EULER, SÈRIES I FUNCIÓ ZETA DE RIEMANN

JOAQUIM BRUNA

RESUM. En aquest article es fa un recorregut per algunes de les aportacions d'Euler en anàlisi complexa, principalment al voltant dels desenvolupaments en sèrie, sumes infinites i la funció zeta. Descriurem una versió simplificada de la prova d'Apéry, "la prova que escapà a Euler", del fet que $\zeta(3)$ i $\zeta(2)$ no són racionals. Repassarem altres mètodes de sumació basats en sèries de Fourier, que Euler també anticipà. Finalment aprofitarem l'ocasió per explicar una reformulació equivalent de la hipòtesi de Riemann en termes d'anàlisi harmònica.

1. INFINITS NOMBRES PRIMERS A LA EULER

Com molts altres del seu temps, Euler s'interessà per la distribució dels nombres primers. La funció que avui anomenem ζ de Riemann fou introduïda per Euler per a valors reals de la variable:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

Com que la sèrie harmònica és divergent, $\zeta(s)$ té límit $+\infty$ quan $s \to 1$. La relació d'aquesta funció amb els nombres primers es centra en la fórmula, ben coneguda,

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s),$$

on el producte s'estén a tots els nombres primers p.

A partir d'aquí, com que $\zeta(s)$ té límit infinit en 1, Euler argumenta que hi ha infinits nombres primers. Però de seguida en treu més informació. Observem que si $s > 1$, tant la sèrie com el producte infinit són convergents.

Si per a cada factor utilitzem la sèrie geomètrica

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{ks}},$$

i efectuem la multiplicació, s'obté la validesa de la fórmula. Si ara prenem logaritmes,

$$-\sum_p \log(1-\frac{1}{p^s}) = \log\zeta(s),$$

i utilitzem que $-\log(1-x) = x + O(x^2)$ per a $0 < x < \frac{1}{2}$, veiem que

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log\zeta(s) + \sum_p O(\frac{1}{p^{2s}}).$$

Si finalment fem $s \to 1$, veiem que

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty,$$

fet que, contrastat amb $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$, porta a Euler a afirmar que "Hi ha més primers que quadrats".

1.1. **El càlcul de** $\zeta(2)$**.** Matemàtics com ara Leibnitz, Stirling, de Moivre i tres Bernouilli (Jacob, Johan i Daniel) havien intentat sumar la sèrie $\zeta(2)$. Cap hi va reeixir, i la qüestió acabà coneguent-se, a causa de la implicació dels Bernouilli, com a "problema de Basel":

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

L'èxit en la primera solució d'aquest problema correspongué a un jove Euler que presentà una bellíssima solució el 1735 [E41]. Euler començà amb l'observació que si $P(x)$ és un polinomi de grau n, amb $P(0) = 1$, i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són les seves arrels, aleshores

$$P(x) = (1-\frac{x}{a_1})(1-\frac{x}{a_2})\ldots(1-\frac{x}{a_n}).$$

Tot seguit la utilitza per a funcions més generals que polinomis. Per exemple, els zeros de la funció

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots$$

són $a_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, i, deixant de banda com Euler ho argumenta, tindrem

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots = \prod_{n\neq 0}(1 - \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

Si ara igualem els coeficients de x^2 trobem la resposta d'Euler:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1.2. **Càlcul de $\zeta(2k), k \in \mathbb{N}$.** Es poden sumar altres sèries utilitzant les fórmules de Girard–Newton que expressen les funcions simètriques elementals σ_m de les arrels a_k en termes de sumes de potències d'aquestes arrels. Per exemple, si igualem el coeficient de x^4 trobem, atès que $2\sigma_2 = \sigma_1^2 - (\sum_k a_k^2)$,

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{1\leq n<m} \frac{1}{n^2m^2} = \frac{1}{2\pi^4}\left((\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right),$$

d'on es dedueix que

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Aquest procediment el va aplicar Euler per calcular $\zeta(2k), k \in \mathbb{Z}$, i en particular consigna els valors

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \zeta(12) = \frac{\pi^{12}}{6825 \cdot 93555}.$$

Euler també va trobar l'expressió

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k},$$

on el B_{2k} són els nombres de Bernouilli.

