Geometría de Lorentz: de lenguaje a herramienta básica en Relatividad General

Alfonso Romero
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
18071-Granada

Web: `http://www.ugr.es/~aromero`

E-mail: `aromero@ugr.es`

Barcelona, 9 de Febrero de 2005

Contenidos

1.a) Partículas y observadores. Cantidades relativas

Una *partícula de masa* $m \geq 0$ en un espaciotiempo (M, g, τ), es una curva (no constante) $\gamma : I \to M$ tal que

$$g(\gamma'(u), \gamma'(u)) = -m^2 \quad \text{y} \quad \gamma'(u) \quad \text{señala al futuro,}$$

(i.e. $\gamma'(u)$ pertenece a la clausura, en $T_{\gamma(u)}M$, del cono temporal $\tau(\gamma(u))$ para cualquier u de I.

Una partícula de masa $m = 0$ se llama un *fotón*. Si $m = 1$ diremos que es un *observador*. El conjunto imagen, Imγ, se conoce como la *línea del universo* de γ.

El campo de velocidades $\gamma'(u)$ se llama el *momento-energía* (o *4-velocidad*) de γ y $\frac{D\gamma'}{du}(u)$ la *4-aceleración* de γ.

Se dice que γ *cae libremente* cuando $\frac{D\gamma'}{du} = 0$, es decir, cuando γ es una geodésica de (M, g).

Sea $\gamma : I \to M$ un observador. Entonces $\forall u_0, u \in I$,

$$\int_{u_0}^{u} \sqrt{-g(\gamma'(u), \gamma'(u))}\, du \;=\; u - u_0,$$

(ya que el integrando es igual a 1). Por esta razón, al parámetro $u \in I$ se le llama el *tiempo propio* de γ; y se interpreta como el tiempo que marca un reloj que viaja con γ.

Si $\alpha : I \to M$ es una curva temporal (i.e. $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) < 0$) que señala al futuro, entonces es posible reparametrizar α para obtener un observador γ. En efecto, basta tomar

$$\gamma(u) = \alpha(s(u)), \quad \text{donde} \quad u(s) = \int_{s_0}^{s} \sqrt{-g(\alpha'(s), \alpha'(s))}\, ds.$$

Una motivación matemática de esta definición de partícula relativista sería la siguiente:

Imaginemos un cuerpo puntual, que se mueve en una línea recta, no sometido a fuerza gravitatoria alguna. Sea $m > 0$ su masa.

El movimiento está descrito por una función C^∞,

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x(t),$$

que da el vector de posición, en el instante t, desde un punto fijo.

Sea $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ su velocidad, que supondremos cumple

$$|v(t)| < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

(1 es la velocidad de la luz en unidades geométricas).

Para cada (x, m), en las condiciones anteriores, existe una única partícula $\gamma : I \to \mathbb{L}^2 := (\mathbb{R}^2, dx_1^2 - dx_2^2, \tau^0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_2})$, $0 \in I$, $\gamma_2(0) = 0$, con $\mathrm{Im}(\gamma)$ cerrado, de masa m en el espaciotiempo $\mathbb{L}^2$, tal que $\gamma_1 = x \circ \gamma_2$.

En efecto, basta definir $\gamma(u) := ((x \circ s^{-1})(u), s^{-1}(u))$, siendo $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \sqrt{1 - v(y)^2} dy.$$

Es decir, reparametrizar convenientemente el grafo $t \to (x(t), t)$ de x en $\mathbb{R}^2$.

Recíprocamente, si $\gamma : I \to \mathbb{L}^2$ es una partícula de masa $m > 0$, $0 \in I$, $\gamma_2(0) = 0$, tal que $\mathrm{Im}(\gamma)$ es cerrado, entonces existe una única curva $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma_1 = x \circ \gamma_2$ y además, $|\frac{dx}{dt}| < 1$ en todo punto de $\mathbb{R}$.

Un *observador instantáneo* (cualquiera de nosotros "aquí y ahora") es un par (z, Z), donde $z \in M$ y $Z \in T_zM$, es tal que $g(Z, Z) = -1$ y Z señala al futuro. Claramente Z representa la 4-velocidad de un observador en un instante de su tiempo propio.

Asociada a (z, Z) se tiene la siguiente descomposición ortogonal

$$T_zM = L\{Z\} \oplus L\{Z\}^{\perp},$$

donde $L\{Z\}$ es el subespacio 1-dimensional de T_zM generado por Z y

$$\left(L\{Z\}^{\perp}, g|_{L\{Z\}^{\perp}}\right)$$

es un subespacio 3-dimensional definido positivo, que llamaremos el *espacio físico observado* por (z, Z) y que representa el espacio euclídeo instantaneo que ve un observador con el como origen.

Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una partícula con $\gamma(u) = z$. Según la descomposición anterior, escribiremos

$$\gamma'(u) = eZ + P.$$

Entonces $e = -g(\gamma'(u), Z)$, que es positivo (aunque $m = 0$) se llama la *energía* que (z, Z) mide de $\gamma(u)$ y a P el *3-momento* relativo a (z, Z).

Además, se define $v := \frac{1}{e}P$ como la *velocidad* de $\gamma(u)$ medida por (z, Z).

Ocurre que

$$0 \leq ||v|| := \sqrt{g(v, v)} \leq 1$$

y

$$||v|| = 1 \Longleftrightarrow m = 0.$$

Si $m > 0$ (y por tanto $||v|| < 1$) obtenemos $-m^2 = -e^2 + e^2||v||^2$, de donde se sigue que

$$e = \frac{m}{\sqrt{1 - ||v||^2}}.$$

Por tanto,

$$e = m \Longleftrightarrow v = 0,$$

(estamos usando unidades para las se toma $c = 1$).

Ahora bien, en el sistema CGS (cegesimal) se tiene que

$$e = mc^2$$

si, y sólo si, la velocidad de $\gamma(u)$ medida por (z, Z) es cero.

A fin de comprobar en la práctica la dependencia de estas cantidades del observador instantaneo, consideremos la partícula de masa m, γ en $\mathbb{L}^2$ construida antes a partir de (x, m), $m > 0$. El observador instantáneo $\left(\gamma(u), \frac{\partial}{\partial u_2}(\gamma(u))\right)$ asigna a $\gamma'(u)$:

$$e = \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{dx}{dt})^2}}, \quad P = \frac{m\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - (\frac{dx}{dt})^2}} \frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma(u)), \quad v = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma(u)).$$

Mientras que el observador instantáneo $(\gamma(u), Z)$, siendo $Z = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma(u)) + \frac{5}{3}\frac{\partial}{\partial u_2}(\gamma(u))$ asigna a $\gamma'(u)$:

$$\tilde{e} = \frac{m(5 - 4\,\frac{dx}{dt})}{3\sqrt{1 - (\frac{dx}{dt})^2}}, \; \tilde{P} = \frac{m(5\frac{dx}{dt} - 4)}{3\sqrt{1 - (\frac{dx}{dt})^2}}\, \bar{E}(\gamma(u)), \; \tilde{v} = \frac{5\,\frac{dx}{dt} - 4}{5 - 4\,\frac{dx}{dt}}\, \bar{E}(\gamma(u)).$$

donde $\bar{E}(\gamma(u)) = \frac{5}{3}\frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma(u)) + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial u_2}(\gamma(u))$.

1.b) La conexión de Fermi-Walker

Intuitivamente, el espacio físico 3-dimensional que un observador γ percibe cambia a medida que transcurre su tiempo propio. Esta afirmación se concreta en

$$T_{\gamma(u)}M = L\{\gamma'(u)\} \oplus L\{\gamma'(u)\}^{\perp},$$

para todo $u \in I$. Por tanto, si γ observa un vector $v \neq 0$ en el instante u_1 de su tiempo propio, es decir, $v \in L\{\gamma'(u_1)\}^{\perp}$ y en el instante $u_2 > u_1$ observa $\bar{v} \in L\{\gamma'(u_2)\}^{\perp}$, con $||\bar{v}|| = ||v||$,

¿Cómo podrá saber γ que $\bar{v}$ se ha obtenido al rotar v?

En el caso muy especial que γ estuviese en caída libre, el transporte paralelo a lo largo de γ desde u_1 hasta u_2, $P^{\gamma}_{u_1,u_2}$, lleva $L\{\gamma'(u_1)\}^{\perp}$ en $L\{\gamma'(u_2)\}^{\perp}$ y puede decir si v y $\bar{v}$ tienen la misma dirección espacial, comparando $P^{\gamma}_{u_1,u_2}(v)$ y $\bar{v}$.

Pero,

¿Qué podrá hacer γ cuando no esté en caida libre para responder a la misma pregunta?

La herramiente matemática apropiada en este caso pasa por definir una conexión a lo largo de γ (un objeto privado de γ) cuyo transporte paralelo sea una isometría y conserve la descomposición ortogonal anterior.

Para cada observador $\gamma : I \longrightarrow M$, en el espaciotiempo (M, g, τ) ponemos

$$T_{\gamma(u)}M = T_u \oplus R_u,$$

donde $T_u := L\{\gamma'(u)\}$ y $R_u := T_u^{\perp}$ y, para $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$, Y^T, $Y^R \in \mathfrak{X}(\gamma)$ son tales que

$$Y = Y^T + Y^R,$$

según esa descomposición.

