no dudaría en calificarlo, en su primera visita a Londres. Matemáticamente hablando, su actitud le llevó a meter la pata en varias ocasiones, lo que no dejaron de recordárselo los ingleses cuarenta años después en plena disputa con Newton sobre la invención del cálculo infinitesimal.[17]

A su vuelta a París, Leibniz recibió una carta de John Collins en la que le proponía sumar la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$. La capacidad matemática de Collins no le daba para entender la dificultad del problema, por lo que muy posiblemente la propuesta le habría sido sugerida por James Gregory o incluso por Newton (lo que cuadra bien con el papel de Collins de intermediario entre matemáticos y científicos ingleses y del continente). El malintencionado proponente del problema, cualquiera que fuera, podría haber dicho que el cálculo de esa suma no puede ser tan complicado siendo los sumandos casi iguales a los de la serie que ya había sumado Leibniz.

Leibniz no la logró sumar, ni tampoco sus discípulos los hermanos Jacobo y Juan Bernoulli. No hay constancia documental de que Gregory o Newton estudiaran el problema, aunque eso no implica que no lo hicieran, probablemente con la misma falta de éxito que los otros. Hubo que esperar casi medio siglo hasta que alguien la lograra sumar. Ese alguien fue Leonard Euler.

Para ello lo primero que hizo fue encontrar una expresión para la función seno como producto infinito. Resultado esto de mucha más enjundia matemática que la suma en sí de la serie en cuestión.

Empecemos pues por la forma en que Euler dedujo en la *Introductio* este desarrollo en producto infinito; el primero que aparece en la historia de las matemáticas. Euler comenzó por unos cálculos sencillos, aparentemente estériles y sin conexión con el problema que pretendía resolver; se trataba, concretamente, del cálculo de los factores cuadráticos del polinomio $a^n - z^n$, que son $a^2 - 2az\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) + z^2$, donde k toma todos los valores pares entre 2 y $n-1$; además, el polinomio tiene

[17]Puede verse a este respecto: "La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos". Antonio J. Durán, Crítica, Barcelona, 2006.

los factores simples $a-z$ y, si n es par, $a+z$. Esto, que aparentemente es trivial, se convirtió en mágico cuando Euler lo aplicó a la función exponencial.

Como vimos antes, Euler la escribía como $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, donde i es un número infinitamente grande. Usando esta sugerente forma de escribir la exponencial tenemos que

$$e^x - e^{-x} = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x}{i}\right)^i;$$

tomando $a = \left(1+\frac{x}{i}\right)$, $z = \left(1-\frac{x}{i}\right)$ y $n=i$, obtenemos para $e^x - e^{-x}$ los siguientes factores cuadráticos

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1+\frac{x}{i}\right)\left(1-\frac{x}{i}\right)\cos\left(\frac{2k}{i}\pi\right) + \left(1-\frac{x}{i}\right)^2, \quad k=1,2,\cdots,$$

junto con el factor simple $2x/i$ (este factor se puede reducir al factor constante $1/i$ considerando la función $\left(e^x - e^{-x}\right)/2x$). Como i es infinitamente grande, Euler tomó

$$\cos\left(\frac{2k}{i}\pi\right) = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2,$$ [18]

lo que simplifica los factores anteriores hasta

$$\frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}\right), \quad k=1,2,\cdots.$$

Euler despreció el termino x^2/i^2 por ser i infinitamente grande y obtuvo la descomposición en producto infinito:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = c\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Evaluando la igualdad en $x=0$ se obtiene el valor 1 para la constante c, por tanto:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$ [19]

---

[18] Los dos primeros términos del desarrollo de Taylor para el coseno, que diríamos hoy.

[19] Conviene hacer un par de comentarios sobre el rigor lógico de estos razonamientos de Euler. Hay un paso muy delicado en el razonamiento que Euler sigue:

A partir de ahí, Euler obtuvo el valor de la suma $\sum_n \frac{1}{n^2}$ del siguiente modo.

