

Estudi de les superfícies minimals mitjançant pel·lícules de sabó



Chardin, J.-B. S. *Bombolles de sabó* (1739)

Segon premi

6a Edició del Premi Poincaré (2009)

Estudi de les superfícies minimals mitjançant pel·lícules de sabó

Autor: Marc Serra Cantarell
Centre: Aula Escola Europea (Barcelona)
Tutora: Sra. Esther Silberstein

*El científic no estudia la naturalesa per la utilitat de fer-ho;
La estudia perquè obté plaer,
i obté plaer perquè la naturalesa és bella.
Si no fos bella no valdria la pena conèixer-la,
i si no valgués la pena conèixer-la,
la vida no seria digne de ser viscuda.*

Henri Poincaré

SAUTOY, Marcus (2007) *La música de los números primos*
Barcelona, Editorial Acantilado 300 pàg

Índex

Introducció

1. Les propietats de les bombolles de sabó

- 1.1 La tensió superficial
- 1.2 La capil·laritat
- 1.3 L'estructura molecular de les pel·lícules de sabó
- 1.4 Energia, treball i equilibri

2. Màxims i mínims

- 2.1 El principi de la mínima acció
- 2.2 El càlcul de variacions
- 2.3 L'energia potencial
- 2.4 Pel·lícules sabonoses i superfícies mínimes

3. Configuracions òptimes

- 3.1 El problema isoperimètric
- 3.2 Planetes en rotació
- 3.3 La catenoide

4. El problema de Steiner

- 4.1 El problema geomètric
- 4.2 El problema físic i el model matemàtic
- 4.3 Generalització del problema de Steiner
- 4.4 P.vs NP.

Conclusió

Bibliografia

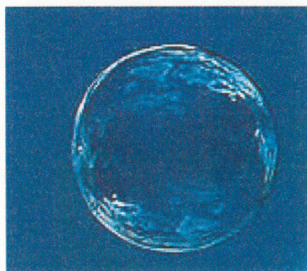
Procedència de les imatges

Annex : Programes

Introducció

La perfecció en la forma i els colors de les bombolles de sabó ha suscitat una gran atracció en la mirada humana des de l'antiguitat. El testimoni més antic que ha arribat fins als nostres dies que en fa referència és una àmfora etrusca que s'exhibeix en el museu del Louvre on hi ha representats uns nens jugant amb bombolles. Una altra prova d'aquesta atracció són els quadres de Murillo, Chardin, Hamilton, Manet i Millais, on hi apareixen bombolles. Des de llavors fins avui, les propietats de les bombolles de sabó han captivat a generacions de matemàtics, físics i químics que les han estudiat des de diferents àmbits.

La circumferència i l'esfera han estat considerades des de l'inici de la cultura occidental com a figures geomètricament perfectes. Pels grecs el moviment continu i etern dels astres havia de respondre a trajectòries circulars, encara que aquestes es moguessin a la vegada sobre altres cercles. A més el filòsof grec Jenòfanes (565 - 470 a. de C.) va atribuir a Déu una forma esfèrica. El seu raonament es basava en que si Déu era perfecte no podia tenir una forma amb unes extremitats superiors a d'altres, que entrarien en conflicte amb la idea de perfecció absoluta. Per tant havia d'adoptar la forma homogènia de l'esfera.



Bombolla de sabó

L'estudi científic de les propietats dels líquids el va iniciar Leonardo da Vinci en el segle XV. El físic belga Joseph Plateau va descobrir en el segle XIX que es podien generar solucions anàlogues a problemes de minimització de superfícies. Des de llavors s'han observat els principis de les bombolles des de dues perspectives diferents: Per una part els físics i els químics han estudiat les propietats de les pel·lícules de sabó tant a nivell molecular com macroscòpic. Per l'altre, els matemàtics han aplicat els principis descoberts per a resoldre problemes de minimització.

Vaig descobrir la connexió entre el món físic de les bombolles i les matemàtiques en una conferència del Sr. Aubanell. La qüestió em va atraure immediatament perquè em semblava màgic que un fenomen tan quotidià com una bombolla de sabó pogués resoldre en qüestió de segons problemes que actualment són intractables pels ordinadors.

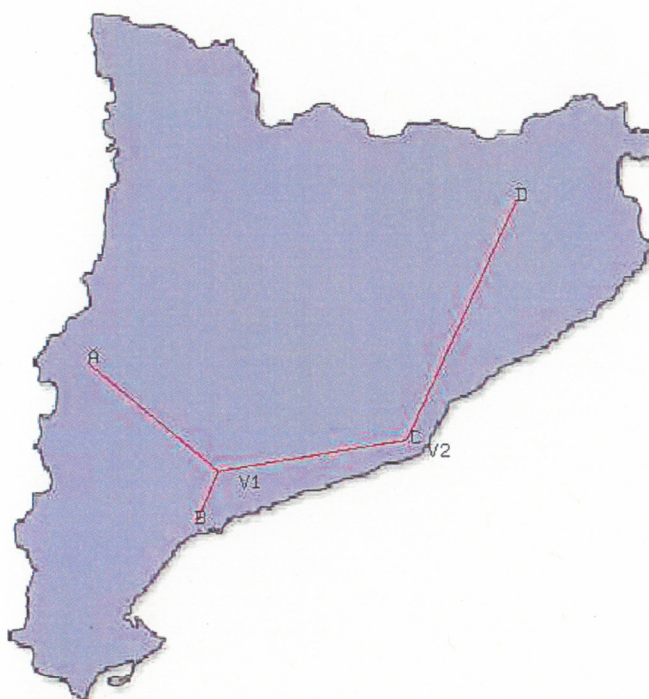
Aquest treball té com a objectiu determinar si les pel·lícules de sabó són útils per a resoldre problemes de minimització. El treball està dividit en quatre apartats: la primera part tracta els principis de les pel·lícules de sabó utilitzant sobretot l'experimentació com a eina de comprovació. L'estudi de les propietats dels líquids és un tema complex. Per això he intentat ser el més clar i entenedor possible i només presentar les característiques dels líquids que eren importants pel desenvolupament del tema.

La segona part titulada "Màxims i mínims" estudia la història dels problemes d'optimització i les eines matemàtiques. A més en tracta alguns que han estat claus en el seu desenvolupament, com el *principi general de Fermat de la òptica geomètrica* o la forma de la catenària, que és la posició d'equilibri d'una cadena aguantada pels seus extrems. Mitjançant aquest experiment, Bernoulli va poder establir el seu principi sobre la posició d'equilibri energètic, que ens permetrà entendre la íntima relació entre les pel·lícules de sabó i els màxims i els mínims.

La tercera part tracta tres figures amb propietats minimalistes. En aquest apartat intentarem posar en pràctica el mètode experimental i també utilitzarem la demostració matemàtica per a provar que aquestes figures són òptimes. Una d'elles és l'esfera, la figura més especial pels matemàtics grecs de l'antiguitat, que com veurem té la propietat de ser el cos amb menys superfície per més volum.

En el quart i últim apartat analitzarem el problema de Steiner des de tres perspectives: la matemàtica o geomètrica, l'experimental i la informàtica. L'enunciat d'aquest problema demana trobar quina és la configuració del sistema de carreteres que permet unir una sèrie de ciutats situades en el pla amb la longitud total mínima. Com veurem, aquest problema és intractable pels ordinadors. Això vol dir que el cost de

resoldre'l no és polinòmic i que a mesura que anem afegint més ciutats el programa tarda més i més, així que en principi el problema de Steiner pertany al grup dels problemes NP (nondeterministic polynomial).



Mapa de Catalunya amb el recorregut mínim de l'autopista que hauria d'unir les quatre capitals de província generada pel programa Steiner-4

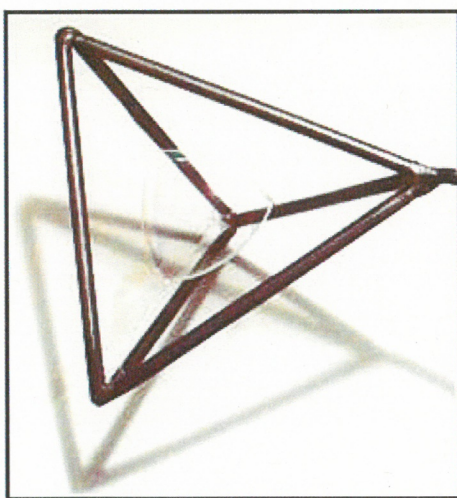
Per a elaborar el treball he utilitzat fonts diverses (llibres, articles, planes web) sent el punt de partida la conferència impartida pel Sr. Aubanell a Aula que va ser el meu primer contacte amb el tema. Les pràctiques les he desenvolupat en el laboratori de l'escola, utilitzant per a fer part dels experiments material específic que ell em va proporcionar. L'estructura de l'explicació dels fenòmens físics està basada en l'experimentació per a que sigui més comprensible. Molts d'aquests experiments estan extrets del llibre de C. V. Boys. Escrit a finals del segle XIX i basat en unes conferències per a joves que impartia el mateix autor, és una lectura obligatòria per a l'estudi del tema. Per a les pel·lícules de sabó he utilitzat la següent fórmula, que em va proporcionar el Sr. Aubanell: 50% d'aigua, 40% de detergent i un 10% de glicerina. Les bombolles fetes amb aquesta dissolució duren molt temps perquè la glicerina retarda l'evaporació de l'aigua, que és la causa principal per la qual les bombolles es reboten.