Representemos por ∇ la conexión a lo largo de γ inducida por la conexión de Levi-Civita de g, i.e.

$$\nabla_{\frac{d}{du}} Y \quad \text{es la derivada covariante} \quad \frac{DY}{du}.$$

Modificando adecuadamente la conexión inducida sobre γ podemos decir:

Teorema. Para cada observador $\gamma : I \to M$, en el espacio-tiempo (M, g, τ) existe una única conexión $\hat{\nabla}$ a lo largo de γ que cumple

$$\hat{\nabla}_V Y = (\nabla_V Y^T)^T + (\nabla_V Y^R)^R$$

donde $V \in \mathfrak{X}(I)$, $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$, y ∇ es la conexión a lo largo de γ inducida por la conexión de Levi-Civita de g.

Se llama a $\hat{\nabla}$ la *conexión de Fermi-Walker* de γ.

(1) Si $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ cumple $Y = Y^R$, es decir si Y_u representa un observable para $\gamma(u)$, entonces también $\hat{\nabla}_V Y = (\nabla_V Y^R)^R \in R_u$.

(2) $\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y = \frac{DY}{du} + g(Y, \gamma')\frac{D\gamma'}{du} - g(Y, \frac{D\gamma'}{du})\gamma'$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

(3) $\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y = \frac{DY}{du}$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $\iff$ $\frac{D\gamma'}{du} = 0$.

(4) $\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} \gamma' = 0$, para todo observador γ.

(5) $\frac{d}{du} g(Y_1, Y_2) = g(\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y_1, Y_2) + g(Y_1, \hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y_2)$, para cualesquiera $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Proposición. Dados un observador γ, y $u_1, u_2 \in I$, $u_1 < u_2$, para cada $V \in T_{\gamma(u_1)}M$ existe un único campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y = 0 \quad \text{e} \quad Y(u_1) = V.$$

Además la aplicación $\hat{P}^{\gamma}_{u_1,u_2} : T_{\gamma(u_1)}M \longrightarrow T_{\gamma(u_1)}M$ es una isometría lineal y lleva R_{u_1} en R_{u_2}

Se llama a $\hat{P}^{\gamma}_{u_1,u_2}$ el *transporte paralelo Fermi-Walker* de γ.

¡Con $\hat{P}^{\gamma}_{u_1,u_2}$, el observador γ es capaz de comparar los espacios físicos relativos en dos instantes diferentes de su tiempo propio!

Decimos que $U_1 \in R_{u_1}$ y $U_2 \in R_{u_2}$, con $||U_1|| = ||U_2|| > 0$ tienen la *misma dirección espacial* si

$$\hat{P}^{\gamma}_{u_1,u_2}(U_1) = U_2$$

Equivalentemente, desde un punto de vista más físico, si consideramos una base de campos de vectores a lo largo de γ y paralelos Fermi-Walker Y_1, Y_2, Y_3, obtenidos a partir de una base ortonormal de $R_{\gamma(u_1)}$ podremos decir que $U_1 \in R_{u_1}$ y $U_2 \in R_{u_2}$ tienen la misma dirección espacial si

$$g\big(U_1, Y_i(u_1)\big) = g\big(U_2, Y_i(u_2)\big), \quad i = 1, 2, 3,$$

por eso se llama a $u \mapsto \big(Y_1(u), Y_2(u), Y_3(u)\big)$ unos *ejes giroscópicos* para el observador γ.

1.c) Efectos gravitatorios en términos de curvatura

Imaginemos un observador $\gamma : I \to M$ en un espaciotiempo (M, g, τ). Es natural pensar en la relación de γ con observadores "cercanos".

Si γ es la curva base de una variación suya por observadores γ_s, entonces los que tengan "s" pequeño se pueden pensar próximos a $\gamma(= \gamma_0)$. Una tal variación determina $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Si ponemos

$$Y = \tilde{Y} + g(\gamma', \tilde{Y})\gamma'$$

entonces $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es la proyección ortogonal sobre el espacio físico relativo de γ en cada punto, y puede pensarse cómo *lo que observa γ de otros observadores cercanos.*

Para cada $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $Y_u \in R_u$, para todo $u \in I$, llamamos a $\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y$ la *3-velocidad* de Y relativa a γ, y a $\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} \hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y$ la *3-aceleración* de Y relativa a γ.

Usando el tensor de curvatura R de la conexión de Levi-Civita de g, cada observador instantáneo (z, Z) dispone de un operador lineal

$$\Psi_Z : L\{Z\}^{\perp} \to L\{Z\}^{\perp}, \quad \Psi_Z(V) = R(Z, V)Z,$$

que es autoadjunto respecto a $g|_{L\{Z\}^{\perp}}$ y cumple

$$\mathrm{traza}(\Psi_Z) = -\mathrm{Ric}(Z, Z),$$

siendo Ric el tensor de Ricci de la conexión de Levi-Civita de g.