1.3. **Sèries trigonomètriques.** Euler (i també Bernouilli, d'Alembert, Clairaut, ...) ja manipulava sèries trigonomètriques

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi n x + b_n \cos 2\pi n x)$$

i coneixia la fórmula per als coeficients

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x \, dx, \ n \geq 0, \\ a_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \, dx, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

També coneixia que dos qualssevol dels sumands són perpendiculars pel producte escalar

$$\int_0^{2\pi} h(x) g(x) \, dx,$$

de forma que hom té la fórmula de Bessel–Pitàgores

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx = \frac{b_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Així, doncs, tenia tots els recursos necessaris per donar una altra manera de trobar $\zeta(2k), k \in \mathbb{N}$, aplicant la fórmula de Bessel-Pitàgores a la funció $f(x) = x^k, 0 \leq x \leq 1$, però tanmateix no ho va fer.

1.4. **Un problema.** La fórmula de Bessel-Pitàgores és evidentment vàlida per a qualsevol sistema ortonormal $\{h_i(x)\}$ en un interval I,

$$\int_I h_i(x) h_j(x) \, dx = \delta_{i,j} \Rightarrow \int_I |\sum_i c_i h_i(x)|^2 \, dx = \sum_i c_i^2.$$

És força natural plantejar-se si hi ha altres sistemes ortonormals, diferents del trigonomètric, per als quals sigui possible sumar $f(x) = \sum_i \frac{1}{i} h_i(x)$. Una variant es dóna en una base d'ondetes en el interval $[0,1]$, on les funcions de la base tenen la forma

$$h_{n,k}(x) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^k x - n), \ (n-1)2^{-k} \leq x \leq n 2^{-k}, \ n = 1, \dots 2^k.$$

Si prenem $c_{n,k} = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k}$, $\sum_k \frac{1}{k^2}$ és, llevat de constants, igual a $\sum_{n,k} |c_{n,k}|^2$ i per tant igual a $\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx$, on $f(x) = \sum_{n,k} c_{n,k} h_{n,k}$. El problema està en trobar f. Seria interessant saber-ho per al cas de la base de Haar; en aquest cas hom té $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k(x)$, on R_k són les funcions de

Rademacher ($R_k(x) = \text{sgn}(\sin(2^k 2\pi x))$, $x \in [0,1]$). Em pregunto si hi ha alguna interpretació probabilista de la suma anterior que permeti de calcular f i $\int_0^1 f(x)^2\,dx$.

1.5. **Una prova elemental d'Antonio Córdoba.** Antonio Córdoba va comentar-me fa un temps una tercera prova elemental que voldria reproduir aquí i que el lector pot trobar a [Cor01]. Comença separant a la sèrie els termes parells dels senars,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

d'on

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2k}\,dx \right) \left(\int_0^1 y^{2k}\,dy \right).$$

Posem ara el producte d'integrals com a una integral doble, permutem sumació i integració i sumem la sèrie geomètrica:

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2y^2)^k\,dx\,dy \quad = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\,dx\,dy$$

Amb el canvi de variable $x = \tanh(u), y = \tanh v$ dóna

$$\zeta(2) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du\,dv}{\cosh(u-v)\cosh(u+v)}$$

i amb el canvi $s = u - v, t = u + v$ s'obté

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} \right)^2.$$

Ara tan sols cal observar que amb el canvi $x = e^s$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh s} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