Bombolles de sabó

*El llibre de la natura està escrit
amb els caràcters de la geometria.*

Galileo Galilei

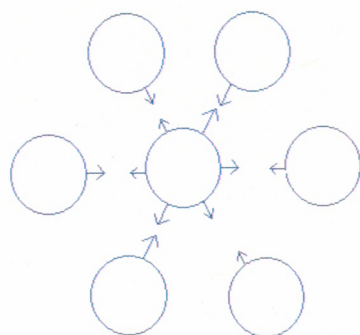
(Citació del Sr. Aubanell)



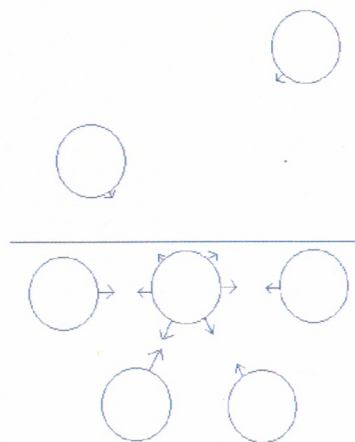
Bombolla en un tetraedre

1.1 La tensió superficial

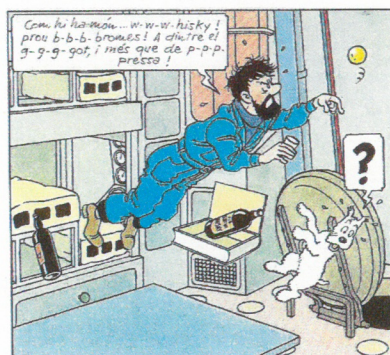
Totes les molècules d'un fluid experimenten forces d'atracció entre elles, però les molècules de la superfície estan en un ambient diferent de les que estan completament submergides ja que estan en contacte amb un gas. Si ens fixem en una molècula en concret que estigui completament envoltada per altres d' iguals veurem que la força d'atracció resultant en un temps macroscòpic és nul·la (Imatge 1.1). En canvi, les molècules de la superfície d'un fluid experimenten una força molt més dèbil provinent de la regió gasosa, ja que és menys densa. El resultat és que totes les molècules de la superfície tenen una força resultant que les empeny cap al centre del fluid (Imatge 1.2). A més, això provoca que la densitat disminueix-hi a mesura que ens apropem a la superfície des del centre. Aquesta força fa que un líquid redueix-hi l'àrea de la superfície sempre que sigui possible, com en el cas d'una gota d'aigua a gravetat zero, que tendirà a adoptar una forma esfèrica ja que l'esfera és la figura geomètrica amb la relació entre volum i àrea major (Imatge 1.3).



Imatge 1.1

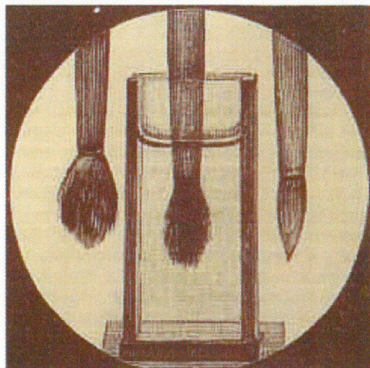


Imatge 1.2



Imatge 1.3 Vinyeta del còmic *Hem caminat damunt la Lluna*, Hergé (1953)

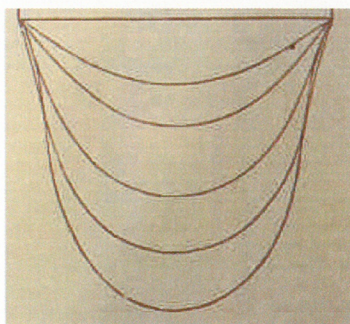
Encara que sense ser-ne conscients, tots hem experimentat amb la tensió superficial dels líquids. Per exemple, quan volem pintar amb un pinzell despuntat el que fem és mullar-lo per a que els pèls s'uneixin.



Imatge 1.4

Agafem un pinzell sec que té els pèls visiblement separats. Si el submergim en aigua i el treiem, els pèls s'uneixen perquè està humit i hi actua la tensió superficial. No obstant, si el pinzell està sota l' aigua, els pèls es queden separats encara que estiguin molls, ja que aquesta força només actua si hi ha contacte entre dos medis(Imatge 1.4).

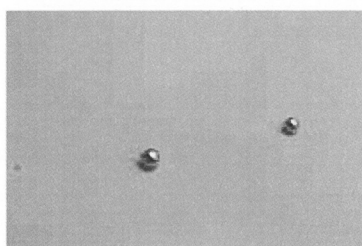
Ara continuarem amb un altre experiment: tenim una canonada que deixa anar aigua molt a poc a poc; aquesta aigua forma una gota que només cau quan ha acumulat una certa quantitat de líquid. Si ens hi fixem veiem que és sempre la mateixa quantitat i que sempre té la mateixa forma (Imatge 1.5). La pregunta és: com pot ser que l'aigua desafii la gravetat fins a arribar a una certa massa i després caigui? Si mirem la imatge sembla que sigui una bossa elàstica la que aguanta l'aigua fins que arribat a un cert punt es trenca com si el pes fos massa gran com per a sostenir-lo.



Imatge 1.5 Gotes penjant

Evidentment els líquids formen gotes degut a la tensió superficial. La gota cau quan el seu pes supera la força que pot exercir la tensió i al caure tindria una forma perfectament esfèrica si no hi hagués fricció amb l'aire.

El següent experiment ens permetrà comprovar de quina manera actua la tensió superficial en les gotes d'un líquid. Necessitem una superfície plana com una taula coberta de cera de parafina perquè, si no, la taula atrauria les molècules d'aigua, com veurem en el següent apartat, en canvi la cera de parafina no ho fa. Si posem sobre la taula varies gotes d'aigua de diferent mida veurem que prenen formes diferents. Les més petites tindran una forma més rodona que les grosses, ja que el pes de l'aigua contraresta l'acció de la tensió superficial, que sempre és la mateixa en un mateix líquid a la mateixa temperatura en el mateix medi. Aquest experiment es veu més clarament si s'utilitza mercuri, ja que tot i ser més dens que l'aigua, la seva tensió superficial és molt major i no es pot apreciar cap defecte en la forma esfèrica de les gotes més petites (imatge 1.6).

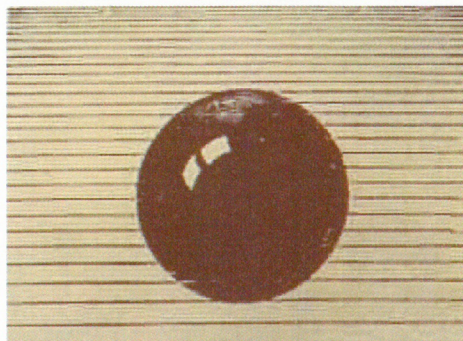


Imatge 1.6 Gotes de mercuri

Si no fos pel pes dels líquids que els empeny cap a la Terra, totes les gotes sense importar la mida tindrien una forma perfectament esfèrica. Això ho va anunciar i demostrar experimentalment i de manera molt simple Plateau (1801-1883). El físic belga va quedar-se cec estudiant el camp de l'òptica perquè va mirar durant vint-i-cinc segons el sol sense protecció. Després de l'accident va continuar la seva recerca científica estudiant les propietats de la superfície dels líquids. Va ser ell qui va demostrar per primera vegada que es podien resoldre problemes de minimització de forma anàloga amb pel·lícules de sabó.

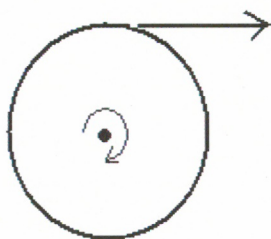
L'experiment de Plateau consisteix en submergir una gota d'un líquid en un altre igual de dens per a anular la força de la gravetat. A més, els dos líquids han de ser immiscibles. L'oli és més pesant que l'alcohol i més lleuger que l'aigua, però una dissolució d'aigua i alcohol pot tenir la mateixa densitat que l'oli. Si es submergeix una mica d'oli a la barreja immediatament pren una forma esfèrica, que és la figura geomètrica amb més volum i menys superfície (imatge 1.7). Per tant la tensió

superficial, anomenada en aquest cas tensió interfacial, també actua quan estan en contacte dos líquids o fases diferents i immiscibles.

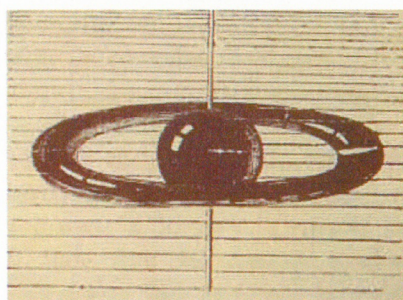


Imatge 1.7

Plateau també va descobrir un efecte molt interessant relacionat amb aquest experiment: si s'introdueix un palet a la gota d'oli i es fa girar, l'oli també gira i pren una forma aplanada en els pols, com la que té la Terra. Això és degut a que la força tangencial de la rotació a l'equador supera la força de la tensió fins que arriba a l'equilibri a l'augmentar la superfície (Imatge 1.8). Si es fa anar més ràpid, s'escapa de la gota un disc similar al que té Saturn, que al reduir la seva velocitat torna a unir-se a l'oli (Imatge 1.9). Tot i la semblança, les forces que actuen en aquest experiment no tenen res a veure amb les dels planetes: aquí la força de cohesió enlloc de ser la gravetat és la tensió interfacial i tot i que la gota i el disc no interaccionen, es tornen a ajuntar perquè la tensió fa que disminueixi la superfície del disc reduint el seu radi quan la velocitat de rotació desapareix, cosa que no passaria en el buit perquè no hi ha fricció.



Imatge 1.8



Imatge 1.9

En aquest experiment hem descobert que la tensió superficial i interfacial dóna forma als líquids per a que tinguin una superfície mínima sempre que la força de la gravetat ho permeti. En el cas de les bombolles de sabó, la gravetat es pot menysprear

perquè la pel·lícula de sabó és tan fina que no pesa gairebé res i com en aquest experiment, l'aire que hi ha a dins és igual de dens que el de l'atmosfera.

És comú trobar a l'aigua dolça estancada uns insectes anomenats sabaters. Els sabaters, que es coneixen com a *garris hajas*, són molt peculiars perquè poden caminar sobre l'aigua. Això ho aconsegueixen gràcies a que el seu pes repartit entre totes les potes en contacte amb l'aigua no fan prou pressió com per a vèncer la tensió superficial (imatge 1.10). Hi ha un altre insecte més petit, l'*stenus coma*, que, a més de caminar sobre l'aigua com el sabater, pot segregat un líquid quan és perseguit que al dissoldre's a l'aigua disminueix la tensió superficial i fa que el sabater que el persegueix s'enfonsi (Imatge 1.11).



Imatge 1.10



Imatge 1.11

Hem vist que una conseqüència del contacte entre dos fluids és l'aparició d'una força macroscòpica a la seva superfície que afecta només a la capa exterior de molècules. Es considera aquesta força com a tensió superficial; es defineix per força entre unitat de longitud i es representa per la lletra sigma, σ . A més depèn de la naturalesa del líquid, del medi que l'envolta i de la temperatura.

$$\sigma = F/l$$

La tensió superficial fa que qualsevol línia que estigui en la superfície de contacte entre dos medis pateixi una tracció en el pla de la superfície i perpendicular a la línia, que s'oposa a l'expansió de la superfície.

