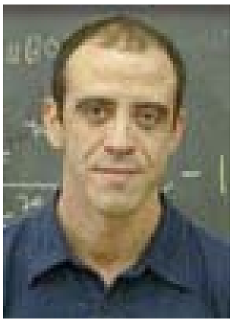
SALUTACIÓ

Dr. Sebastià Xambó Descamps
Degà de la Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya



PRESENTACIÓ DE L.CAFFARELLI

Dr. Xavier Cabré Vilagut
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

LLIÇÓ INAUGURAL

La ecuación del calor

Professor Luis Caffarelli
Department of Mathematics
University of Texas at Austin

SALUTACIÓ

Dr. Sebastià Xambó Descamps
Degà de la Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Abans de res, benvinguts a un nou curs. Especialment pe als nous alumnes. Estic segur que és un moment de grans il·lusions per a tots i tinc clar que un dels reptes que tenim és aconseguir que totes fructifiquin. I una de les meves il·lusions és que al final dels estudis podeu proclamar que no només s'han fet realitat les vostres il·lusions d'avui, sinó moltes més que ara potser us seria difícil imaginar.

Tot seguit, expressar un reconeixement. Des de l'any de les olimpíades hem tingut dos degans que han fet palès, junt amb els seus equips, que podrien donar lliçons de com navegar envers nous horitzons en temps de profunds canvis. Em plau aprofitar aquesta oportunitat per expressar un sentiment compartit de profund agraïment a les trajectòries dels Dr. Joan Solà-Morales i del Dr. Pere Pascual al capdavant de la Facultat, agraïment que hem volgut simbolitzar col·locant avui els seus retrats a la Sala de Juntes.

El curs 2001-2002 la Facultat celebrà el seu desè aniversari. Fou oportú, doncs, que la salutació del degà en l'acte inaugural es centrés en fer un balanç d'una dècada que per a nosaltres ha estat prodigiosa. Els curs passat ha estat de transició, ja que fa sis mesos es va produir la renovació de l'equip deganal. Estudiants, professors, personal d'administració i serveis, equip deganal, directors de departament, rector: en l'acte d'avui toca, més que mai, mirar endavant.

Avui ens toca a tots començar a somniar quina Facultat volem al final de la segona dècada. Avui ens toca a tots començar a construir el camí per aconseguir-ho. Sé que tenim tots les piles posades i que trobarem una visió del nostre futur que orientarà les nostres més profundes aspiracions. Aquesta formulació del futur que volem crear és el que ens guiarà d'una manera més segura per dur a terme la nostra missió i per estructurar la resposta als reptes que indefectiblement s'aniran presentant.

El repte més important, però tanmateix el més ple d'oportunitats, és l'harmonització dels estudis a l'Espai Europeu d'Educació Superior segons el que per simplificar en diem declaració de Bolònia. Al final d'aquest procés, hauríem d'haver aconseguit acreditar titulacions de Matemàtiques i d'Estadística, tant de grau com de màster, que ens permetessin no només seguir donant les millors sortides professionals als nostres estudiants, sinó augmentar la seva diversificació i millorar la seva qualitat. No només hauríem d'haver consolidat definitivament la marca d'excel·lència que té la Facultat, de ser la primera opció per a tothom que vulgui fer estudis de matemàtiques al nostre país, sinó que l'hauríem d'haver convertit en sinònim indiscutible d'excel·lència des de tots els punts de vista: qualitat de l'aprenentatge dels estudiants, qualitat de la docència i mestratge dels professors, qualitat dels serveis i del clima social, qualitat del doctorat, qualitat arreu i en tot moment. I tot això en el marc de la UPC, que ens ofereix oportunitats úniques de cultivar tot l'espectre de les matemàtiques, des de les més pures fins a les aplicacions científiques i tecnològiques més avançades.