1.6. **Sobre nombres irracionals.** Cóm saber si un determinat nombre α és irracional? Euler provà el caràcter irracional del nombre e amb la que és, de fet, gairebé l'única estratègia (cf. [Cor01]): trobar racionals $\frac{p_n}{q_n}$ tals que $\lim_n q_n|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = 0$. Això és perquè si $\alpha = \frac{P}{Q}$, i $(p,q) = (P,Q) = 1$, aleshores
$$|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| = |\frac{qP - Qp}{qQ}| \geq \frac{1}{qQ},$$
de manera que
$$q|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Q}.$$
Per exemple, per al nombre e
$$|e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}| = |e - \frac{P_n}{n!}| \leq \frac{2}{(n+1)!}.$$
Aquest tipus de questions acostumen a ser difícils. Per exemple, a hores d'ara no es coneix si el nombre d'Euler
$$\gamma = \lim_n (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$$
és racional o no. Tampoc es coneix la resposta per a $e+\pi, \pi^e, \zeta(2k+1), k \geq 2$. Per a $\zeta(3)$, en canvi, sí que es coneix que és un nombre irracional, fet provat per R. Apéry el 1978.

1.7. **La irracionalitat de $\zeta(3)$, una prova recent amb mètodes d'Euler.** La prova d'Apéry [Ape79] depèn d'expressions i fórmules raríssimes. Buscant a Internet, fa un temps vaig trobar l'article [Por79], en el qual s'aportava una altra prova amb recursos tots ells pretesament coneguts per Euler. Sens dubte es tracta d'una exageració, però el fet és que certament ara hi ha proves senzilles. Una versió d'aquesta mena va ser trobada independentment per A. Córdoba i F. Beukers, i la reprodueixo aquí ([Cor01, Beuk79]).

Partim de
$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log st}{1 - st}\, ds\, dt.$$
Si P_n és un polinomi amb coeficients enters de grau $\leq n$ en s, t, hom té
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(s,t)\log st}{1 - st}\, ds\, dt = A_n\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}$$

amb A_n, B_n, C_n nombres enters i C_n que a més divideix $[\mathrm{mcm}(1, 2, ..., n)]^3$. La tria $P_n(s,t) = P_n(s)P_n(t)$, amb $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[s^n(1-s)^n]$ (polinomis de Legendre) produeix

$$|A_n\,\zeta(3) - \frac{B_n}{C_n}| \leq C(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Ara bé,

$$\mathrm{mcm}[1, 2, \ldots, n] \leq \prod_{p\leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = \prod_{p\leq n} e^{\log n} \leq n^{\pi(n)},$$

on $\pi(n)$ és la notació habitual per a designar el nombre de primers $p \leq n$. Pel teorema dels nombres primers (que, per cert, no sé si Euler ja intuí), el primer en conjecturar-ho fou Legendre (1752-1833)) hom té que l'expressió anterior és menor que

$$n^{\frac{n(1+\varepsilon)}{\log n}} = e^{n(1+\varepsilon)}$$

Per tant $C_n \leq e^{3n(1+\varepsilon)}$ i com a conseqüència

$$C_nA_n|\zeta(3) - \frac{B_n}{C_nA_n}| \leq Ce^{3n(1+\varepsilon)}(\sqrt{2}-1)^{4n} = C[e^{3(1+\varepsilon)}(\sqrt{2}-1)^4]^n = C\lambda^n,$$

amb $\lambda < 1$, cosa que prova la irracionalitat de $\zeta(3)$.

2. L'EQUACIÓ FUNCIONAL DE ζ A L'EULER

Euler fou el primer en trobar el que avui anomenem equació funcional per a la funció ζ de Riemann.

2.1. La funció $\Phi(s)$.

Introduïm la funció

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

que de seguida es veu que coincideix amb $(1-2^{1-s})\zeta(s)$. Tal com s'ha observat abans, hom té

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = A_k(\pi)^{2k},$$

amb A_k racional. D'altra banda, a partir de la sèrie geomètrica

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

s'obtenen els desenvolupaments

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$
$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \cdots = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

i així successivament. Fent $x = 1$, Euler s'adona que

$$\begin{array}{ll} \Phi(-1) & = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4} = 1\frac{2^2-1}{2}A_1 \\ \Phi(-2) & = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0 \\ \Phi(-3) & = 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{2}{16} = -1 \times 2 \times 3 \times \frac{2^4-1}{2^3}A_2 \end{array}$$

on els A_k són els mateixos que abans. En general,

$$\Phi(1-2k) = (-1)^{k+1}(2k-1)!\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}}A_k,$$

mentre que $\Phi(-2k) = 0$. Escrit en termes de ζ, això és

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s}2^{1-s}(s-1)!\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s)$$

quan s és un nombre natural. Euler ja tenia la versió del factorial per a arguments no enters, la funció Γ; aleshores, substituint el factorial per $\Gamma(s)$, formula la conjectura

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s}2^{1-s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s)$$

conjectura que segons ell mateix "paroîtra sans doute fort hardie".