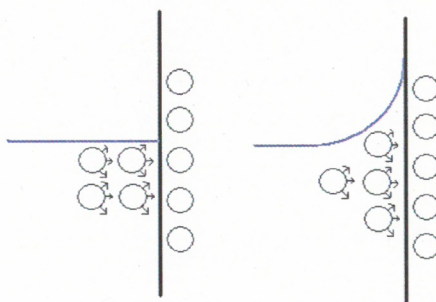
1.2 La capil·laritat

La capil·laritat explica perquè al submergir una part d'un tub prim en aigua aquesta es comporta de manera inesperada i, desafiant la gravetat, puja pel tub (imatge 1.12). Capil·laritat ve del llatí, *capillus*, que vol dir 'cabell', ja que com més prim és el tub, més amunt arriba l'aigua. Leonardo da Vinci ja va estudiar aquest fenomen en el segle XV però no va ser fins el segle XVIII que Isaac Newton descobrí que hi ha una força d'atracció entre el líquid i el tub, és a dir, entre un líquid i un sòlid.



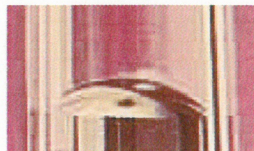
Imatge 1.12 Menisc còncau de l'aigua (amb colorant vermell)

Si ens fixem en la superfície de l'aigua a dins del tub capil·lar veiem que no és una superfície plana, com s'esperaria coneixent el principi de la tensió superficial, que fa que l'àrea de contacte entre un líquid i un gas sigui mínima. Té una forma còncava degut a que les parets del tub atrauen el líquid amb més força que la que exerceix la tensió superficial. Formulats d'una altra manera, les forces intermoleculars de cohesió del líquid són inferiors a les forces intermoleculars adhesives entre el sòlid i el líquid.

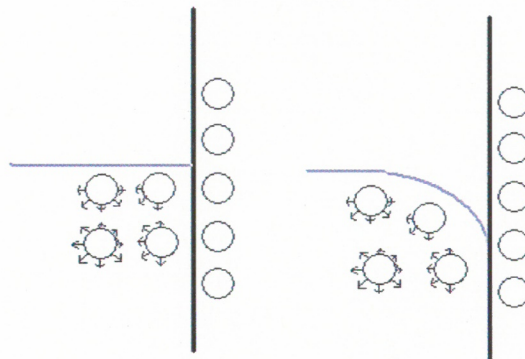


Imatge 1.13 A l'esquema hi ha representada només la força capil·lar, que és la que predomina

Al repetir l'experiment de la capil·laritat amb una proveta amb mercuri, que té la tensió superficial major que l'aigua, veiem que el mercuri enlloc de pujar pel tub forma un menisc còncau (imatge 1.14). Això és degut a que els àtoms de la superfície en contacte amb el vidre experimentaran una força superior cap als àtoms de mercuri del seu voltant que cap al vidre i cap a l'aire (imatge 1.15).



Imatge 1.14 Menisc convex característic del mercuri



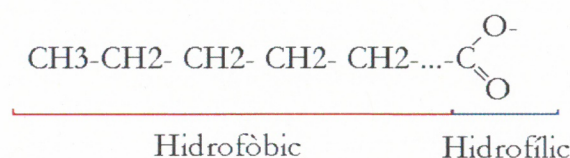
Imatge 1.15 A l'esquema veiem com la tensió superficial anul·la la capil·laritat.

La capil·laritat fa possible que les plantes desplacin l'aigua que reben des del sòl fins a les fulles, encara que les més altes depenen de la transpiració vegetal per a fer pujar l'aigua i les sals minerals. A més aquesta força és imprescindible per a crear pel·lícules de sabó estables que s'aguantin en un marc. Això és possible perquè la capil·laritat és major que la força de la tensió superficial i pot contrarestar-la. Si no fos així, la fase líquida es contrauria per a donar lloc a gotes, que és el que passa quan es trenca una pel·lícula de sabó.

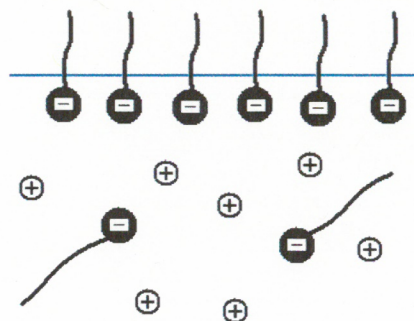
1.3 L'estructura molecular de les pel·lícules de sabó

Una solució sabonosa conté molècules de sabó i molècules d'aigua. El sabó, al dissoldre's es separa en ions, un dels quals es comporta d'una manera molt particular ja que té un extrem hidrofílic i un altre hidrofòbic. En altres paraules, una part del ió es dissol en aigua però l'altre no, i és aquest ió el que permet que l'aigua amb sabó dissolgui el greix.

El sabó generalment prové d'una reacció entre un àlcali i un àcid gras, com la sosa càustica (NaOH) i un àcid carboxílic com el $C_{17}H_{35}COOH$. Aquesta reacció produeix les molècules $C_{17}H_{35}COONa$, que es dissolen com a ions $C_{17}H_{35}COO^{-} (aq) + Na^{+} (aq)$. El ió $C_{17}H_{35}COO^{-} (aq)$ té una part hidrofílica, el COO^{-} , i una hidrofòbica, que és tota la cadena de carbonis.

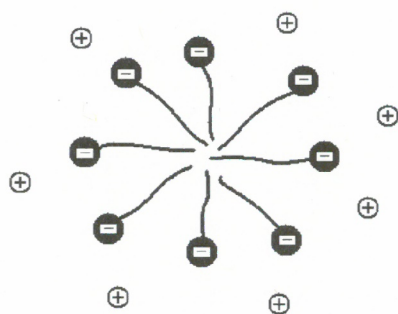


Les solucions de sabó tenen la propietat de formar bombolles estables ja que el sabó és un tensioactiu (redueix la tensió superficial). El ions tendeixen a col·locar-se de manera que la cadena de carbonis quedi fora de la dissolució i en canvi el grup carboxílic a dins degut a les forces de repulsió entre l'aigua i la cadena (imatge 1.16). La concentració de ions de sabó a la superfície determina la tensió superficial de la solució. El sabó redueix a aproximadament un terç la tensió superficial de l'aigua destil·lada.

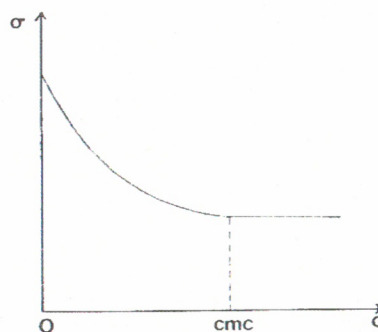


Imatge 1.16 Estructura de la superfície d'una solució sabonosa

Si la concentració d'aquests ions augmenta, arriba un moment en que es formen uns agregats de ions, les micel·les ja que les interaccions hidrofòbiques permeten que els ions es situïn de manera que les cadenes d'hidrocarburs no estiguin en contacte amb les molècules d'aigua (imatge 1.17). Aquests grups de ions tenen una càrrega elèctrica molt major i atrauen els ions metàl·lics. La formació de micel·les comença a partir de que la concentració de sabó ha superat un cert valor, conegut com a concentració micel·lar crítica (c.m.c.). Aquest valor depèn de la naturalesa del grup hidrofòbic i hidrofílic del tensioactiu i també de la temperatura. Una vegada superada aquesta concentració la tensió superficial no disminueix més (Imatge 1.18).

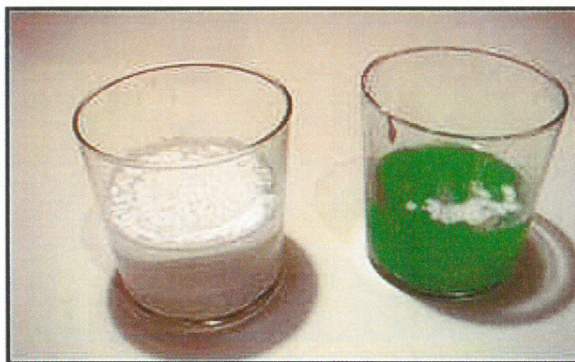


Imatge 1.17 Micel·la



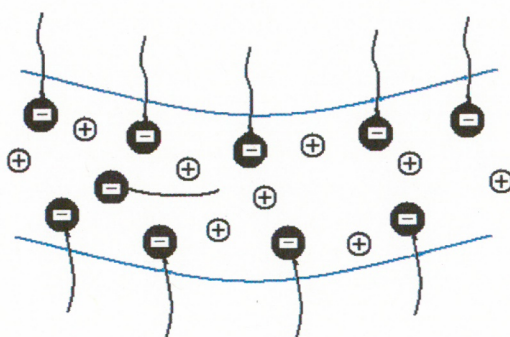
Imatge 1.18 Tensió superficial i c.m.c

Per a comprovar experimentalment l'efecte de la disminució de la tensió superficial necessitem dos recipients, un amb aigua destil·lada i un altre amb aigua i sabó. Si hi aboquem la mateixa quantitat de talc podem veure que l'aigua que no té sabó dissolt pot sostenir-ne més a la superfície perquè la seva tensió superficial és major. Aquesta força s'oposa a que el talc penetri en el líquid (Imatge 1.19).



Imatge 1.19 L'efecte dels tensioactius

En una pel·lícula de sabó els ions $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO}^-$ (aq) es reparteixen entre les dues superfícies (Imatge 1.20). Com que el nombre de ions en una pel·lícula és limitat, si s'augmenta la superfície d'aquesta, la concentració de ions per unitat d'àrea disminueix. Aquesta reducció comporta un augment de la tensió superficial i la pel·lícula tendeix a comportar-se com si fos aigua. Arriba un punt en el que la tensió superficial és tan superior a la força de capil·laritat que uneix la pel·lícula amb l'estructura metàl·lica que aquesta es trenca i forma gotes. Les gotes són esferes que es deformen degut a la resistència amb l'aire al caure. Les molècules de la solució s'ajunen en esferes perquè aquesta és la figura geomètrica amb més volum i menys superfície.



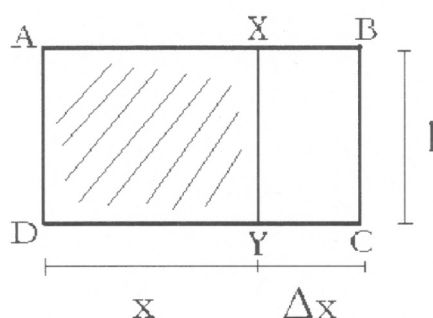
Imatge 1.20 Estructura d'una pel·lícula de sabó

El sabó s'utilitza per a netejar perquè té dues característiques que el fan molt útil: primer redueix la tensió superficial de l'aigua, el que comporta que aquesta pugui entrar en contacte amb el sòlid que ha de dissoldre. A més, com que té una part polar i una apolar, pot dissoldre el greix, que no és soluble en aigua perquè és apolar, i incorporar-lo a la dissolució.

