

# Construcció de polígons regulars amb regla i compàs

Jordi Quer

17 de setembre de 2009

Els geòmetres grecs van introduir el concepte de les construccions de geometria plana fent servir només aquests dos instruments: el regla i el compàs. Alguns dels problemes més famosos que van intentar i no van saber resoldre són la quadratura del cercle, la duplicació del cub, la trisecció de l'angle i la construcció d'un polígon regular de nombre de costats donat.

El 30 de març de 1796 el jove de divuit anys Carl Friedrich Gauss va descobrir un procediment per construir un polígon regular de 17 costats amb regla i compàs. Poc després aconseguí demostrar que els polígons regulars de  $n$  costats es poden construir amb regla i compàs sempre que  $n$  sigui el producte d'una potència de 2 per nombres primers diferents que siguin que *primers de Fermat*. Recordeu que s'anomenen així els nombres primers que són potència de dos més u; fins ara s'en coneixen només cinc:  $3 = 2 + 1$ ,  $5 = 2^2 + 1$ ,  $17 = 2^4 + 1$ ,  $257 = 2^8 + 1$  i  $65537 = 2^{16} + 1$  (el nom és degut a que Fermat es pensava que tots els nombres de la forma  $2^{2^k} + 1$  són primers però Euler ja va veure que el següent de la seqüència, el  $4294967297 = 2^{32} + 1$ , no ho és, de primer<sup>1</sup>). Gauss era conscient de que aquests són els únics polígons regulars construïbles amb regla i compàs però no va donar-ne cap demostració; Wantzel ho va provar el 1832.

El treball que es suggereix consisteix a:

- Estudiar el mètode geomètric de les construccions amb regla i compàs i aprendre a resoldre uns quants problemes bàsics (divisió d'un segment, ...).
- Relacionar la construcció geomètrica amb l'algebraica (calcular  $\cos \frac{2\pi}{n}$  fent servir només nombres enters, les quatre operacions i arrels quadrades).
- Fer una recerca bibliogràfica (a internet es troba tot sense massa dificultat) i documentar-se sobre l'història de la construcció dels polígons regulars amb regla i compàs i els resultats principals.
- Reproduir amb tot detall les construccions geomètriques i l'algebraiques del pentàgon i l'heptadecàgon, i descriure la relació entre totes dues.
- (Opcional, per a estudiants amb ganes d'aprofundir i coneixements d'informàtica). Usant un ordinador programar el càlcul de la construcció algebraica del polígon de 256 costats i intentar el de 65537 costats, descrivint les dificultats trobades si no es pot arribar fins al final del càlcul.

Els estudiants i tutors interessats en aquest tema podeu posar-vos en contacte si ho creieu convenient amb Jordi Quer (jordi.quer at upc.edu) per a més informació i suggeriments sobre el desenvolupament del treball (especialment sobre l'últim punt) i/o alternatives possibles sobre aquest mateix tema.

---

<sup>1</sup>Quins són els seus factors? Per què si  $2^r + 1$  és un nombre primer l'exponent  $r$  ha de ser una potència de 2?