2.2. **La funció ζ de Riemann. La hipòtesi de Riemann.** Com hem vist, Euler manipulava la funció ζ per a arguments reals. L'extensió al domini complex i les propietats de la funció ζ en el seu domini natural, en particular l'equació funcional, són essencialment feina de Riemann. La mateixa definició

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}$$

té sentit per a z complex, amb $\Re z > 1$, i l'equació funcional implica que ζ s'estén com a funció meromorfa en tot el pla, amb un únic pol simple en $z = 1$, i zeros "trivials" en $z = -2k, k \in \mathbb{N}$.

Tots els altres possibles zeros són a la banda crítica $0 < \Re z < 1$, i han de ser simètrics respecte $\Re z = \frac{1}{2}, \Im z = 0$. El fet que $\zeta(z) \neq 0$ quan $\Re z = 1$

està íntimament lligat amb el teorema dels nombres primers que abans hem utilitzat: si $\pi(x)$ és el nombre de nombres primers p amb $p \leq x$, aleshores

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Més generalment, tota informació sobre la distribució de zeros de ζ en la banda crítica porta a un control asimptòtic de la diferència $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$ quan $x \to +\infty$. La hipòtesi de Riemann (HR) estableix que tots els zeros de ζ a la banda crítica són a $\Re z = \frac{1}{2}$. Hardy va provar que efectivament hi ha infinits zeros a la línia crítica.

3. Cap a una reformulació de HR. La transformació de Fourier i de Mellin

El propòsit dels apartats que segueixen és formular un enunciat equivalent a (HR) en termes d'anàlisi real.

La transformació de Fourier és l'eina que descomposa les funcions en les seves components freqüencials. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, és a dir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

l'amplitud de la component de freqüència ξ està donada per la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx\,,$$

que és una funció contínua. Si la funció f és de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty,$$

llavors la integral ha d'entendre's

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{ix\xi}\, dx,$$

per a quasi tot ξ. Prescindint de tecnicismes com aquest, el fet important és que hi ha una síntesi o fórmula de reconstrucció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi,$$

que és aconsellable mirar-se sintèticament com

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi \, d\xi,$$

on $e_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}$ i $\langle f, g \rangle$ designa com és habitual el producte escalar o correlació de les dues funcions f, g

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}.$$

En aquesta descomposició de f en components freqüencials hi val un teorema de Pitàgores, que aquí s'anomena fórmula de Parseval, que diu

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \|\hat{f}\|_2^2$$

és a dir, que $f \to \hat{f}$ és una isometria de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$.

3.1. **Teoremes tauberians de Wiener.** Maneres d'expresar una funció com a superposició o suma d'altres més senzilles n'hi ha moltes. La particularitat de la descomposició de Fourier i la raó de la seva importància és que aquesta representació trivialitza les operacions que es fan sobre les funcions i que són invariants per translacions (dit altrament, que no depenen d'eleccions arbitràries d'origen d'espai i temps). Un operador T acotat en $L^2(\mathbb{R})$ (és a dir, $\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$), s'anomena invariant per translacions (IT) si $T(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda(Tf)$ on $\tau_\lambda f(x)$ designa la traslladada $f(x-\lambda)$. Tots aquests operadors diagonalitzen si utilitzem representació de Fourier: hi ha una funció M acotada que s'anomena multiplicador tal que

$$\widehat{Tf}(\xi) = M(\xi)\hat{f}(\xi), \; |M(\xi)| \leq C,$$

i recíprocament. Hi ha tants operadors acotats invariants per translacions com funcions acotades.