1.4 Energia, treball i equilibri

Hem definit la tensió superficial com la força entre la longitud que uneix les molècules d'un líquid en una interfase líquid-gas. En el cas concret d'una pel·lícula de sabó, que té dues superfícies, aquesta força és el doble de la tensió superficial i l'anomenarem tensió de la pel·lícula (σ_p).

$$\sigma_p = 2\sigma;$$



Per a obtenir l'expressió de l'energia d'una pel·lícula de sabó utilitzarem un marc de filferro amb forma rectangular (ABCD) amb un extrem (XY) mòbil. Si considerem que la tensió superficial i la temperatura de la pel·lícula són constants, el treball que haurem de realitzar per a desplaçar l'extrem XY és:

$$w = F \Delta x;$$

$$w = (\sigma_p l) \Delta x;$$

$$w = \sigma_p \Delta A;$$

on F és la força necessària i ΔA és l'increment d'àrea. Per a trobar l'energia total de la pel·lícula utilitzarem la següent expressió:

$$E = \int_0^A \sigma_p dA;$$

Aquesta energia és l'energia lliure que té una pel·lícula de sabó a temperatura constant per a realitzar un treball. Si la concentració de ions de sabó és suficientment elevada com per a que la tensió superficial sigui independent de l'àrea, σ_p és una constant ja que només depèn de la temperatura i podem simplificar l'equació anterior a:

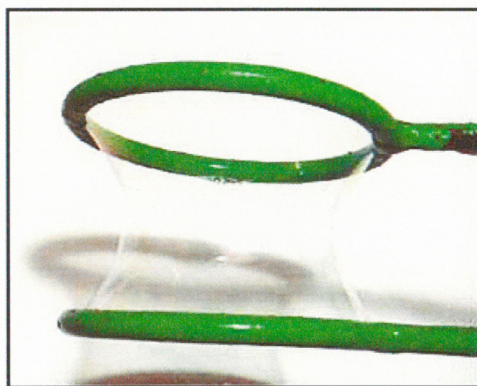
$$E = \sigma_p A;$$

Quan una pel·lícula està en equilibri, qualsevol variació de la seva àrea comportarà un augment de la seva energia lliure. Com que aquesta tendeix a ser mínima

per a assolir l'equilibri (com en el cas d'una molla) l'àrea també es redueix al màxim. Aquesta propietat ens servirà per a resoldre problemes de minimització de superfícies.

Per exemple, si volem trobar quina és la superfície mínima continguda en un marc de forma circular el que hem de fer és submergir aquest marc en una dissolució sabonosa. La solució, trivial en aquest cas, és un disc, ja que és la figura que té l'energia lliure menor i compleix el requisit d'estar delimitada per la forma del marc. Tenir l'energia lliure menor comporta que l'àrea de la figura també sigui mínima.

La propietat de les pel·lícules de sabó d'optimitzar la superfície també ens permet generar solucions anàlogues a problemes de minimització en tres dimensions. Per exemple podem trobar la figura geomètrica que uneix dos anells coaxials (Imatge 1.21). Va ser Euler qui va demostrar que es tractava d'un catenoide.



Imatge 1.21 Catenoide

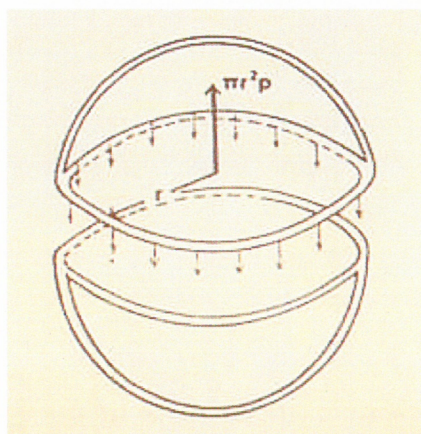
Una bombolla de sabó esfèrica consisteix en una membrana de solució composta per aigua i ions de sabó que separa dos volums d'aire. Aquesta membrana és tan prima que és despreciable. Quan està en equilibri, la pressió de l'aire de dins de la membrana és major que la de fora ja que la tensió superficial l'anul·la.

En una secció hemisfèrica d'una bombolla hi trobem dues forces oposades que s'igualen, provocades per la tensió superficial i per la diferència de pressió (Imatge 1.22). La força que exerceix la tensió superficial (σ_p) és proporcional al perímetre inferior del semicercle, que és igual a $2\pi r$, sent r el radi de l'esfera. Aquesta força té

direcció vertical i sentit cap a baix. La diferència de pressió (p) també provoca una força proporcional a l'àrea en la que actua, que és πR^2 i té el sentit contrari a l'anterior.

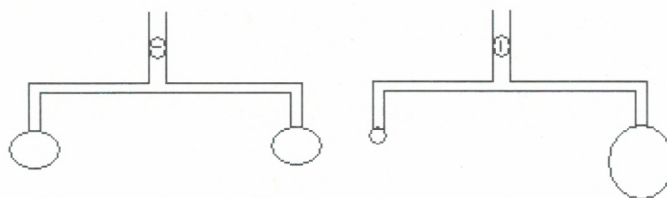
$$p\pi R^2 = 2\pi r\sigma_p;$$

$$p = 2\sigma_p/r;$$



Imatge 1.22 Forces que actuen en una bombolla

És interessant examinar com s'equilibren dues bombolles aparentment iguals connectades amb una canonada (Imatge 1.23). Qualsevol petita variació en la pressió externa d'una d'elles, per exemple una disminució en la pressió de B, farà que B rebi una petita part del volum d'aire d'A degut a la força de la tensió superficial, que igualarà la pressió del conjunt. Això provocarà que el radi de B augmenti, fet que desencadenarà una disminució de la diferència de pressió, ja que la diferència de pressió és inversament proporcional al radi de l'esfera ($p = 2\sigma_p/r$). La bombolla A, com ha reduït el seu radi, veurà la seva diferència de pressió augmentada. Això provocarà una fuga d'aire d'A cap a B per a igualar la pressió total però aquesta variarà encara més degut a aquest corrent d'aire i l'accelerarà.



Imatge 1.23 Diferència de pressió entre dues bombolles

A més, el fet que espontàniament l'aire que contenen dues bombolles connectades es desplaci cap a una sola és degut a que aquesta configuració tan desigual té molta menys energia que l'altre. Com hem demostrat abans, l'energia d'una bombolla depèn de la superfície que té, ja que la tensió és, en principi, la mateixa ($E = \sigma_p A$). Per tant l'experiment demostra que una esfera té menys superfície que dues de més petites amb el mateix volum total. Verifiquem-ho matemàticament:

R : radi de l'esfera major

r : radi d'una de les dues esferes iguals

V : volum de l'esfera major

v : volum d'una de les dues esferes iguals

S : superfície de l'esfera major

s : superfície d'una de les dues esferes iguals

$$V = 2v$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 2 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$R^3 / 2 = r^3$$

$$r = R / \sqrt[3]{2}$$

$$S <? 2s$$

$$4\pi R^2 <? 2(4\pi r^2)$$

$$4\pi R^2 <? 8\pi R^2 / 2^{2/3}$$

$$R^2 <? 2R^2 / 2^{2/3}$$

$$R <? \sqrt[3]{2} R / 2^{1/3}$$

$$1 <? \sqrt[3]{2} / \sqrt[3]{2}$$

És correcte ja que $\sqrt[3]{2} / \sqrt[3]{2}$ és igual a 1,1224.

Màxims i mínims

*Com la forma de l' univers és
summament perfecta, i ha estat en efecte
concebuda pel més savi creador, res
podrà esdevenir en lloc algun del
món sense que d' una forma o una altra
brilli alguna regla de màxim o mínim.*

Leonhard Euler

TIKHOMIROV, V. M. (1990). *Stories about maxima and minima*.
New York, American Mathematical Society. 180 pàg.



*Catenària: posició de mínima energia potencial
d'una cadena penjada pels extrems*

2.1 El principi de la mínima acció

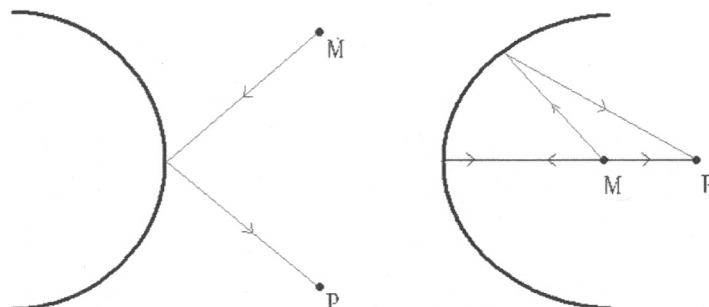
Des de temps immemorials, la humanitat ha buscat lleis per a descriure els fenòmens del món físic, però fins l'any 1744 no va aparèixer un principi aplicable a tots ells. Va ser el francès Pierre-Louis Moreau de Maupertuis qui proposà un principi general anomenat *lleï de la mínima acció*. A partir d'aquest postulat publicà dos anys més tard el llibre titulat *Les lleis del moviment i del repòs, deduïdes d'un principi metafísic*.

El principi metafísic de Maupertuis, que només és aplicable a uns quants casos, sosté que els canvis que tenen lloc a la naturalesa utilitzen la mínima quantitat d'acció necessària. Per exemple, la llum en un medi homogeni sempre segueix el camí més curt, que és la línia recta. El savi francès veié en el seu descobriment la manifestació de la saviesa de Déu: “*Quina satisfacció per a l'esperit humà, que, al contemplar aquestes lleis que contenen el principi del moviment i del repòs de tots els cossos de l'Univers, troba la demostració de l'existència d'Aquell que governa el món.*”

Euler va demostrar rigorosament l'any 1744 que *el principi de la mínima acció* podia ser utilitzat per a descriure el moviment d'una massa puntual en un camp de forces conservatives. També expressà que la seva opinió era que darrere de cada fenomen de l'univers s'hi pot trobar una llei de màxims i mínims. Es sap del cert que Euler no coneixia el principi de Maupertuis a l'hora de publicar el que seria el seu primer tractat sobre el càlcul de variacions, titulat *Méthode per a trobar línies corbes amb una propietat màxima o mínima*.