Entre avui i aquest futur, hem de fer bé els deures. L'equip deganal hi estem treballant des del dia de la presa de possessió i voldríem tenir un calendari d'actuacions ben definit, i acceptat per la Facultat, abans d'acabar el trimestre. En línies generals, i amb la informació de la qual disposem avui, la hipòtesi de treball és introduir les noves titulacions el curs 2005-2006 i dedicar el curs 2004-2005 a fer proves pilot tant en relació als plans d'estudi pròpiament dits com en relació a l'acreditació. El present curs, doncs, bàsicament serà de preparació, el més completa possible, per poder experimentar durant el curs 2004-2005 fins allà on ens sigui viable.

A més dels deures que ens demana Bolònia, ara us voldria resumir els trets més importants del curs que comencem, i que hem dedicat a Henri Poincaré. Bàsicament ho hem fet perquè el 29 d'abril de 2004 serà el 150è aniversari del seu naixement. Tal com podeu llegir en el Full de setembre, es vol expressar així el desig de commemorar apropiadament una vida intensa i productiva dedicada a les matemàtiques i a la física matemàtica, així com ponderar i celebrar la repercussió fecunda de les seves idees al llarg dels anys.

El primer semestre hi haurà diverses conferències de la franja cultural. També s'han programat un nombre d'activitats relacionades amb algun aspecte de Poincaré que tindran lloc durant la Setmana de la Ciència (7-16 novembre), entre les quals m'agradaria destacar la convocatòria del ***Primer Premi Henri Poincaré*** per a treballs de recerca a secundària. Pel que fa al segon semestre, els esdeveniments més importants seran la jornada que se li dedicarà el dia 29 de gener de 2004, amb cinc conferències que aportaran perspectives sobre les línies cultivades per Poincaré que han tingut repercussions més fonamentals, i l'assignatura de lliure elecció *Vida i Obra d'Henri Poincaré.*

Partint de la premissa que la Facultat és, d'alguna manera, de tots els que l'estimen, estem ultimant la creació d'una associació d'amics de la FME. Encara que el gruix de l'entitat el formaran alumnes, exalumnes i professors, creiem que hi ha moltes altres persones a les quals els agradarà formar-ne part. En tot cas, es tracta de crear el que, almenys de moment, podem anomenar ***Xarxa FME***, i que hauria de servir no tant per promoure els principis i valors de la FME, la qual cosa sens dubte farà, sinó com a un òrgan que sabés aportar anàlisis crítiques constructives sobre el grau d'acompliment de la nostra missió envers l'entorn institucional, social i empresarial. En breu rebreu informació detallada sobre aquesta iniciativa i espero que la trobareu tant engrescadora per donar-vos-hi d'alta de seguida. La constitució serà durant el segon semestre, lligada a la programació sobre sortides professionals que es fa cada curs, i un primer ingredient que tenim previst tenir enllestit per aquell dia és un volum que contindrà els perfils professionals d'una mostra representativa dels nostres titulats.

També us vull dir que hem pensat publicar trimestralment un full de Notícies FME. El número 0, preparat com una prova pilot que cobreix el període 24 d'abril a 31 de juliol, el podeu trobar a la sortida si encara no el teniu. Tal com es demana al final d'aquest número preliminar, el nostre agraïment anticipat per a totes les col·laboracions que ens fareu arribar i que, no cal dir-ho, seran indispensables per fer que aquesta publicació assoleixi la utilitat que n'esperem.

Per acabar, és un deure molt agradable esmentar explícitament diversos agraïments. Al rector, la seva deferència a acceptar presidir aquest acte a continuació de la inauguració de l'Oficina de Suport a la Recerca Matemàtica; al Dr. Xavier Cabré, per avenir-se a fer la presentació del conferenciant, i al professor Luis Caffarelli per haver acceptat impartir la lliçó inaugural. Estem orgullosos de tenir el professor Caffarelli avui amb nosaltres, després d'haver participat al XVIII Congrés d'Equacions Diferencials i Aplicacions celebrat a Tarragona la setmana passada. Penso que convé estar molt atents primer a la presentació del Dr. Cabré i després a la lliçó del professor Caffarelli sobre *La ecuación del calor*, que estic segur ens ensenyarà a tots moltes coses.