Si γ es cualquier observador de un campo de observadores en caida libre Q, definido en un cierto subconjunto abierto de M, e $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $Y_u \in R_u$, es un campo de Jacobi sobre γ, entonces

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} \hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y = \Psi_{\gamma'(u)}(Y_u).$$

Así, la función

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{traza}(\Psi_Q) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{Ric}(Q,Q)$$

puede verse como una media de las aceleraciones (escalares) de los observadores de Q.

La experiencia nos dice que la gravedad, en media, atrae. Por tanto debe ocurrir que

$$\mathrm{Ric}(Q,Q) \geq 0,$$

para todo campo de observadores en caida libre, definido localmente, del espaciotiempo. Como todo $v \in T_pM$, que sea temporal unitario y señale al futuro se extiende localmente a un campo de observadores en caida libre, ocurrirá $\mathrm{Ric}(v,v) \geq 0$, que, por un argumento de álgebra lineal, debe cumplirse también para todo vector temporal.

Por tanto, la forma matemática de expresar que

los efectos gravitatorios son, en media, atractivos

es la siguiente condición de curvatura:

$$\mathrm{Ric}(v,v) \geq 0, \text{ para todo } v \text{ temporal en } T_pM, \ \forall p \in M.$$

Esta condición se llama la

condición de convergencia temporal,

también se obtiene a partir de la Ecuación de campo de Einstein (con constante cosmológica cero), y nos da una obstrucción a priori sobre qué métricas de Lorentz son físicamente relevantes; de hecho, hay autores que introducen la noción de espaciotiempo incluyendo como parte de la definición la condición de convergencia temporal.

También, en cada instante u del tiempo propio de cualquier observador γ de un campo de observadores Q, tenemos definido otro operador

$$A_Q : L\{Z\}^{\perp} \to L\{Z\}^{\perp}, \quad A_Q(V) = -\nabla_V Q,$$

(el signo "-" se escribe por convenio) que no es, en general, ni autoadjunto ni anti-autoadjunto respecto a $g|_{L\{Z\}^{\perp}}$, pero cumple

$$\mathrm{traza}(A_Q) = -\mathrm{div}(Q),$$

siendo $\mathrm{div}(Q)$ la divergencia de Q respecto a la conexión de Levi-Civita de g.

Este operador aparece en la conocida ecuación de Raychaudhuri

$$\mathrm{div}(\nabla_Q Q) = \mathrm{Ric}(Q, Q) + \mathrm{traza}(A_Q^2),$$

que tan útil ha sido en Relatividad para el estudio de singularidades.

Curiosamente, y de manera independiente, geómetras riemannianos (de la talla de Bochner o Yano) usaban una fórmula, que se reduce a la anterior cuando el campo al que se le aplica tiene divergencia constante, como herramienta para desarrollar la técnica de Bochner en variedades de Riemann.

Proposición. Para cada u del tiempo propio de cualquier observador γ de un campo de observadores Q, se cumple

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{du}} Y_u = -A_Q(Y_u),$$

donde $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es la proyección ortogonal sobre el espacio físico relativo de γ, en cada punto, de $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, que es Lie-paralelo sobre γ con respecto a Q; es decir, $[Q, W] = 0$ sobre γ, para toda extensión local W de $\tilde{Y}$.

Este resultado nos permite interpretar la función

$$-\frac{1}{3}\,\mathrm{traza}(A_Q) = \frac{1}{3}\,\mathrm{div}(Q)$$

como una media de 3-velocidades (escalares) relativas de los observadores de Q. Pero

$$\mathrm{traza}(A_Q) = -\mathrm{div}(Q).$$

Por tanto,

> La condición $\mathrm{div}(Q) > 0$ (resp. < 0) es la forma matemática para decir que los observadores de Q están, en promedio, separándose (resp. juntándose).

1.d) Electromagnetismo

La *teoría electromagnética relativista* (no cuántica) es una de las partes más elegantes de la Física. Se le califica de *formalmente simple*. Por supuesto, el electromagnetismo es, desde el punto de vista humano, la más importante de las interacciones.

Si $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$ y $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, son los *campos eléctrico* y *magnético* clásicos; $\sigma(x,t)$ es la *densidad de carga eléctrica* (carga por unidad de volumen) y $\vec{j} = \vec{j}(x,t)$ es la *densidad de corriente eléctrica* (carga por unidad de área y unidad de tiempo) entonces las *ecuaciones de Maxwell* (clásicas), con $c = 1$, $8\pi G = 1$, se escriben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(Ley de Biot-Savart)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma \quad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{j} \quad \text{(Ley de Ampère-Maxwell)}$$

Notemos que $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{j}$ son campos de vectores, dependientes del parámetro t, sobre $\mathbb{R}^3$. Si g_u representa la métrica Euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ son las funciones div$\vec{B}$ y div$\vec{E}$ (relativas a g_u) que dependen de (x, t); $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{Rot}\vec{E}$, $\quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{Rot}\vec{B}$, y si $\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} E_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, entonces

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial B_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Pongamos $u_4 = t$ y sea F la 2-forma sobre $\mathbb{L}^4$ definida por

$$F = \sum_{i=1}^{3} E_i du_i \wedge du_4 + \big(B_1 du_2 \wedge du_3 + B_2 du_3 \wedge du_1 + B_3 du_1 \wedge du_2\big).$$

Es importante notar que F contiene la misma información que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ juntos.