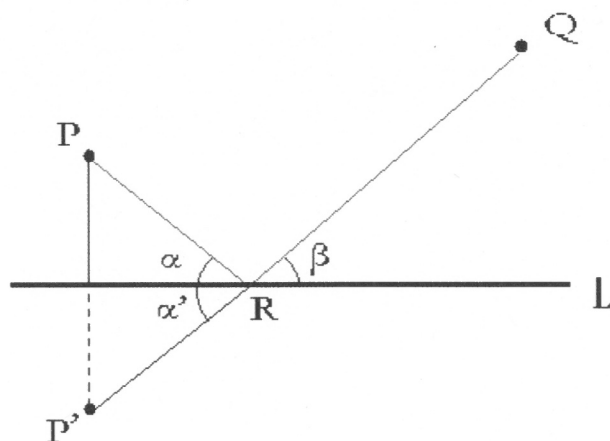
Formulat com Maupertuis el va anunciar, *el principi de mínima acció* condueix a afirmacions incorrectes i a més no es pot aplicar a problemes complexos. Per exemple, no és veritat que la llum sempre segueixi el camí més curt possible per anar des de la font lluminosa fins a l'observador en un medi homogeni. Considerem un mirall còncau amb forma hemisfèrica, un punt M des d'on s'origina el raig de llum i un punt P que representa l'observador (imatge 2.1). La llum sempre segueix el camí marcat en negre per a anar fins al mirall i tornar al punt P . El camí blau és un dels molts camins més curts que uneixen els dos punts a través del mirall. En el cas d'un mirall convex la llum sí que utilitza el camí més curt per a connectar M i P a través del mirall. El

principi de mínima acció es compleix en la reflexió de miralls convexos però no ho fa en la dels miralls còncaus.



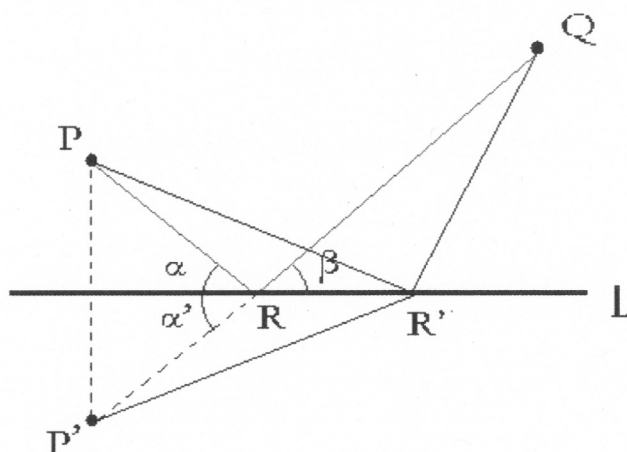
Imatge 2.1 Trajectòria de la llum en un mirall convex i en un còncav

Euclides (330-270 a. C.) ja coneixia la propietat extrema dels raigs lluminosos i va anunciar la llei de la reflexió. Aquesta diu així: *L'angle d'incidència del raig en un mirall és igual a l'angle de reflexió*. Uns 400 anys més tard, Heró d'alexandria (100 d. C.) relacionaria aquesta llei amb el principi més general de que la llum sempre viatja pel camí més curt (Teorema d'Heró).



Volem demostrar que el camí més curt que uneix P i Q passant per la recta L té els angles α i β iguals. Com que el camí més curt que uneix dos punts és la línia recta, suposem que la trajectòria es compon de segments rectilinis. Per a trobar el punt R tracem una perpendicular a la recta L que passi per P i hi marquem la distància que separa P de L , definint així un nou punt, P' . La recta $P'Q$ determina el punt R i la longitud del camí mínim que passa per la recta L .

El punt R pertany al camí mínim perquè si prenem qualsevol altre punt de la recta L i l'anomenem R' definirà un camí més llarg que fa el recorregut PR' i $R'Q$, que és equivalent per simetria a $P'R'$ i $R'Q$. La suma de dos costats d'un triangle sempre és major que la longitud de l'altre costat perquè si no el triangle no es pot construir. Per tant $P'R' + R'Q > P'Q$ i el camí que passa per R és el més curt.



Euler i Lagrange elaboraren de nou el principi de Maupertuis i aconseguiren crear un instrument indispensable per a la física moderna: El càlcul de variacions. Richard Courant escriuria dos segles més tard: “Va ser Euler el primer en tenir les idees clares sobre aquest principi, encara que alguns temperaments, inclinats cap a l'especulació mística i filosòfica, com Maupertuis, no van poder separar les proposicions matemàtiques de certes idees peregrines *sobre la intenció de Déu de regular els fenòmens físics mitjançant un principi general de la més alta perfecció.*”

2.2 El càlcul de variacions

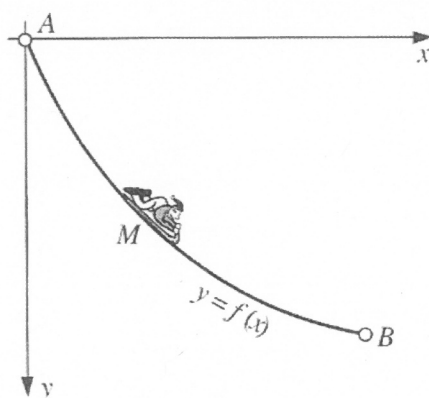
A la segona meitat del segle XVII va tenir lloc el descobriment d'una eina que revolucionaria la matemàtica: El càlcul infinitesimal, desenvolupat independentment per Newton i Leibniz. Mitjançant aquest, es poden resoldre dos problemes principals: el de les tangents i el de les quadratures. El primer demana determinar les rectes tangents a una corba donada, que és el problema fonamental del càlcul diferencial. El segon, que pertany al càlcul integral, tracta de calcular l'àrea tancada per una corba donada. El mèrit d'aquests dos científics rau en el fet d'haver reconegut clarament la connexió entre els dos problemes. Els nous mètodes desenvolupats per ells es van convertir en instruments matemàtics molt potents.

Poc temps després va sorgir una nova disciplina basada en el càlcul infinitesimal, que més tard s'anomenaria càlcul de variacions. Aquesta eina té com a objectiu trobar descripcions matemàtiques d'objectes i trajectòries òptims. Els creadors d'aquesta nova branca de la matemàtica van ser tres científics suïssos: Jakob y Johann Bernoulli i un deixeble de Johann, Leonhard Euler, coneguts com "els tres de Basilea". Gràcies a ells, aquesta ciutat de Suïssa fou, en el segle XVIII, el centre mundial de la matemàtica .

Les aplicacions d'aquest instrument matemàtic són molt extenses, perquè permeten trobar configuracions òptimes en qualsevol domini. Un exemple seria trobar la forma d'un cotxe amb un volum interior determinat de manera que presenti la mínima resistència a l'aire. Un altre problema semblant demana determinar la forma de la casa amb un volum donat que minimitzi la pèrdua de calor. Els esquimals coneixen la solució des de fa molt temps: es tracta d'una casa amb forma hemisfèrica, els iglús.

El concepte de càlcul de variacions és molt semblant al del càlcul diferencial. El càlcul diferencial permet trobar els màxims i mínims d'una funció amb una variable independent o amb un nombre finit d'aquestes variables. Els màxims i mínims d'aquesta equació tindran una tangent horitzontal i seran els que s'han d'estudiar per a generar solucions òptimes. En canvi el càlcul diferencial desenvolupat per Euler i Lagrange permet utilitzar un sistema de funcions com a element independent i trobar solucions a problemes molt complexos.

Johann Bernoulli va ser el primer a resoldre un problema físic amb el principi de les variacions. El problema en qüestió havia aparegut en un diari científic de l'època i reptava als lectors a trobar per quina corba hauria de desplaçar-se una partícula en caiguda lliure sense fricció per a moure's d'un punt A a un altre B situat més a baix minimitzant el temps de descens (Imatge 2.2). Segons la trajectòria que segueixi la partícula tardarà més o menys i en aquest cas la trajectòria més curta, que seria la línia recta, no és la òptima. Aquest problema no es pot resoldre amb el càlcul diferencial perquè es tracta d'una corba i no d'un conjunt finit de variables.



Imatge 2.2

La solució que veurem de Bernoulli no es basa en el càlcul de variacions perquè és molt complexa. Aquesta argumentació addicional comença establint una equació que determina la velocitat en funció de la distància en vertical que ha recorregut la partícula:

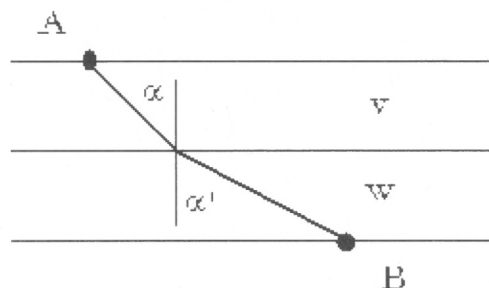
$$v = c\sqrt{h}$$

On c és una constant que depèn de la gravetat i és igual a $\sqrt{2g}$ i h l'altura que ja ha perdut. Es pot deduir fàcilment amb la llei de la conservació de l'energia mecànica.

El següent pas és variar una mica l'enunciat del problema imaginant que l'espai està dividit en un nombre determinat de franges horitzontals amb un gruix d . Suposem que la partícula té un moviment rectilini a cada capa i que la velocitat només canvia al travessar cada franja. En aquest cas la velocitat serà $c\sqrt{d}$ a la primera franja, $c\sqrt{2d}$ a la segona i en general $c\sqrt{nd}$ a la capa n . El gran encert de Bernoulli va ser connectar el camp de l'òptica i el de la mecànica mitjançant la llei de refracció, coneguda com a *principi general de Fermat de l'òptica geomètrica*. Aquest principi estableix que la llum

es propaga d'un punt a un altre de la forma més ràpida possible. Quan travessa diversos medis homogenis consecutius amb diferents densitats òptiques, la llum varia la inclinació de la seva direcció depenent de la velocitat en la que pot circular per cada medi (representades per v i w). Per tant, per a anar de A a B la llum segueix dos segments rectilinis amb inclinació α i α' respecte la vertical:

$$\sin \alpha / v = \sin \alpha' / w$$

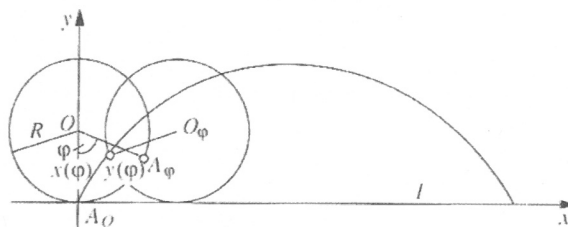


La partícula del problema, com la llum, viatja a velocitats diferents per cada capa i ha d'anar de A a B amb el mínim temps possible. Per tant es pot aplicar el principi de Fermat. L'equació quedaria així:

$$\sin \alpha_1 / \sqrt{d} = \sin \alpha_2 / \sqrt{2d} = \dots$$

On α_n és l'angle que descriu la trajectòria de la partícula amb la recta vertical a la capa número n .

