# El triangle de Pascal

Els nombres binomials

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad ,$$

definits per $m$ i $n$ enters amb $m \geq n \geq 0$, compleixen

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \qquad \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}.$$

Aquestes propietats permeten formar els triangles de Pascal (o de Tartaglia) com el que es mostra a continuació:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

Cada fila comença i acaba amb un 1, i cada entrada és la suma de les dues entrades que té immediatament a sobre. Aquest triangle té una immensa quantitat de propietats interessants. Per posar-ne només una, considereu les sis entrades que n'envolten una de fixada, per exemple $\binom{6}{4}$. Les sis entrades es situen en els vèrtexs d'un hexàgon. Doncs bé, el producte dels binomials de tres vèrtexs alternats és igual al producte dels altres tres:

$$\binom{5}{3}\binom{6}{5}\binom{7}{4} = \binom{5}{4}\binom{6}{3}\binom{7}{5}$$

Aquesta propietat és general, no només pel $\binom{6}{4}$.

El treball pot consistir en explorar propietats, com l'anterior, del triangle de Pascal. A més, algunes d'aquestes propietats tenen també interpretacions interessants, com comptar certes classes de camins per l'eixample barceloní.

Si es vol, es pot tractar també una variant interessant, el triangle de Pascal binari, que s'obté del triangle ordinari substituïnt els nombres senars per 1, i els parells per 0. Aleshores es té una estructura autosimilar, com un fractal, de propietats també ben curioses.

*Responsable:* Josep M. Brunat
*e-mail:* Josep.M.Brunat@upc.edu