Els subespais tancats E de $L^2(\mathbb{R})$ invariants per translacions, és a dir, tals que $\tau_\lambda f \in E$ si $f \in E$, s'identifiquen amb els operadors de projecció corresponents (operadors autoadjunts T amb $T^2 = T$) que seran també invariants per translacions. Estan doncs en correspondència amb els multiplicadors reals M que compleixen $M^2 = M$, és a dir, les funcions característiques de conjunts mesurables. Aquesta és la prova que l'expressió general d'un subespai tancat invariant per translacions de $L^2(\mathbb{R})$ és de la forma següent:

$$E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ q.p.t. } \xi \in S\}$$

on S és un conjunt de mesura positiva.

El teorema tauberià de Wiener en $L^2(\mathbb{R})$ és aleshores una conseqüència: un subespai E de $L^2(\mathbb{R})$ invariant per translacions és dens si i només si $\{\xi : \hat{f}(\xi) = 0, f \in E\}$ té mesura zero. Com a conseqüència, donada f, les traslladades $\tau_\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$ generen (topològicament) $L^2(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ q.p.t. ξ.

Per a l'espai L^1 tenim un resultat anàleg: donada $f \in L^1(\mathbb{R})$, les traslladades $\tau_\lambda f$ generen topològicament $L^1(\mathbb{R})$ si només si $\hat{f}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ (observi's que $\hat{f}$ és una funció contínua en aquest cas). Cal mencionar que el teorema tauberià de Wiener fou una de les peces en la seva prova del teorema dels nombres primers, en els apartats següents veurem quina relació hi ha entre ells. L'excel·lent llibret de N. Wiener [Wie24] és una bona referència per a tots aquests temes.

3.2. **Versions multiplicatives dels teoremes de Wiener.** Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, on p és 1 o 2, i $g(t) = f(\log t), t > 0$, llavors

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^p \, \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$$

La transformada de Fourier de f s'escriu en termes de g

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) t^{i\xi} \, \frac{dt}{t}$$

Així s'aplica a $g \in L^p((0, +\infty), \frac{dt}{t})$. Ara ho escrivim en termes de $h \in L^p(0, \infty)$ mitjançant el canvi $g(t) = t^{\frac{1}{p}} h(t)$ pel qual

$$\int_0^{+\infty} |h(t)|^p \, dt = \int_0^{+\infty} |g(t)|^p \, \frac{dt}{t}.$$

Reescrit tot plegat en termes de h el resultat és

$$M_p h(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{\frac{1}{p} + i\xi - 1} \, dt.$$

Per aquest motiu introduïm la transformada de Mellin

$$Mh(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) t^{z-1}\, dt$$

que, segons acabem de veure, en $L^1(0,\infty)$ està definida en $\Re z = 1$ i en $L^2(0,\infty)$ està definida en $\Re z = \frac{1}{2}$.

Com que la transformada de Fourier diagonalitza els operadors invariants per translacions i hem fet una transformació logarítmica, la transformada de Mellin diagonalitza els operadors en $L^p(0,\infty)$ invariants per les dilatacions

$$D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(\frac{t}{\alpha}), \alpha > 0.$$

La traducció dels teoremes anteriors és ara evident. Per exemple, el Teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^1 estableix que un subespai E de $L^1(0,\infty)$ invariant per dilatacions ($D_\alpha E = E$) és dens en $L^1(0,+\infty)$ si i només si

$$\{\xi, Mh(1+i\xi) = 0, h \in E\} = \emptyset.$$

En conseqüència, les dilatades $D_\alpha h, \alpha > 0$ d'una funció generen topològicament $L^1(0,+\infty)$ si i només si $Mh(1+i\xi) \neq 0$ per a tot ξ.