Bernoulli continua suposant que l'espessor de les franges tendeix a zero i la solució del problema aproximat tendeix a la solució del problema original. Demostra així que la solució és una corba amb la propietat $\sin \alpha / \sqrt{h}$ és constant, sent α l'angle que forma la tangent d'un punt amb la vertical i h la distància vertical que ja ha travessat. Aquesta propietat caracteritza la cicloide, que es construeix seguint la trajectòria d'un punt marcat en un cercle que roda per un pla:



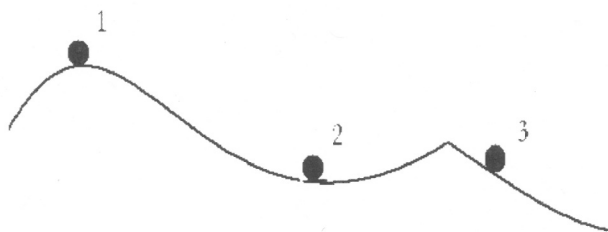
Imatge 2.3: Cicloide

2.3 Màxims i mínims d'energia potencial

En el 1690 Johann Bernoulli va experimentar amb una cadena penjada pels extrems i va trobar la forma matemàtica de la cadena en equilibri. Aquesta configuració correspon a la catenària, que és un cosinus hiperbòlic (imatge de la plana 23), en el que la cadena té el centre de gravetat el més baix possible. A partir d'aquest experiment Bernoulli va deduir que l'estat d'equilibri de la cadena es donava en una posició en la que cap esclavó no pot baixar més sense fer-ne pujar un altre. Del seu descobriment en va extreure les lleis de l'equilibri dels sistemes mecànics i els formulà en el principi fonamental dels treballs virtuals, que diu:

En l'equilibri, per a aconseguir un desplaçament infinitesimal d'un sistema mecànic no es requereix treball.

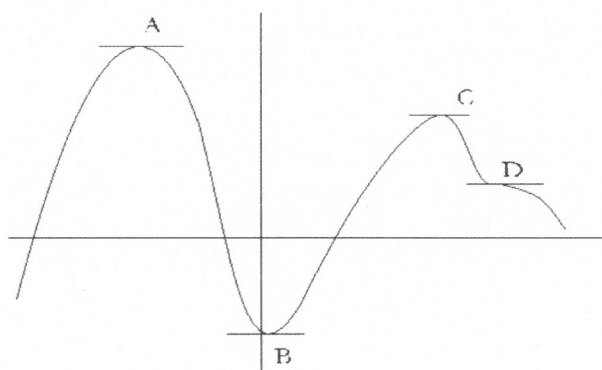
Per a entendre aquesta llei és molt profitós utilitzar el concepte d'energia potencial gravitatòria. Representem una serralada com si fos una funció en dues dimensions i imaginem que hi ha diverses pilotes (Imatge 2.4). Com l'energia potencial és proporcional a l'altura, la mateixa funció descriu l'estat de l'energia potencial gravitatòria i el contorn de la serralada. Segons el principi de Bernoulli, les dues primeres pilotes es troben en un estat d'equilibri, ja que si només tenim en compte l'acceleració de la gravetat es poden desplaçar lleugerament cap als dos costats sense augmentar o disminuir la seva energia potencial. Això es degut a que no fa falta realitzar cap treball perquè el terra, situat perpendicularment a la gravetat, la contraresta totalment. Així, els punts d'equilibri es troben en els punts on la tangent de la funció és horitzontal, que en el cas de l'energia potencial estan situats on el terra és pla. En canvi, la tercera pilota es troba en un punt on la tangent no és horitzontal i per tant caurà fins a trobar un estat estacionari de l'energia potencial.



Imatge 2.4 L'energia potencial gravitatòria

Entre la primera i la segona pilota hi ha una diferència fonamental. La primera es troba en un equilibri inestable, perquè si es desplaça cap als costats trobarà zones on el potencial és menor i caurà. Aquesta situació caracteritza els punts màxims de la funció. En canvi, la segona pilota està en un estat d'equilibri estable, perquè si es desplaça una mica cap als costats tornaria a l'estat inicial d'equilibri, que representa un mínim local.

A les funcions contínues i diferenciables els màxims i els mínims es troben en punts on la funció passa de créixer a decreixer o de decreixer a créixer. El valor de la derivada a cada punt determina si la funció creix (valor positiu) o decreix (valor negatiu). Si el valor és zero la imatge de la funció és constant en aquell punt. En els màxims i mínims la derivada de la funció ha de ser igual a zero, el que equival a dir que la tangent en aquests punts és horitzontal. Que la derivada sigui igual a zero en un punt concret no és suficient per a que la funció tingui un valor extrem en el mateix, com es pot veure en el gràfic en D.



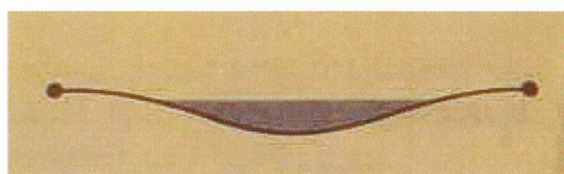
Podem diferenciar dues classes de punts extrems: els locals i els absoluts. Els màxims i mínims absoluts tenen el valor major o menor de l'interval representat. En aquest cas són A i B. Els extrems locals només són majors o menors que els altres punts immediatament pròxims, com en C.

El que ens interessa per a les pel·lícules de sabó és l'energia potencial elàstica que pot emmagatzemar un cos. Tractarem aquest tema sense especificar quin és el valor exacte de l'energia potencial. Imaginem que tenim una pilota de goma a les mans; si la comprimim, fem un treball sobre la pilota que aquesta retorna quan la deixem lliure per a recuperar la seva forma original. El que hem fet ha estat emmagatzemar energia

potencial elàstica que la pilota no pot alliberar per la oposició de la força que rep. Al deixar-la lliure, la pilota retorna a la posició de mínima energia potencial.

Mitjançant una molla i un pes podem relacionar l'energia potencial gravitatòria i l'elàstica. Les molles tenen la capacitat d'emmagatzemar energia elàstica tant si són comprimides com estirades des de la seva posició d'equilibri. Si pengem el pes de la molla, la molla s'allarga fins que el sistema arriba a la posició de mínima energia potencial. En aquesta posició, la suma de l'energia potencial gravitatòria del pes i de l'energia potencial elàstica de la molla està en una situació de mínim, de manera que qualsevol posició pròxima té més energia potencial. Els dinamòmetres que serveixen de balança es basen en aquest principi.

Un altre experiment molt interessant per aquest tema consisteix en fixar una membrana elàstica a un marc i abocar aigua en el centre (imatge 2.5). La forma de la membrana correspon a la configuració de mínima energia potencial elàstica de la membrana i de mínima energia potencial gravitatòria del fluid. Si ens hi fixem veurem que la forma de la membrana s'assembla molt a la forma que tenen les gotes penjants que ja hem vist anteriorment, ja que la tensió superficial actua com si fos una membrana elàstica i el principi de mínima energia potencial també estableix la seva forma.



Imatge 2.5

Es pot utilitzar una funció per a descriure l'energia associada a cada configuració d'un sistema mecànic. La representació més simple consisteix en una funció en dues dimensions, perquè per cada punt de l'eix X hi ha un valor de Y que representa l'energia potencial (com el de l'energia potencial gravitatòria d'una pilota en la serralada que ja hem vist). Els gràfics més complexos, que representen funcions amb diverses variables independents, acostumen a utilitzar espais de més de tres dimensions.

Mitjançant el càlcul de variacions Euler va demostrar en el 1744 que els moviments dels planetes al voltant del sol es podien deduir d'un principi de màxims i mínims. A més, va expressar que la seva opinió era que darrere de cada fenomen físic hi ha una magnitud que es fa màxima o mínima. Donava així una altra interpretació al *principi de la mínima acció* de Maupertuis que encara és vigent, com demostra aquest fragment de la conferència de Max Planck impartida a l'Acadèmia de Berlín l'any 1922:

(...) Així doncs encara ha estat més sorprenent que Hermann von Helmholtz descobrís que aquest principi (...) era vàlid sense restriccions en la totalitat de la física del seu temps. Recentment, David Hilbert ha demostrat la validesa d'aquest teorema en la teoria general de la relativitat ajudant-se de la versió donada per Hamilton. Com més complicades es fan es circumstàncies, menys probable resulta que la dominància d'una llei tan senzilla pugui ser només un accident (...)

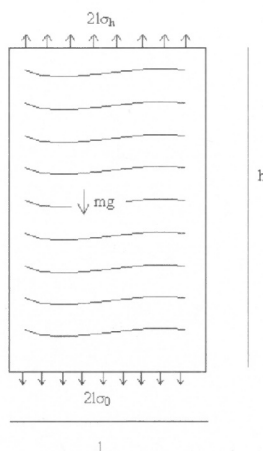
2.4 Pel·lícules de sabó i superfícies mínimes

Trobar una superfície mínima amb unes condicions preestablertes mitjançant el càlcul de variacions és molt difícil i a vegades impossible, com en el cas del problema de Steiner, que tractarem més endavant. És interessant plantejar el problema matemàtic com una interpretació d'un fenomen físic, en aquest cas, una pel·lícula de sabó. Experimentalment es pot trobar una configuració mínima que representa una solució del problema matemàtic que permet estudiar les seves propietats. Continua sent necessària una demostració matemàtica perquè podria ser que la interpretació matemàtica del fenomen físic fos incorrecte.

Una pel·lícula de sabó que es trobi en equilibri estable ha de ser una làmina de mínima energia potencial, com hem vist anteriorment anunciat en el *principi dels treballs virtuals* de Bernoulli. Aquestes làmines constitueixen superfícies d'àrea mínima, també anomenades minimals. Una superfície mínima es caracteritza per ser la superfície que té una àrea menor que les altres configuracions pròximes. Una superfície mínima no té perquè ser òptima i és comú que un marc determinat delimiti varies superfícies minimals.

Es pot demostrar que qualsevol pel·lícula sabonosa és una superfície mínima: L'energia potencial elàstica és proporcional a l'àrea. El principi dels treballs virtuals determina que qualsevol sistema físic en una posició d'equilibri estable estigui en una configuració d'energia potencial mínima. Si menystenim la gravetat, una pel·lícula estable ha d'estar en un mínim local o absolut d'energia potencial i per tant tenir una superfície menor que la de totes les configuracions pròximes.