Desarrollando en serie de potencias la expresión $(e^x - e^{-x})/2x$ y haciendo el cambio de variable $x^2 = \pi^2 z$ se obtiene que

$$(1) \quad (1+z)\left(1+\frac{z}{2^2}\right)\left(1+\frac{z}{3^2}\right)\cdots = 1 + \frac{\pi^2 z}{3!} + \frac{\pi^4 z^2}{5!} + \frac{\pi^6 z^3}{7!} + \cdots .$$

Euler mostró entonces qué es lo que ocurre cuando se desarrolla un producto finito como el que hay a la izquierda en la igualdad anterior: si

$$(2) \quad (1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz) = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$$

entonces

$$a+b+c+d = A;$$

Euler entendió que lo que valía para productos finitos y polinomios, valía también para productos infinitos y series de potencias, lo que aplicado a (1) da:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

---

justo cuando elimina el sumando x^2/i^2 un poco más arriba. Euler explica porqué eso es admisible y hace algo muy inusual en un texto de matemáticas. Nos pone un ejemplo donde no se puede aplicar el razonamiento que él está siguiendo. Concretamente, Euler justifica que estos razonamientos que le valen para desarrollar en producto infinito la función $e^x - e^{-x}$, no le sirven para $e^x - 1$, esto es, Euler presenta y explica un intento fallido de descubrimiento. El otro comentario que quería hacer es el siguiente: el lector debe saber que tras la introducción del análisis no estándar por Abraham Robinson en 1966, son varias las demostraciones del desarrollo en producto del seno que se han hecho usándolo. Entre estas se pueden citar las de W.A.J. Luxemburg ("What is non-standard analysis?", Luxemburg, W.A.J., *Amer. Math. Monthly* **80**, 38–63, 1973) y, sobre todo, la de V.G. Kanovei ("The correctness of Euler's method for the factorization of the sine function into an infinite product", Kanovei, V.G. *Russian Math. Surveys* **43**, 65–94, 1988); esta última *sigue los cálculos de Euler puntillosamente* (como dice explícitamente el autor en la página 66) justificando cada uno de ellos de manera impecablemente lógica; incluso incluye cómo podría haber completado Euler los razonamientos de su fallido intento de desarrollar en producto infinito $e^x - 1$, para obtener el desarrollo $e^x - 1 = e^{\frac{x}{2}} x \left(1+\frac{x^2}{4\pi}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi}\right)\cdots$.

Naturalmente Euler no se para aquí. En efecto, para el cálculo de la suma $\sum_n \frac{1}{n^2}$ sólo se ha usado uno de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias del producto infinito; si consideramos el resto de coeficientes de las potencias que aparecen en (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} B &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ C &= abc + abd + acd + bcd, \\ D &= abcd. \end{aligned}$$

Basta ahora escribir

$$\begin{aligned} P &= a + b + c + d, \\ Q &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \\ R &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \\ S &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4, \end{aligned}$$

y hacer unos simples cálculos para obtener la recursión

$$\begin{aligned} P &= A, \\ Q &= AP - 2B, \\ R &= AQ - BP + 3C, \\ S &= AR - BQ + CP - 4D. \end{aligned}$$

Ahora podemos ver toda la generalidad del razonamiento de Euler, pues la fórmula (1) encierra, no sólo el valor de la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, sino el valor de la suma de cualquier potencia par de los inversos de los números naturales; en efecto, puesto que en (1), $P = \sum_n 1/n^2$, $Q = \sum_n 1/n^4$, $R = \sum_n 1/n^6$,

$S = \sum_n 1/n^8$, etc, y $A = \pi^2/6$, $B = \pi^4/120$, etc, obtenemos:

$$\sum_n \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_n \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\sum_n \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$\sum_n \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Y así, hasta llegar a la potencia 26.[20] Y estas son sólo unas pocas de las muchísimas más series que Euler logró sumar en la *Introductio* con métodos similares.