De la mateixa forma, tot subespai tancat invariant per dilatacions de l'espai $L^2(0,+\infty)$ és de la forma

$$E_S = \{h \in L^p(0,+\infty) : Mh(s) = 0, s \in S \subset \tfrac{1}{2} + i\mathbb{R}\}.$$

El teorema tauberià de Wiener multiplicatiu en L^2 estableix que un subespai E de $L^2(0,\infty)$ invariant per dilatacions és dens en $L^2(0,+\infty)$ si i només si

$$\{s = \tfrac{1}{2} + i\xi, Mh(s) = 0, h \in E\}$$

té mesura zero. Les dilatades $D_\alpha h$, $\alpha \in \mathbb{R}$, generen topològicament l'espai $L^2(0,+\infty)$ si i només si $Mh(s) \neq 0$ q.p.t. $s, \Re s = \frac{1}{2}$.

Com a exemple veiem una observació que ens servirà per veure el tipus de qüestions d'anàlisi real que es relacionen amb HR. Es basa en la relació trobada per Salem

$$\int_0^\infty \frac{t^{\sigma+i\xi} - 1}{e^t + 1}\, dt = \Gamma(s)(1-2^{1-z})\zeta(s), z = \sigma + i\xi, 0 < \sigma < 1,$$

que mostra explícitament una transformada de Mellin.

Teorema 1. *La no anulació de ζ en $\Re z = \sigma$ equival al fet que les funcions $D_\alpha k, k(t) = \frac{t^{\sigma-1}}{e^t+1}$, generen $L^1(0, +\infty)$*

3.3. **L'aproximació de A. Beurling i K. Nyman a la hipòtesi de Riemann.** Designem per ρ la funció part fraccionària $\rho(t) = t - [t]$; un càlcul senzill permet calcular la transformada de Mellin

$$\int_0^{+\infty} \rho(\frac{1}{t}) t^{z-1}\, dt = -\frac{\zeta(z)}{z}.$$

Com que la transformació de Mellin és biunívoca, hauria de ser possible traslladar la hipòtesi de Riemann a una propietat de $\rho(\frac{1}{t})$. Pel teorema tauberià, el fet que els zeros de la funció ζ sobre la recta són a com a molt numerables (per tant de mesura zero) implica que les dilatades $\rho(\frac{\theta}{t}), \theta > 0$, generen $L^2(0, +\infty)$. Per trobar un enunciat equivalent a HR cal modificar un xic les coses. Sigui E el subespai generat per les funcions $\rho_\theta(t) = \rho(\frac{\theta}{t}) - \theta\rho(\frac{1}{t}), 0 < \theta, t < 1$. També pot expressar-se

$$E = \{h(t) = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t}), \sum_k c_k\theta_k = 0, 0 < \theta_k \le 1\}$$

En els anys 50, Beurling i Nyman provaren el següent resultat, complementat fa uns anys pel matemàtic venezolà L. Baez-Duarte(veure [Bae93], [Beul55], [Nym50])

Teorema 2. (Beurling–Nyman–Baez) *Per $1 \le p \le 2$, són equivalents,*

(1) *La funció ζ no té zeros en $\Re z > \frac{1}{p}$.*
(2) *L'espai E és dens en $L^p(0, 1)$.*
(3) *La funció $\mathbf{1}$ característica de $[0, 1]$ és aproximable en L^p per funcions d'E.*
(4) $\mathbf{1} = \sum_k c_k \rho(\frac{\theta_k}{t})$ *en $L^p(0, \infty)$.*
(5) *Hom pot utilitzar tan sols $\theta_k = \frac{1}{k}$ en els enunciats anteriors.*

Farem primer la prova de la implicació més fàcil. Identifiquem les funcions definides en $(0, 1)$ amb les funcions definides en $(0, +\infty)$ que són zero per a $t > 1$ (observem que aquest és el cas per a les funcions d'E). Calculant hom troba que si $0 < \theta < 1$,

$$\int_0^1 \rho(\frac{\theta}{t}) t^{z-1}\, dt = \frac{\theta}{z-1} - \frac{\theta^z \zeta(z)}{z}.$$