Gràcies per haver volgut compartir aquesta hora amb nosaltres i molts èxits a tots!

PRESENTACIÓ DE L. CAFFARELLI

Dr. Xavier Cabré Vilagut
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Luis Caffarelli va néixer a Buenos Aires el 1948 i va obtenir el doctorat en Matemàtiques per la Universidad de Buenos Aires el 1972. Actualment és professor de Matemàtiques a la Universitat de Texas a Austin.

El professor Caffarelli ha realitzat la seva carrera científica als Estats Units. Ha estat professor a prestigioses institucions, com ara la Universitat de Chicago, l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton i el Courant Institute de la Universitat de Nova York. La seva àrea d'interès és l'Anàlisi Matemàtica i, més concretament, les Equacions en Derivades Parcials. Aquesta àrea, que conté les equacions clàssiques de la Física Matemàtica, inclou també equacions amb aplicacions més recents en la tecnologia (combustió, superconductors, cristalls líquids, disseny òptim, etcètera) i en matemàtica de les finances.

Luis Caffarelli és un dels matemàtics més originals entre els que treballen en aquesta àrea d'investigació, en la que posseeix una visió i intuïció remarcables i reconegudes mundialment. Ha fet un gran nombre de contribucions essencials en diversos camps de la teoria d'Equacions en Derivades Parcials, com ara les equacions de Navier-Stokes en dinàmica de fluids, el càlcul de variacions, o l'optimització. En concret, és el líder mundial en el camp dels problemes de frontera lliura. Testimoni recent d'aquest reconeixement és que va ser conferenciant plenari al International Congress of Mathematics celebrat el 2002 a Beijing.

Ha col·laborat, entre molts altres, amb matemàtics de la talla de Louis Nirenberg, Pierre-Louis Lions i Avner Friedman. Entre les nombroses col·laboracions científiques que té establertes amb grups d'arreu del món, especialment als Estats Units, Europa i Argentina, val a dir que a Espanya ha col·laborat amb els professors Xavier Cabré, Antonio Córdoba, Ireneo Peral i Juan Luis Vázquez.

Entre moltes altres distincions, Luis Caffarelli ha estat guardonat amb el Premi Stampacchia el 1982, el Premi Bocher el 1984, la medalla d'or de Pius XI, concedida el 1988 pel papa Joan Pau II i que només s'atorga a científics de la més extraordinària qualitat, i el nomenament el 1994 com a membre de l'Acadèmia Pontifícia de Ciències. És doctor honoris causa per l'École Normale Supérieure de París, per la Universitat Autònoma de Madrid i per la Universidad de la Plata a Argentina.

LLIÇÓ INAUGURAL

La ecuación del calor

Professor Luis Caffarelli
Departament of Mathematics
University of Texas at Austin

Fourier

La ecuación del calor fue propuesta por Fourier en 1807—en su memoria sobre la propagación del calor en los cuerpos sólidos.

En ella proponía además el germen de lo que pasaría a ser la Teoría de las Series de Fourier.

Tan controvertida fue esta última, que tomó quince años, hasta 1822, para que la Academia de Ciencias decidiese publicarla.

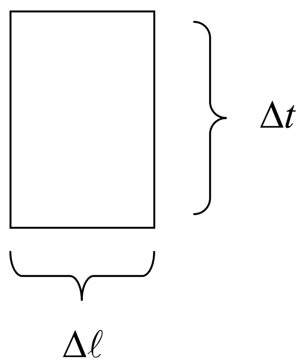
La ecuación del calor es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido.

Consideremos, para simplificar la presentación, una barra metálica aislada de longitud uno ($0 \le x \le 1$), inicialmente a temperatura cero, que después de un cierto tiempo, t_0, hemos calentado a una temperatura $T(x,t_0)$ manteniendo sus extremos, $x=0$ y $x=1$, a temperatura cero.