Sea $J = \sum_{i=1}^{4} J_i \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^4)$, donde $\vec{j} = \sum_{i=1}^{3} J_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ y $J_4 = \sigma$. Entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dF = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{j} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\hat{F} = 4\pi J,$$

siendo $\hat{F}$ el campo de tensores 2-contravariante equivalente con F respecto de la métrica de Lorentz usual de $\mathbb{L}^4$, $g = \sum_{i=1}^{3}(du_i)^2 - (du_4)^2$, y $\mathrm{div}\hat{F}$ es el campo de vectores sobre $\mathbb{L}^4$ definido por

$$\phi(\mathrm{div}\hat{F}) = \sum_{i=1}^{4} (\nabla_{X_i}\hat{F})(\phi, \omega_i),$$

siendo $\omega_i(X_j) = \delta_{i\,j}$, y ϕ cualquier 1-forma sobre $\mathbb{L}^4$.

Con este *truco* escribimos las ecuaciones de Maxwell clásicas de una forma mucho más sencilla sobre el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$. Además nos sugiere introducir la siguiente noción:

> Dado un espaciotiempo (M, g, τ), definimos un *campo electromagnético* como una 2-forma F sobre M.

Veamos cómo cada observador instantáneo (z, Z) deduce dos *cantidades relativas* a partir de F.

Si representamos por $\tilde{F}_z$ el operador de T_zM dado por

$$g\big(X, \tilde{F}_z(Y)\big) = F_z\big(X, Y\big) \qquad \forall X, Y \in T_zM,$$

entonces $E := \tilde{F}_z(Z) \in \mathrm{L}\{Z\}^\perp$ se llama el *vector eléctrico* que mide (z, Z) de F.

En $\mathbb{L}^4$, si $z \in \mathbb{L}^4$ y $Z = \frac{\partial}{\partial u_4}(z)$, el vector eléctrico observado por (z, Z) del campo electromagnético F que hemos construido es precisamente

$$\sum_{i=1}^{3} E_i(z) \frac{\partial}{\partial u_i}(z).$$

Haciendo esto punto a punto, resulta que que el campo de observadores $\frac{\partial}{\partial u_4}$ observa de F un campo de vectores sobre $\mathbb{L}^4$ claramente identificable con el campo eléctrico clásico $\vec{E}$.

Supongamos ahora que M es orientable y sea Ω el elemento de volumen métrico correspondiente a g (por ejemplo, $\Omega = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \wedge du_4$ en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski).

Teniendo en cuenta que la aplicación

$$L\{Z\}^{\perp} \longrightarrow A_z(L\{Z\}^{\perp}), \quad V \longmapsto \Omega_V,$$

donde $\Omega_V(X,Y) := \Omega(X,Y,V,Z)$, $\forall X,Y \in L\{Z\}^{\perp}$, es un isomorfismo de espacios vectoriales; y si $F'_z := F_z|_{L\{Z\}^{\perp}}$, entonces existe un único $B \in L\{Z\}^{\perp}$ tal que

$$\Omega_B = F'_z.$$

Entonces a B se le llama el *vector magnético* que (z,Z) mide de F. En $\mathbb{L}^4$, para $z \in \mathbb{L}^4$ y $Z = \frac{\partial}{\partial u_4}(z)$, tenemos que B es

$$\sum_{i=1}^{3} B_i(z)\frac{\partial}{\partial u_i}(z).$$

Haciendo esto punto a punto, el campo de observadores $\frac{\partial}{\partial u_4}$ observa de F un campo de vectores sobre $\mathbb{L}^4$ claramente identificable con el campo magnético clásico $\vec{B}$.