La gravetat no altera significativament la forma de les pel·lícules de sabó perquè són molt lleugeres. Per a comprovar l'efecte de la gravetat sobre la força de la tensió superficial imaginem una pel·lícula suspesa en un marc rectangular de l per h i on t és el gruix de la pel·lícula i p la seva densitat (imatge 2.5). Sabem que si la làmina està en equilibri, les forces oposades han d'estar igualades. És per aquesta raó que la força de la tensió superficial a dalt i a baix no pot ser igual.



$$2l\sigma_h = 2l\sigma_0 + mg$$

$$2l\sigma_h = 2l\sigma_0 + lhtpg$$

$$2\sigma_h = 2\sigma_0 + htpg$$

$$\sigma_h - \sigma_0 / \sigma_0 = htpg / 2\sigma_0$$

Aquesta expressió permet trobar la variació màxima de la tensió superficial que pot provocar la gravetat, que es dona quan la pel·lícula està en posició vertical. Substituint pels valors que típicament tenen les superfícies sabonoses amb una altura de deu centímetres, el resultat oscil·la entre un 1,5% i un 0,01% depenent del gruix de la pel·lícula, que fa oscil·lar el pes. Una variació tan petita no pot tenir cap efecte visible sobre la superfície i per tant una superfície sabonosa demostra l'existència d'un mínim.

No obstant això, les probes empíriques no poden demostrar per si soles un principi matemàtic, com va observar Richard Courant. Això es degut a que es tracta d'aproximacions imperfectes que tenen un marge d'error, al contrari de les idealitzacions matemàtiques. A més, no es pot excloure que a la següent repetició d'un experiment en concret es pot produir un resultat contrari a l'esperat. Courant escrigué: *"Les probes empíriques no poden establir l'existència matemàtica; tampoc poden els físics depreciar com un rigorisme inútil l'exigència dels matemàtics. Tan sols una demostració d'existència matemàtica pot garantir que la descripció matemàtica d'un fenomen físic té significat."*

Com observaren Hilderbrandt i Tromba, la conjectura de Goldbach exemplifica la tesi de Courant. Christian Goldbach (1690-1764) va reptar a Euler a demostrar que tot nombre enter parell i major que 4 es pot expressar com una suma de dos primers. Ni Euler va aconseguir provar-ho en el seu moment ni s'ha demostrat encara que aquesta conjectura sigui correcte, tot i que s'ha comprovat que és certa per a tots els nombres parells fins a $2 \cdot 10^{16}$.

Les bombolles de sabó no són l'únic fenomen físic que permet estudiar la matemàtica. Riemann en el segle XIX s'imaginava experiments sobre el flux de l'electricitat en làmines de metall. Amb aquest senzill exercici mental va descobrir teoremes fonamentals de la teoria de funcions amb variable complexa. Justament aquest experiment li permetia comprovar l'existència de camins mínims entre els dos punts.

Configuracions òptimes

*La Natura no fa res en va, i més
és en va
quan a menys serveix; doncs la
Natura es complau
en la simplicitat, i no adopta la pompa
de les causes supèrflues.*

Isaac Newton

HILDEBRANDT, Stefan; TROMBA, Anthony (1990). *Matemática y formas óptimas*.
Barcelona, Prensas Científicas. 190 pàg.



*La forma exacta de la Terra va ser una incògnita per a
la humanitat fins el segle XVII*

3.1 El problema isoperimètric

La propietat de superfície maximal de la circumferència ja es coneixia a l'antiguitat, com demostra el poema èpic *L'Eneida*, que va escriure el poeta romà Virgili en el segle I a. de C. Un episodi d'aquesta obra colossal explica les aventures de la princesa Dido, que va haver de fugir de Tir, la seva ciutat natal. Ella i la seva gent navegaren pel Mediterrani fins arribar a l'Àfrica, amb la intenció de trobar un terreny per a establir-hi la seva nova pàtria. Però quan arribaren a Numídia els indígenes del nord d'Àfrica pactaren donar-li només la terra que aconseguís tancar amb una pell de bou.

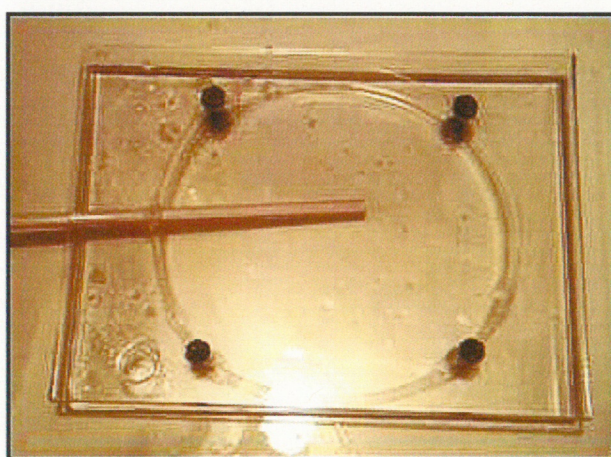
La princesa Dido intentà treure el màxim benefici de la situació. Per començar manà que tallessin una pell de bou en tires molt fines. Suposant que els artesans de l'època aconseguissin tallar-les amb un gruix d'un parell de mil·límetres, la longitud total aconseguida estaria compresa entre 1000 i 2000 metres.

Tot seguit la princesa va haver de resoldre el següent problema matemàtic: "Trobar entre totes les corbes amb una longitud preestablerta la que delimiti la regió amb l'àrea màxima." Dido trobà la solució, que és una circumferència, i, suposant que el terreny fos completament pla, aconseguí entre 10 i 25 hectàrees de terreny per a fundar la ciutat de Cartago.

La primera demostració matemàtica de la propietat isoperimètrica de la circumferència de l'antiguitat pertany a Zenodoros. Aquest matemàtic grec que escrigué un tractat titulat *Sobre figures isomètriques*, el qual no s'ha conservat. Coneixem l'existència d'aquesta obra per les referències que en van fer altres científics.

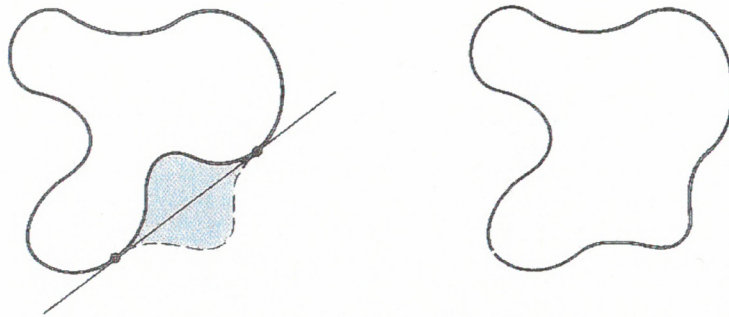
Les pel·lícules de sabó permeten resoldre experimentalment els problemes de minimització gràcies a les forces que hem tractat en el primer apartat: la tensió superficial i la capil·laritat permeten que una pel·lícula pugui mantenir-se de manera estable en una estructura desafiant la gravetat i el principi de la mínima energia potencial fa que l'àrea de la mateixa es redueixi al màxim.

Per a comprovar que la resposta que hem donat al problema és la correcta farem un experiment amb pel·lícules de sabó. Es necessiten dues làmines de vidre o plàstic transparent unides amb claus de manera que entre les dues hi hagi un espai d'un parell de centímetres. Si submergim aquesta estructura en una dissolució de sabó es formarà una bombolla que si la inflem prendrà forma cilíndrica. Aquesta demostració empírica prova que el cilindre té l'atribut de contenir el major volum amb la mínima superfície lateral. La propietat del cilindre en tres dimensions és equivalent a la de la circumferència en dues dimensions.

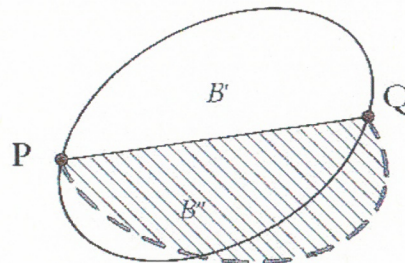


Imatge 3.1 Resolució experimental del problema de la princesa Dido

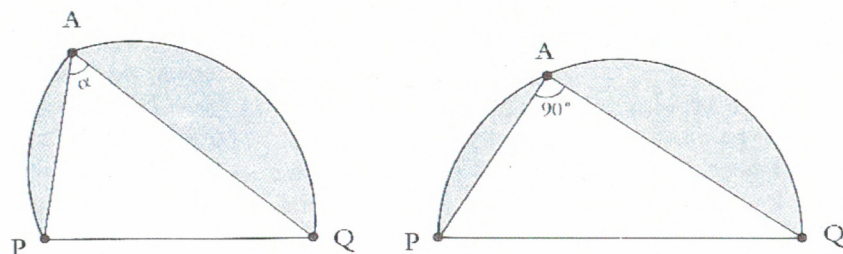
Jakob Steiner proposà l'any 1836 una demostració matemàtica que provava que realment la circumferència delimitava la regió més extensa possible. El seu raonament començava suposant que existia com a mínim una solució al problema. Per a trobar-la, el primer que s'ha de demostrar és que la solució ha de ser una corba convexa. Les corbes convexes tenen la propietat que al traçar un segment que uneixi dos punts qualssevol del seu perímetre, aquest segment només travessa la superfície interior de la corba. Si no fos així, sempre es podria traçar una recta tangent a dos punts del perímetre i, mitjançant un eix de simetria, construir una nova corba. Aquesta última tindria una superfície major amb el mateix perímetre.



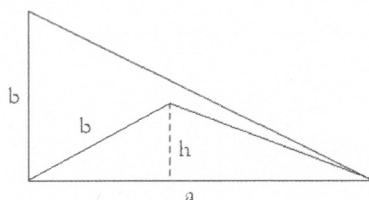
Escollim una corba convexa qualsevol que anomenarem C . Seguidament marquem sobre C els punts P i Q , que divideixen el perímetre en dos arcs iguals. La línia traçada per P i Q separa la superfície en dues regions, B' i B'' . Si pretenem que l'àrea delimitada per A sigui òptima, la superfície de B' i de B'' ha de ser la mateixa, ja que si no podríem traspasar la forma de l'arc que delimita l'àrea major en el menor per simetria. Per tant les àrees de B' i B'' han de ser iguals i simètriques.



Per a demostrar que A és una circumferència fa falta comprovar que els arcs són semicercles. Suposem que un no ho fos. En aquest cas es podria dibuixar un triangle, els vèrtexs del qual anomenarem P , Q i A (el punt A pertany a l'arc). Ara imaginem que podem obrir o tancar l'angle α augmentant o disminuint la longitud de PQ . Ni el perímetre ni l'àrea del semicircle que no pertany al triangle APQ (representada en blau) no varia, només ho fa la superfície del triangle.



Aquesta serà màxima quan l'angle α sigui de 90° , perquè, donats dos catets, el triangle d'àrea major que es pot construir és un de rectangle. Això es demostra expressant l'àrea com la meitat del producte del catet a per l'altura, h . ($A=1/2 ah$) Aquesta expressió és màxima quan b és perpendicular al catet a :



Per a que l'àrea sigui màxima, qualsevol triangle que es pugui formar amb els punts P, Q i un altre que pertanyi a l'arc ha de ser rectangle. Aquesta condició només es dona en els semicercles (principi de l'arc capaç). Com ja hem demostrat que els dos arcs han de ser iguals, la corba que donat un perímetre delimita l'àrea major és la circumferència.