A partir de ese instante, t_0, dejamos que la temperatura $T(x,t_0)$ evolucione libremente y estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $T(x,t)$ para todo x en el intervalo [0,1], en todo tiempo futuro (es decir, para todo $t > t_0$), a partir de nuestro conocimiento de $T(x,t_0) = T_0(x)$ y del hecho que para $x=0$ o $x=1$ la temperatura permanece igual a cero.

Naturalmente no hay un “único modelo”. Hay infinitos, dependiendo de la precisión y el rango de valores en que pretendemos sea válido (altas o bajas temperaturas cambiarán el comportamiento del material, impurezas podrían ser relevantes, etc.).

El modelo propuesto por Fourier puede sintetizarse así:

1. La energía (calórica) necesaria para llevar un trozo de la barra de longitud $\Delta\ell$ de temperatura cero a temperatura T es proporcional a $\Delta\ell \times T$ (i.e., la *densidad de energía*, $e = kT$, es proporcional a la temperatura, con k una constante característica del material).
2. La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura. Más precisamente, la densidad de flujo de energía es
$$f(x) = -\theta\, D_x T$$
(o $\vec{f}(x) = -\theta\, \nabla T$ en varias dimensiones), nuevamente θ una constante característica del material.
3. La energía se conserva. Si tomamos un trozo de barra, $\Delta\ell$, la energía contenida en $\Delta\ell$ en el instante t_2 es igual a la energía que había en $\Delta\ell$ en el instante t_1 más el "flujo de energía" que penetró en los ex tremos x_1, x_2 en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2. Matemáticamente:
$$\int_{\Delta\ell} \big(e(x,t_2) - e(x,t_1)\big)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \big(-f(x_2,t) + f(x_1,t)\big)\, dt$$
Si dibujamos el rectángulo $\Delta\ell \times \Delta t$,


la primera integral ocurre en los bordes superior e inferior, mientras que la segunda ocurre en los laterales. Para poder compararlas, necesitamos poder escribirlas en un dominio común, el rectángulo. Lo logramos tomando derivadas:
$$\int_{\Delta\ell\times\Delta t} D_t e(x,t)\, dx\, dt = \int_{\Delta\ell\times\Delta t} -D_x f(x,t)\, dx\, dt$$

Como esta relación se debe verificar para cualquier rectángulo, no importa cuan pequeño, necesariamente los integrandos deben ser iguales:

$$D_t e + D_x f = 0\,.$$

Recordando las expresiones de *e* y *f* en función de *T*, obtenemos la ecuación

$$kD_t T = \theta D_{xx} T$$

En términos actuales las relaciones 1) y 2) se denominan *leyes constitutivas*, y establecen relaciones puntuales entre las *variables de estado*, *e*, *f*, *T* y sus derivadas, que dependen de las carácterísticas del material, etc. La relación 3), en cambio, es de índole diversa, es una *ley de conservación*, y establece que ciertas cantidades (masa, energía, etc.) se conservan a través de un proceso. Eso no quiere decir que sean puntualmente constantes. En un gas, por ejemplo, la masa fluye de una parte a otra. Lo que una ley de conservación hace es postular la existencia de una variable conservada, *e*, y un flujo, $\vec{f}$, que satisfacen

$$D_t e + D_x f = 0\,.$$

(o $D_t e + \mathrm{div}\vec{f} = 0$).

En definitiva, escribir un modelo matemático consiste en *elegir aquellas variables de estado que son relevantes para el fenómeno que queremos describir, encontrar* (en general experimentalmente) *sus leyes constitutivas, y como se conservan*.

Quizás la variación más importante que han sufrido estas ideas hoy en día está en tomar en cuenta efectos aleatorios.

Independientemente de cuan bueno sea un modelo matemático para representar la realidad, debe tener un mínimo de coherencia interna.

Si las relaciones que especificamos son excesivas, serán en general contradictorias y nuestro problema puede no tener solución.

Si son muy pocas, puede que tengamos muchas soluciones distintas, cuando en realidad esperamos tener una solución única.