Per tant, si $h \in E$ la seva transformada de Mellin és

$$\int_0^1 h(t)t^{z-1}\,dt = -\frac{\zeta(z)\sum_k c_k\theta_k^z}{z},$$

amb la qual cosa

$$1-\zeta(z)\sum_k c_k\theta_k^z = z\int_0^1 (1+h(t))t^{z-1}\,dt.$$

Apliquem ara la desigualtat de Hölder: si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i $\varepsilon = \|1+h\|_p$,

$$|1-\zeta(z)\sum_k c_k\theta_k^z|^q < \frac{\varepsilon^q|z|^q}{q(\Re z-\frac{1}{p})}$$

i per tant $\zeta(z)\neq 0$ si $\Re z > \frac{1}{p}+\frac{\varepsilon^q|z|^q}{q}$. Si $h\in E$ pot triar-se de forma que ε sigui arbitràriament petit, és a dir, si 1 és aproximable en L^p per funcions d'E, ζ no té zeros en $\Re z > \frac{1}{p}$.

En l'altre sentit, que HR (cas $p=2$) implica densitat, depèn d'unes consideracions interessants en la línia del que s'ha explicat abans en relació als espais invariants per dilatació. Observem que $L^2(0,1)$, identificat amb les funcions que s'anul·len per a $t>1$, és invariant per les dilatacions D_α amb $\alpha<1$, de fet és òbviament el subespai més gran amb aquesta propietat. També ho és l'espai E, ja que

$$D_\alpha\rho_\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\rho_{\alpha\theta}-\theta\rho_\alpha).$$

Els teoremes de Wiener permeten caracteritzar tots els subespais invariant per translacions de $L^2(\mathbb{R})$ i quan són densos; per un canvi logarítmic això ens ha dut a la descripció dels subespais de $L^2(0,+\infty)$ que són invariants per dilatacions i a saber quan són densos. El problema que ens interessa ara és saber quan un subespai E de $L^2(0,1)$ invariant pel semigrup de dilatacions $D_\alpha, 0<\alpha<1$ és dens en $L^2(0,1)$, a partir d'una descripció de tots ells; per transformació logarítmica, això és equivalent a la descripció dels subespais de $L^2(0,+\infty)$ que són invariants per les translacions $\tau_\lambda, \lambda>0$. Aquest és el contingut del teorema de Beurling, l'enunciat del qual necessita variable complexa. Revisem directament la versió multiplicativa, la que ens interessa aquí.

La primera observació és que si $h \in L^2(0,1)$ llavors la transformada de Mellin

$$Mh(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 h(t) t^{z-1}\, dt$$

està definida i és holomorfa en $B = \{z : \Re z > \frac{1}{2}\}$. Les funcions que s'obtenen constitueixen exactament l'espai de Hardy $H^2(B)$ de les funcions holomorfes H en B tals que

$$\sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma + i\xi)|^2\, d\xi < +\infty.$$

Cada H (i conseqüentment cada $h \in L^2(0,1)$ de la qual prové) està completament determinada pel seu conjunt de zeros $Z(H)$ al semiplà B, per la funció $|H|$ en $\Re z = \frac{1}{2}$ i per una mesura singular μ_H en $\Re z = \frac{1}{2}$; a més, $\mu_H = 0$ si H prolonga analíticament (vegi's [Hof88] per a aquests fets).

Teorema 3*(Beurling)*

- *Les dilatades $D_\alpha h(x), \alpha < 1$ de $h \in L^2(0,1)$ generen topològicament $L^2(0,1)$ si i només si $Z(H) = \emptyset$ i $\mu_H = 0$ (H externa), on H és la transformada de Mellin de h.*
- *Un subespai E de $L^2(0,1)$ invariant per les dilatacions D_α, $\alpha < 1$, és dens si i només si $\cap_{h \in E} Z(M(h)) = \emptyset$ i $\inf_{h\in E} \mu_M(h)(I) = 0$, per a tot $I \subset \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$.*

Per a l'espai E de Beurling–Nyman, hom té

$$M(\rho_\theta)(z) = \frac{\theta - \theta^z}{z} \zeta(z)$$

Si val HR, llavors no hi ha zeros comuns en B; d'altra banda, el fet que ζ prolonga analíticament (gràcies a l'equació funcional) garanteix que tampoc hi ha part singular. I això prova la densitat d'E a partir de HR.