El concepto de campo electromagnético unifica los conceptos prerrelativistas de campo eléctrico y campo magnético, que son conceptos relativos. De hecho, en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$ si $F = A\, du_3 \wedge du_1$ y suponemos $A(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{L}^4$, se tiene lo siguiente:

Vectores observados de $F \longrightarrow$ Observador $\downarrow$	Vector eléctrico	Vector magnético
$\left(z, \frac{\partial}{\partial u_4}\vert_z\right)$	0	$A(z)\frac{\partial}{\partial u_2}\vert_z$
$\left(z, \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial u_1}\vert_z + \frac{5}{3}\frac{\partial}{\partial u_4}\vert_z\right)$	$\frac{4}{3}A(z)\frac{\partial}{\partial u_3}\vert_z$	$\frac{5}{3}A(z)\frac{\partial}{\partial u_2}\vert_z$

Contenidos

1. **Lenguaje y terminología**

   a) Partículas y observadores. Cantidades relativas

   b) La conexión de Fermi-Walker

   c) Efectos gravitatorios en términos de curvatura

   d) Electromagnetismo

2. **Solucionando un problema de consistencia [$\longleftarrow$]**

   a) La paradoja de los gemelos

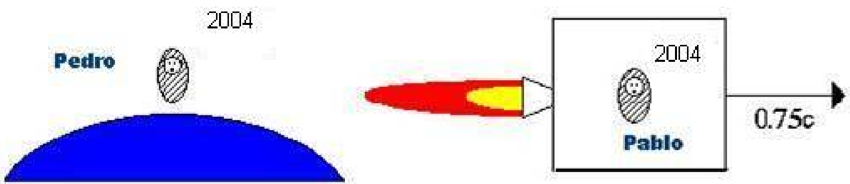
3. **Prediciendo la existencia de singularidades**

   a) Teorema de Raychaudhuri

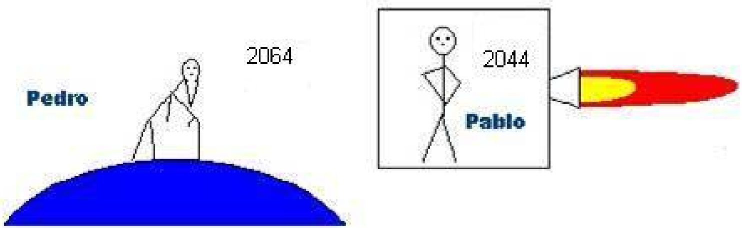
   b) Teorema de Hawking

La paradoja de los gemelos

Uno de los gemelos abandona la Tierra en una nave espacial



Cuando Pedro tiene 60 años, Pablo regresa a la Tierra con sólo 40 años



Lo paradógico de esta situación es que hay una pérdida de simetría respecto de ambos observadores (en contra de la simetría existente en otros fenómenos relativistas, como en la contracción de Lorentz por ejemplo).

La verdad es que no puede haber simetría entre ambos observadores:

Pablo está sujeto a una aceleración mientras que Pedro no.

Pedro se describe en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski como el observador en caida libre

$$\gamma_1(u) = A + u\,\frac{AC}{\|AC\|},$$

mientras que Pablo puede describirse como los dos observadores en caida libre

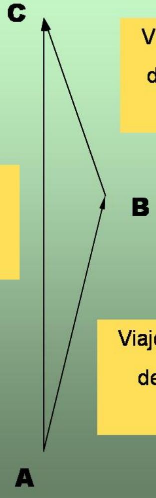
$$\gamma_2(\tilde{u}) = A + \tilde{u}\,\frac{AB}{\|AB\|} \quad \text{y} \quad \gamma_3(\hat{u}) = B + \hat{u}\,\frac{BC}{\|BC\|},$$

correspondientes a su viaje de ida y a su viaje de vuelta, respectivamente.

Los vectores AB y BC son temporales y señalan al futuro, por tanto $AC(= AB + BC)$ es temporal y señala al futuro. Según la desigualdad de Minkowski lorentziana se tendrá:

$$\|AB + BC\| > \|AB\| + \|BC\|.$$

Descripción espacio-temporal



Viaje espacio-temporal
de vuelta para **Pablo**
20 años

Viaje espacio-temporal
de **Pedro**
60 años

||AC|| > ||AB|| +||BC||

Viaje espacio-temporal
de ida para **Pablo**
20 años

Contenidos

3.a) Teorema de Raychaudhuri

Sea P un campo de partículas de masa $m > 0$ sobre (M, g, τ) y sea $\eta \in C^\infty(M)$, $\eta > 0$ la densidad de masa en el espaciotiempo. La (totalidad de la) masa la representa el tensor tensión-energía

$$T = \eta \, P^\flat \otimes P^\flat = \rho \, Q^\flat \otimes Q^\flat,$$

donde $\rho := \eta m^2 > 0$ es la densidad de energía que miden los observadores en $Q := \frac{1}{m} P$, y $P^\flat$, $Q^\flat$ las 1-formas g-equivalentes a P y Q. En ausencia de radiación electromagnética, la ecuación de Einstein se escribe

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} \rho \, g = \rho \, Q^\flat \otimes Q^\flat,$$

de donde deducimos:

(1) $\rho = S$, la curvatura escalar de g,

(2) $Q(\rho) + \rho \, \mathrm{div}(Q) = 0$ y

(3) $\nabla_Q Q = 0.$

Supongamos, además, que Q es irrotacional, i.e. que el operador A_Q es, en cada punto, autoadjunto respecto a $g_{|\,L\{Q\}^\perp}$ (o equivalentemente que la distribución $L\{Q\}^\perp$ sea integrable). De esta forma expresamos que, *para los observadores de Q, la fuente gravitatoria no rota*. De la ecuación de Raychaudhuri, teniendo en cuenta la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$Q(\mathrm{div}(Q)) \leq -\frac{1}{2}\,\rho - \frac{1}{3}\,(\mathrm{div}(Q))^2.$$

Tomamos un observador γ de Q (en caida libre por (3)) y definimos las funciones $f = \mathrm{div}(Q) \circ \gamma$, $h = \rho \circ \gamma$. La desigualdad anterior junto con (2) proporcionan

$$f' \leq -\frac{1}{2}\,h - \frac{1}{3}\,f^2 \qquad \text{y} \qquad (\log h)' = -f,$$

que mediante una manipulación elemental nos proporciona:

Teorema. (Raychaudhuri, 1955) Sea (M, g, τ) un espacio-tiempo sobre el que no hay radiación electromagnética y cuya masa está representada por un campo de partículas P, de masa $m > 0$, y densidad $\eta \in C^\infty(M)$, $\eta > 0$. Supongamos que se verifican la ecuación de Einstein con

$$T = \eta\, P^\flat \otimes P^\flat$$

y que el campo de observadores

$$Q := \frac{1}{m} P$$

es irrotacional. Si $\gamma : [0, a) \to M$ es un observador de Q tal que $(\mathrm{div} Q)_{\gamma(0)} = b \in (-\infty, 0)$, entonces

$$a \leq \frac{3}{|b|}.$$

Además, si se da la igualdad $\lim_{u \to \frac{3}{|b|}} \rho(\gamma(u)) = \infty$.

Recordemos que $\mathrm{div}(Q) < 0$ se interpreta como que los observadores están, en media, aproximándose. La hipótesis $\mathrm{div}(Q)_{\gamma(0)} < 0$ implica

$$\mathrm{div}(Q)_{\gamma(u)} < 0$$

para todo $u > 0$, como consecuencia de la ecuación de Einstein.

Este resultado se interpreta de una forma bastante desagradable para el observador γ:

> En un tiempo propio finito, γ *desaparece*. Además, en los últimos instantes de su vida, γ percibirá que *sobre él actúa una densidad de energía enorme,* no acotada.

En breve:

> *En un universo en contracción, aquellos observadores que no perciben rotación de la fuente gravitatoria, acaban su vida engullidos en un agujero negro.*

El teorema de Raychaudhuri se considera como pionero en la prueba de existencia de agujeros negros. Su prueba es simple y la interpretación física de sus ingredientes y consecuencias muy clara. Sin embargo, en su día no fue muy considerado pues supone un modelo relativista del universo (un “dust”) al que se le tachó de poco realista.

También mediante técnicas de Geometría de Lorentz, Hawking, Penrose y otros, estudiaron sistemáticamente en los 70 este tipo de singularidades del espaciotiempo. La interpretación física de alguno de los teoremas de Geometría de Lorentz global que obtuvieron es:

> Las estrellas, siempre que posean masa suficiente, se derrumban sobre ellas mismas por la acción de su propia gravedad, se transforman en agujeros negros: regiones del espaciotiempo donde la gravedad es tan fuerte que ni siquiera la luz podría salir de ellas (por tanto no las podríamos ver).

Pero, históricamente, el primer teorema de existencia de agujeros negros lo dio el matemático P. S. de Laplace en 1799. Para ello, usó la teoría newtoniana de gravitación (propia de la época) probando que:

> Si existiese una estrella con la misma densidad que tiene la Tierra, y con diámetro 250 veces el del Sol, su gravedad sería tan potente que los rayos de luz que emite no llegarían a nosotros, con lo cual sería invisible.

Los científicos de la época dieron una respuesta de autoridad afirmando que:

> *Es imposible que una estrella de esas dimensiones exista.*

3.b) Teorema de Hawking

El teorema de Raychaudhuri predice la existencia de una singularidad en el futuro: ciertas geodésicas temporales, inextendibles y que señalan al futuro son incompletas por la derecha.

Por contra, en el resultado que veremos a continuación, debido a Hawking, obtendremos la existencia de singularidades en el pasado: geodésicas temporales, inextendibles y que señalan al futuro son incompletas por la izquierda. Este teorema no es el más relevante sobre el tema pero si quizás el más sencillo de entender.

Debemos notar que la incompletitud de las geodésicas temporales de un espaciotiempo sólo depende de quien sea la conexión de Levi-Civita y no de la orientación temporal. Pero, para interpretar físicamente este tipo de resultados, la orientación temporal es crucial.