Por eso el próximo paso de Fourier fue tratar de encontrar solución al problema. Dada la temperatura inicial, $T_0(x)$, y la condición

$$T(1,t) = T(0,t) = 0$$

para todo $t > t_0$, se trata de demostrar que existe una única función $T(x,t)$ que satisface la ecuación

$$T_t = T_{xx}$$

(hacemos $k = \theta = 1$).

Intentemos primero encontrar algunas soluciones para T particulares de la forma

$$T(x,t) = T_0(x)g(t).$$

Para ello es necesario que

$$g'(t)T_0(x) = g(t)T_0''(x)$$

o que

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{T_0''(x)}{T_0(x)} = \lambda \text{ constante}$$

(la única forma posible para que dos funciones de variables distintas sean iguales es que sean constantes ya que podemos fijar t y variar x sobre todos sus valores posibles).

Como $T_0(0) = T_0(1) = 0$, los únicos pares posibles son

$$T_0(x) = \operatorname{sen}(n\pi x)$$
$$g(t) = e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Pero el problema que estábamos considerando es lineal. Por lo tanto, cualquier combinación de soluciones

$$T(x,t) = \sum c_n \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$

es una nueva solución, con dato inicial

$$T_0(x) = \sum c_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Fourier demuestra entonces que cualquier función T_0 (digamos continuamente diferenciable, con $T_0(0) = T_0(1) = 0$) puede expresarse de esa manera, y da una formula para los coeficientes.

Nace así el análisis de Fourier, tan revolucionario que tomó quince años para que matemáticos de la época aceptaran que una serie de funciones altamente oscilatoria como es $\operatorname{sen}(n\pi x)$ pueda representar, por ejemplo, un arco de parábola o una poligonal.

El núcleo de Gauss y paseos al azar

Hay en realidad una forma más convincente de representar a la solución $T(x,t)$, y que exhibe más claramente las propiedades cualitativas de la propagación del calor. Consiste en poner inicialmente "masas puntuales".

Supongamos ahora que la barra es infinita, está a temperatura cero y logramos poner una "masa puntual" de una unidad calor en el origen y en el instante t_0. Es decir, logramos concentrar una cantidad $c=1$ de energía calórica en el origen de forma tan veloz que para nuestra escala de tiempos resulta instantánea.

¿Como evoluciona la temperatura a continuación?

Un pequeño análisis de autosemejanza: si $T(x,t)$ es una solución de la ecuación, también lo es $aT(bx,b^2t)$, lo cual nos permite calcular que en este caso

$$T(x,t)=\frac{1}{(\pi t)^{1/2}}e^{-x^2/4t}=G(x,t)$$

Este es el núcleo ("la campana") de Gauss, o fórmula de dispersión de error.

Si trasladamos la masa puntual a x_0, la nueva fórmula es

$$T(x,t)=G(x-x_0,t),$$

puesto que la ecuación es invariante por traslaciones.