3.4. **Una "quasi-prova" de la hipòtesi de Riemann.** Amb les notacions anteriors, $\sum_k c_k \theta_k^z$ és quasi-invers de ζ si $h+1$ és petit, i formalment és un invers si $h+1$ és zero. Reprenem la fórmula d'Euler

$$\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \zeta(s).$$

Aleshores, almenys per a s reals,

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s}) = \sum_k \mu(k)(1/k)^s,$$

on $\mu(k)$ és la funció de Möbius (per $k \neq 0$, $\mu(k) = (-1)^m$ si k és producte de m primers diferents, $= 0$ si k té divisors primers repetits, i $\mu(0) = 1$), Això suggereix considerar $\theta_k = \frac{1}{k}, c_k = \mu(k)$, és a dir, la funció

$$h(t) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \rho(\frac{1}{kt}).$$

És un fet conegut que la funció h anterior és igual a -1 quasi per tot t. Això és conseqüència de les relacions

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} = 0,\ \sum_{k \geq 1} \mu(k) \left[\frac{y}{k}\right] = 1,\ y > 1$$

i de la fórmula d'inversió de Möbius. Per tant $1 + h = 0$! Si h estigués en l'espai E de Beurling–Nyman, la hipòtesi de Riemann estaria provada (aquí utilitzem el quart enunciat en el teorema de Beurling–Nyman–Baez). Mirem la definició de h, el terme general de la sèrie és certament d'E. Què hi falta? Doncs tan sols que la convergència de la sèrie sigui en L^2: si la convergència fós en $L^2(0,1)$, la hipòtesi de Riemann estaria provada.

Avui se sap que aquesta sèrie no convergeix en L^2, però podria haver-hi altres mètodes de sumabilitat que la facin convergent, cosa que provaria HR (com que puntualment convergeix a -1 la suma de la sèrie serà sempre -1 amb independència del mètode de sumabilitat). El caràcter "soft" dels arguments utilitzats en aquest camp, però, fa pensar els experts que aquesta no és una bona estratègia per a provar HR.

Per acabar, assenyalar que curiosament aquesta situació és la oposada a la que es dóna habitualment en anàlisi harmònica, on és la convergència puntual la que resulta "difícil" i "fàcil" la convergència en L^2. L'exemple paradigmàtic és el teorema de Carleson sobre convergència puntual de les sèries de Fourier: si f és 1-periòdica, amb sèrie de Fourier

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

i

$$S_N f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

aleshores és trivial que $\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{n>N} (a_n^2 + b_n^2) \to 0$ però és duríssim provar que $S_N f(x) \to f(x)$ q.p.t. x.

REFERÈNCIES

[Ape79] Apéry, R.: *Irrationalité de $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*. Astérisque **61**, 11-13, 1979.

[Bae93] Báez-Duarte L.: *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*. Adv. in Maths, 101 (1993)

[Beuk79] Beukers, F.: *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*. Bull. London Math. Soc. **11** (3), 1979.

[Beul55] Beuling, A.:*A closure problem related to the Riemann Zeta function*. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol.41, 1955

[Cor01] Córdoba, A.: *Disquisitio Numerorum*. Gaceta Matemática, **4** (1), 249-260 (2001).

[E41] Euler, L.: *De summis serierum reciprocarum*. Lliurat a l'Acadèmia de San Petersburg el 5 de desembre de 1735, publicat a Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **7** (1740), 123-134. Us podeu baixar una còpia de http://www.eulerarchive.org, on també trobareu una referència a una traducció anglesa.

[Hof88] Hoffman, K.: Banach spaces of analytic functions, Dover, 1988

[Nym50] Nyman, B.: *On some groups and semigroups of translations*, thèse, Uppsala, 1950

[Por79] Van der Porten, A.: *A proof the Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$*. Math. Intelligencer **1** (4), 1979.

[Wie24] Wiener, N.: The Fourier integral and its applications, Dover Pub. Co.