Teorema. (Hawking, 1967) Sea (M, g, τ) un espaciotiempo y supongamos que se verifican:

1. $\mathrm{Ric}(V, V) \geq 0$ para todo vector tangente temporal V;
2. Existe una hipersuperficie espacial S embebida en M y compacta;
3. La segunda forma fundamental de S relativa a la orientación temporal τ tiene traza positiva en todo punto de S.

Entonces cada geodésica temporal que señale al futuro e intersecte ortogonalmente a S, digamos $\gamma : (-b, 0] \rightarrow M$, $b > 0$, $\gamma(0) \in S$ y $\gamma'(0) \perp T_{\gamma(0)}M$ con $g(\gamma', \gamma') = -1$, cumple

$$-b \geq -\frac{1}{c},$$

siendo $3c$ el mínimo de la traza de la segunda forma fundamental sobre S.

Mientras que en el teorema de Raychaudhuri se predice un colapso hacia un agujero negro, el teorema de Hawking afirma que alguna vez, hace ya mucho, existió un big bang: singularidad inicial a partir de la que surgió el espaciotiempo.

Comentemos que:

(1) Es la condición de convergencia temporal, que se satisface si se supone que se cumple la ecuación de Einstein (con constante cosmológica cero).

(2) Es la forma matemática de describir un universo espacialmente cerrado.

(3) Es más difícil de interpretar físicamente. Veamos de qué forma nos dice que el universo está en expansión:

Si representamos por ∇ la conexión de Levi-Civita de M, ξ el campo de vectores normal unitario de S señalando al futuro y $u, v \in T_pM$, entonces la *segunda forma fundamental* de S relativa a ξ es

$$h(u, v) = -g(Av, w),$$

siendo

$$Av := -\nabla_v \xi,$$

el *operador de Weingarten* con respecto a ξ. Llamamos a

$$H = -\frac{1}{3}\,\mathrm{traza}(A)$$

la *curvatura media* de S relativa a ξ.

Entonces (3) nos dice que

$$H \geq c > 0,$$

sobre todo S, donde c representa el valor mínimo de H sobre el variedad compacta S.

Si movemos S por direcciones normales usando la *variación normal*

$$\psi_u(p) = \exp_p(u\,\xi_p),$$

entonces para u pequeño $\psi_u : S \longrightarrow M$ define también una hipersuperficie espacial compacta de M, y se cumple

$$\mathrm{vol}\big(S, \psi_u^*(g)\big) = \mathrm{vol}(S) + u\,\frac{d}{du}\bigg|_{u_0} \mathrm{vol}\big(S, \psi_u^*(g)\big),$$

donde u_0 depende de u y está comprendido entre el y 0.

Ahora bien,

$$\left.\frac{d}{du}\right|_{0} \mathrm{vol}(S, \psi_u^*(g)) = 3\int_S H\,dV > 0,$$

de manera que

$$\left.\frac{d}{du}\right|_{u} \mathrm{vol}(S, \psi_u^*(g)) > 0,$$

para u próximo a 0. Así, para $u \geq 0$ próximo a cero,

$$\mathrm{vol}(S, \psi_u^*(g)) \geq \mathrm{vol}(S),$$

que se interpreta como una expansión del Universo.

Brevemente, el teorema de Hawking nos dice que un *universo en expansión* y *espacialmente cerrado* debe haber sido *singular en el pasado.*

Con respecto al teorema de Hawking hay que hacer dos preci-siones:

$1^{\underline{a}}$.- La idea de que el *universo está expandiéndose* no es nada reciente. De hecho, A. Friedmann (1922) y G. Lemaître (1927) descubrieron, usando una solución particular a la Ecuación de Einstein, que:

El universo debería estar dilatándose.

Einstein quedó maravillado del argumento que condujo a esta interpretación física (a pesar de lo restrictivo del modelo de espaciotiempo empleado) pero tardó en aceptar esta posibilidad.

En 1929, el famoso astrónomo E. Hubble obtuvo una *ley experimental de la expansión de las galaxias* (basada en observaciones con un telescopio) cuyas cifras coincidían con las obtenidas por Friedmann y Lemaître.

$2^{\underline{a}}$.- El teorema de Hawking predice la existencia de un primer momento del universo analizando a la vez una gran familia de soluciones a la ecuación de Einstein, pero no fue el primero en predecir el big bang. En efecto, Lemaître, usando un argumento de continuidad en su modelo cosmológico, pensó:

> *Si hoy en día el universo se dilata, en el pasado tuvo que ser mucho más pequeño, mucho más denso, condensado en un átomo primitivo.*

G. Gamow (discípulo de Friedmann) predijo en 1948 la existencia de una *cierta radiación* vestigio de los primeros instantes del inicio del universo.

A. Penzias y R. Wilson descubrieron en 1965 la radiación de fondo prevista por Gamow (en 1978 recibieron el premio Nobel de Física).