Con estos cálculos de Euler en mente, voy ahora con el asunto de la polémica sobre si el término creadores debería, o no, aplicarse a los científicos en general, y a los matemáticos en particular. Muchos sostienen que no, puesto que «es creador quien fabrica algo que sin él nunca hubiera llegado a ser, el que trae algo al mundo que sin él nunca podría haber existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido [...] Podemos imaginar el teléfono sin Graham Bell o la teoría de la relatividad sin Einstein, pero no *Las meninas* sin Velázquez». La cita es de Fernando Savater, de su libro "Las preguntas de la vida", Ariel, Barcelona, 1999, pág. 236; aunque también podría haber citado a algún científico, por ejemplo al premio Nobel de Medicina François Jacob, que sostiene opiniones parecidas en su libro de divulgación "Mosca, ratón y hombre" (Crítica, Barcelona, 1998). En el sentido de la cita de Savater, podemos decir que Euler no es el creador de los desarrollos en serie para el seno y la exponencial, ni el creador de la suma de la serie

[20]Algunos años después Euler encontraría la fórmula general para las sumas de los inversos de cualquier potencia par de los números naturales en términos de los números de Bernoulli. Estas sumas son, naturalmente, los valores que toma la función zeta de Riemann en los números pares. De la suma de las potencias impares, o los valores que toma la función zeta en los impares, poco, por no decir nada, se sabe a fecha de hoy: apenas que el primer puñadito de esos valores son números irracionales.

$\sum_n \frac{1}{n^2}$, o del producto infinito para el seno. En el caso de los desarrollos en serie, ese calificativo ni siquiera valdría para Newton que fue quien primero los descubrió; es obvio que si Newton no los hubiera descubierto algún otro matemático posterior lo habría hecho. Leibniz sin ir más lejos los descubrió de manera independiente algunos años después de Newton. Yo veo sin embargo trazas de un creador, no en los desarrollos en serie o en los otros resultados, sino en la manera de obtenerlos, porque esa manera de descubrir lleva el sello inconfundible de Euler, y al igual que no podemos imaginar *Las meninas* sin Velázquez, yo no puedo imaginar esos razonamientos sin Euler.

Hay sin embargo en matemáticas un ejemplo más contundente de que la labor de creación está, más que en los resultados encontrados, en la forma de descubrirlos. Tuve la ocasión de discutir ese ejemplo con Savater, y el ejemplo lo dejó bastante convencido de hasta qué punto hay creación en matemáticas. Se trata de la forma en que Arquímedes encontró el área de la parábola en su libro perdido del "Método". Arquímedes no creó la fórmula del área de la parábola: la descubrió; pero lo que sí es una creación es la forma en que encontró ese área: una conjunción de mecánica y matemáticas de una sutileza y elegancia realmente fuera de serie.[21] Como saben, el "Método" de Arquímedes estuvo perdido desde poco después de que Arquímedes lo compusiera hasta 1906, cuando se dio con una buena parte del mismo en un palimpsesto encontrado por el erudito danés J.L. Heiberg en Constantinopla.[22] Pues bien, en los más de dos mil años que estuvo perdido el texto de

[21]Si no lo conocen, vayan corriendo a leerlo: por ejemplo, en la edición crítica en catalán que hizo Pedro Miguel González Urbaneja y que publicaron conjuntamente la Universidad Autónoma de Barcelona y la Universidad Politécnica de Catalunya, o en esa misma edición en castellano, o en la que publicó Alianza Editorial en 1986, con una introducción de Luis Vega. También son absolutamente recomendables las otras dos formas en que Arquímedes encontró el área de la parábola: se pueden disfrutar en la edición facsimilar y crítica de la Real Sociedad Matemática Española mencionada en la nota 1.

[22]Para la fascinante historia de ese palimpsesto puede leerse el reciente "El código de Arquímedes", R. Netz y W. Noel, Temas de Hoy, Madrid, 2007, un texto este de Netz y Noel sin duda interesante si uno es capaz de sobrellevar el, a veces, algo insufrible sabor que tiene a hamburguesa muy hecha rebozada en ketchup y pseudo mostaza.