Si superponemos masas puntuales de intensidades c_i en los puntos x_i

$$T(x,t)=\sum c_i G(x-x_i,t)$$

y finalmente, para una densidad de energía $e=T_0(x)$,

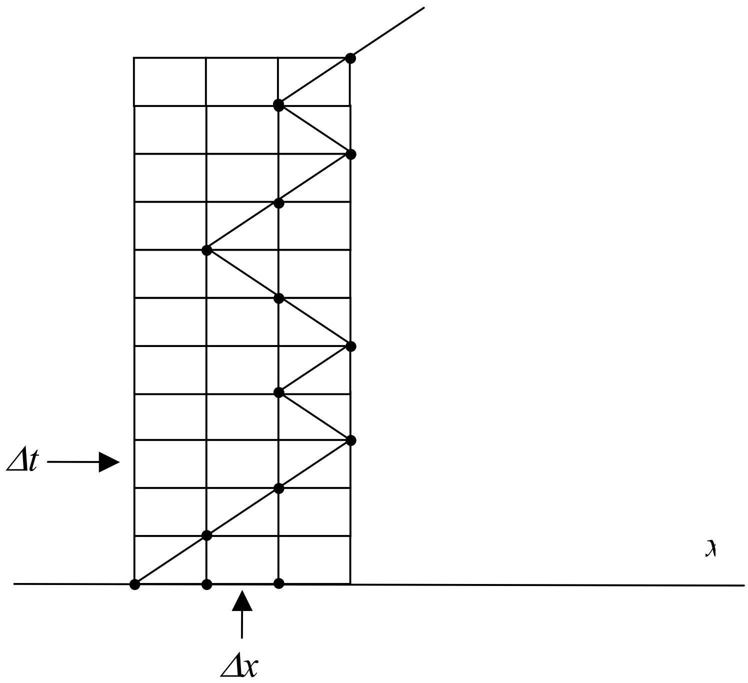
$$T(x,t)=\int G(x-x_0,t)T(x_0)\,dx_0$$

Esta representación nos dice entre otras cosas y de manera inmediata, que

a) si la temperatura original es positiva, permanece positiva.
b) Que el efecto de cualquier cambio de temperatura se hace sentir instantáneamente en toda la barra.
c) Que la temperatura T_0 puede ser altament discontinua y un instante mas tarde se regulariza.

Pero, ¿cual es la relación entre la ecuación del calor y la propagación de errores?

Supongamos que en el instante t_0 estamos parados en el origen. Revoleamos una moneda; si sale cara, damos un paso, Δx, a la derecha. Si sale cruz, a la izquierda.



Cada intervalo Δt, repetimos la operación.

¿Cual es la probabilidad $u(x,t)$ que en tiempo *t* nos encontremos en la posición *x*?

Parece complejo de calcular, pero podemos observar que en el instante $t-\Delta t$ estábamos o en $x+\Delta x$ o en $x-\Delta x$ y que de allí nos movimos con probabilidad ½ a (x,t), es decir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u(x+\Delta x, t-\Delta t) + u(x-\Delta x, t-\Delta t)\right)$$

o sea

$$u(x,t) - u(x, t-\Delta x) = \frac{1}{2}\left(u(x+\Delta x, t-\Delta t) + u(x-\Delta x, t-\Delta t) - 2u(x, t-\Delta t)\right)$$

Todo depende ahora del balance entre Δt y $(\Delta x)^2$. Si elegimos $\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 1$ podemos dividir ambos miembros por Δt y obtenemos:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 u}{(\Delta x)^2},$$

que es una forma discreta de la ecuación del calor.

Es decir, en el límite $\Delta t \to 0$, u converge a la solución de la ecuación del calor. Pero en el instante inicial, estamos parados en el origen con probabilidad 1, es decir

$$u(x,t) = G(x,t)$$

Esta es una versión del teorema central del límite que dice que si repetimos en forma independiente n veces un mismo experimento X_i de esperanza cero, entonces la distribución de probabilidad de

$$X = \frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$$

converge a una Gaussiana.

Difusiones no lineales

Es por eso que a una ecuación del tipo de la del calor se le suele llamar una ecuación de difusión. Las ecuaciones de difusión aparecen en diversos campos. Por ejemplo, en dinámica de poblaciones la densidad de energía e es substituida por la densidad de población σ, y una de las muchas razones por las que una población migra, es hacia zonas de densidad menor, es decir el flujo de población.

$$f = -\nabla \sigma + \ \cdots \ \text{(otras razones)}$$

O, en una epidemia, la probabilidad de infección en un lugar x, en un instante de tiempo t, depende en forma monótona de las probabilidades de los puntos adyacentes unas horas antes.

En un fluido viscoso, las partículas adyacentes a una dada tratan de “arrastrarla” o “frenarla” si intenta dispararse.

El punto que quiero destacar es que, en todos estos fenómenos, el término de “difusión” o “viscosidad” induce un proceso de “achatamiento” o “promediado” de las variables de estado.