Arquímedes ya hubo tiempo de que otros matemáticos encontraran el área de la parábola de la misma forma como hizo Arquímedes. Y sin embargo nadie en esos dos mil años lo hizo, o sea, Arquímedes *fabricó algo que sin él nunca hubiera llegado a ser precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido.*

6. Con todo el encanto de las exploraciones científicas

Ya expliqué antes que los razonamientos de Euler tal vez no parezcan muy sólidos desde el punto de vista del rigor matemático; pero como también expliqué, después del trabajo de Abraham Robinson y el desarrollo del análisis no estándar sabemos que son tan rigurosos como los nuestros usando los límites.

Es conveniente insistir en el consejo de no intentar justificar los razonamientos de Euler mediante la teoría de límites; aparte de inútil, supondría un atentado contra la estética. Cauchy hizo un intento de justificación del desarrollo de Euler en productos infinitos usando límites en las páginas finales de su *Cours d'analyse*,[23] con la consecuencia de que los cuatro renglones de Euler se transformaron en unas docenas de páginas de sufridos cálculos. Cauchy transformó en pornografía el fino erotismo de Euler.

No creo de todos modos que Euler perdiera el sueño por el mucho o el poco rigor con que hacía sus matemáticas, porque a Euler, como antes a Descartes, a Newton o a Leibniz, le preocupaba más descubrir que demostrar. Esto lo deja meridianamente claro en el prólogo de la *Introductio*, donde hay referencias continuas al hecho de desentrañar, resolver, solucionar, inventar: «desentraño cuestiones harto numerosas,..., cuanta utilidad redunde de ello para la resolución de las más difíciles cuestiones, lo dejan luminosamente claro algunos capítulos de este libro, ..., deduzco además soluciones a diversas cuestiones que pueden plantearse acerca de la partición de los números, ... este libro no sólo contiene mucho enteramente nuevo, sino que además señala fuentes de donde puedan extraerse aún muchas insignes invenciones».

[23]Se pueden ver en el facsímile (sin traducción) que hizo la sociedad Thales, Sevilla, 1999.

Tan numerosas menciones al hecho de descubrir contrastan con la falta absoluta de referencias relativas a demostrar o probar.

Y es que la *Introductio* de Euler está redactada de forma que las matemáticas que contienen se despliegan ante nosotros como las maravillas de la naturaleza se desplegaban ante los ojos atónitos de los exploradores del Renacimiento (nada por tanto que ver con esos aburridísimos, sobados y manipulados razonamientos lógico-deductivos tan abundantes en los libros de texto de hoy en día). Leer la *Introductio* es como adentrarse en una exploración geográfica por lo desconocido. A mí me recuerda los apuntes históricos de Antonio de Pigaffeta sobre el viaje de Magallanes alrededor del mundo, o los de Juan Sebastián de Elcano cuando se hizo cargo de la expedición;[24] en ellos no se nos hurtan los diversos intentos infructuosos de Magallanes para dar con el paso del océano Atlántico al Pacífico antes de descubrir la ruta correcta, al igual que Euler no nos hurta su infructuoso intento de desarrollar $e^x - 1$ en producto infinito toda vez que sirve para que el exitoso desarrollo de $e^x - e^{-x}$ quede mejor ilustrado.

No cabe duda de que la *Introductio* es un viaje iniciático al mundo de los infinitos y que Euler logra hacernos sentir con la lectura de su texto el mismo vértigo de aventura que nos transmite la lectura de esos apuntes sobre la primera vuelta al mundo. Una razón más para leer la *Introductio*: posiblemente la mejor obra de la historia para descubrir lo que significa la genialidad creativa en matemáticas.

[24]Se pueden leer en “La primera vuelta al mundo”, Juan Sebastian de Elcano, Antonio de Pigafetta y otros, Miraguano, Madrid, 2003