Fins a finals del segle XIX els matemàtics no donaren importància a la qüestió lògica de demostrar que existeix una solució pels problemes de màxims i mínims. Això els permetia encarar problemes molt complexos que d'altra manera i amb les eines de l'època haguessin estat irresolubles. Acceptant com a principi natural que els problemes de màxims i mínims tenen almenys una solució es pot iniciar una demostració descartant casos fins que només en queda un, que haurà de ser l'òptim.

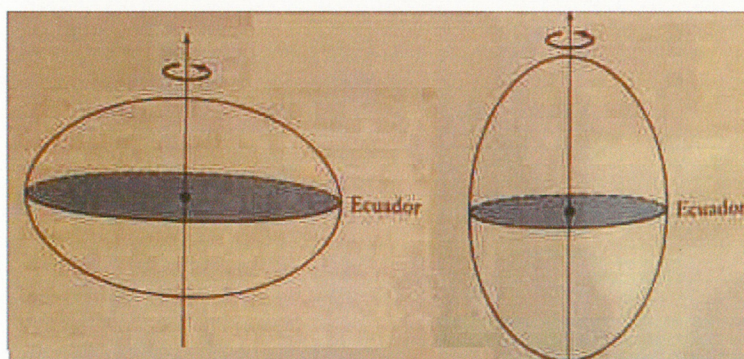
Weistrass era en aquell moment el matemàtic més notable de la universitat de Berlín i era conegut pel seu extrem rigor. Va demostrar que en un problema de màxims i mínims no és suficient examinar totes les possibles solucions, si no que és necessari demostrar que la solució existeix. Weistrass va utilitzar un contraexemple espectacular per a demostrar la seva teoria: Sabem que 1 és el mínim dels nombres naturals i suposem que n'hi ha un de màxim, que anomenarem n . Si elevem n al quadrat haurem trobat un enter positiu major que n ($n < n^2$), fet impossible perquè n és el major enter. Per tant 1 ha de ser el major dels enters perquè $1=1^2$. L'error d'aquesta demostració és suposar que existeix un nombre natural de valor màxim.

La demostració de Steiner no prova l'existència d'una configuració òptima però demostra que en el cas que n'existís una, aquesta seria el cercle. Necessitem una nova argumentació per a demostrar que existeix una solució. Imaginem un polígon amb un nombre parell de costats, $2n$. Sabem que un polígon regular amb el perímetre determinat delimita una àrea més gran que un altre polígon amb el mateix nombre de costats i el mateix perímetre però que no és regular. Tots els vèrtex d'aquest polígon regular es troben en el cercle circumscribit. Si fem tendir a infinit el nombre de costats, el polígon es converteix en un cercle. En aquesta demostració no hi ha problema d'existència perquè no donem res per suposat.

3.2 Planetes en rotació

En aquest apartat estudiarem els planetes en rotació. Aquests tenen una forma essencialment esfèrica que correspon a la configuració de mínima àrea. Aquesta configuració també correspon a l'estat de mínima energia potencial gravitatòria del conjunt de totes les partícules.

En el segle XVII Isaac Newton (1643-1727) va publicar l'obra que revolucionaria la física moderna i obriria una nova era: els *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principis matemàtics de la filosofia natural). Fins a mitjans del segle XVIII l'Europa continental va estar dominada per les teories físiques de René Descartes (1596-1650). Les discussions sobre quin model físic era el correcte van durar molts anys i no van acabar fins que no es va poder comprovar quina forma té el planeta Terra, que era un dels punts de més controvèrsia. Els cartesianes defensaven que la Terra és més estreta a l'equador i en canvi Newton havia predit que la Terra estava aixafada pels pols.



Imatge 3.2 La Terra segons Newton i Descartes

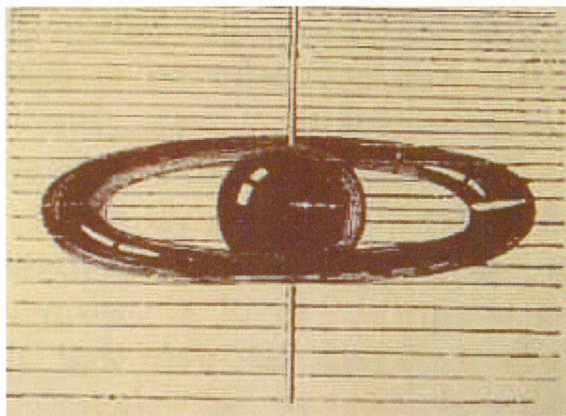
L'any 1736 es va emprendre una expedició a l'Àrtic dirigida per Maupertuis, que va ser un dels primers defensors de la teoria de Newton. Gràcies a les mesures que va prendre de les geodèsiques de la Terra es va poder demostrar que efectivament aquesta està aixafada pels pols com a conseqüència de la seva rotació. Voltaire (1694-1778), filòsof francès contemporani a Maupertuis, escriuria referint-se a ell:

*Vous avez confirmé dans les lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connu sans sortir de chez lui.*

Els planetes són masses de matèria sotmeses només a la seva pròpia força de la gravetat (autogravitació). Això vol dir que cada porció de substància experimenta una força d'atracció cap a totes les altres segons la llei de Newton. Aquesta força cohesiona la matèria. A més considerem que el planeta en qüestió està rotant sobre si mateix amb una velocitat angular uniforme. Fruit de la rotació del planeta sembla que aparegui una altra força, que és fruit de l'energia de rotació.

$$\text{Energia total} = \text{Energia gravitatòria} + \text{Energia de rotació}$$

Segons el principi dels treballs virtuals de Bernoulli, l'equilibri d'un sistema està relacionat amb els estats estacionaris d'energia potencial i en el cas que es tracti d'un equilibri estable, amb un mínim d'energia potencial. Podem utilitzar l'experiment de Plateau sobre les forces interfacials com a model per a observar el que passa amb matèria en el buit. A l'experiment, la força cohesionadora enlloc de ser la gravetat és la tensió superficial. Quan el fluid està en repòs pren una forma perfectament esfèrica. Si imprimim una velocitat angular al cos, veurem que s'aixafa pels pols i si continuem accelerant-lo es desprendreà un anell com el de la següent imatge.

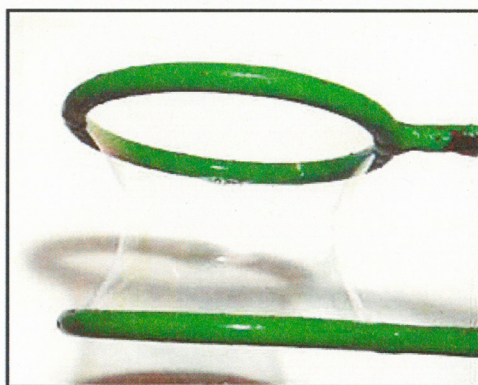


Imatge 3.3 Model experimental d'un planeta en rotació

L'energia de rotació del cos és contrarestada per la tensió superficial. Al deformar-se el cos la seva superfície augmenta i també augmenta l'energia de la tensió superficial. Quan les dues forces arriben a l'equilibri la forma del fluid és un esferoide oblat.

3.3 La catenoide

Euler va demostrar que la superfície mínima que uneix dos cercles coaxials (que tenen els centres situats en el mateix eix) és la catenoide. Podem comprovar-ho amb les propietats de les pel·lícules de sabó. Submergim dos anells en una dissolució per a fer bombolles i els traïem units. Una vegada a fora els dos cercles es poden anar separant i apareix una pel·lícula de sabó amb una forma peculiar (Imatge 3.4). En el capítol titulat Màxims i mínims hem vist que la catenària és la forma que pren una cadena en equilibri penjada pels extrems. La catenoide s'obté fent rotar la catenària per un eix de revolució.

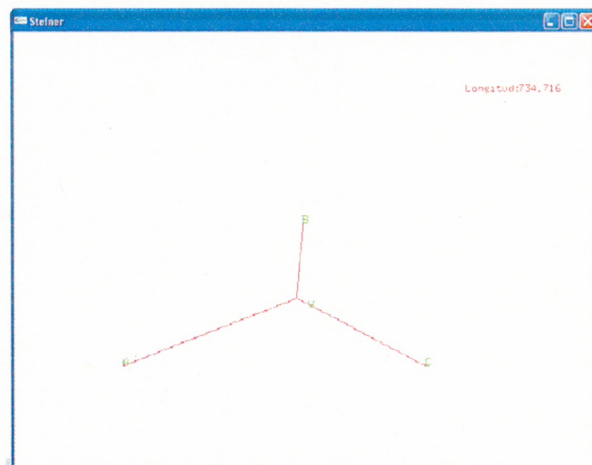
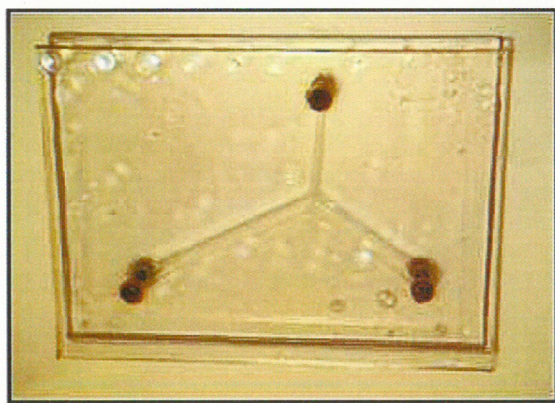


Imatge 3.4 Catenoide

A mesura que es separen els dos cercles, la forma de la catenària va variant. Com més allunyats estan, més petit és el radi del mig. Es sap amb precisió a quina distància la catenoide es trenca: és quan la separació entre els cercles és major que 1,325 vegades el seu radi. En aquest punt la superfície dels dos cercles és menor que la de la catenoide i és per això que la pel·lícula separa en dos i es formen dos discs en els anells.

Experimentalment he trobat que la distància a la que es trenquen és una mica menor, 1,12 vegades el radi. El mètode per a determinar-la que he seguit ha estat deixar un dels anells sobre la taula i anar pujant l'altre a poc a poc. He repetit el procediment cinc vegades prenent les mesures amb un regle posat vertical que té un error associat d'un mil·límetre. La mitjana ha estat que la catenoide es trenca quan la distància és 1,12 vegades el radi. Crec que en aquest experiment la font de l'error ha estat que el cercle superior no devia estar ben centrat ja que l'aguantava amb la mà.

El problema de Steiner

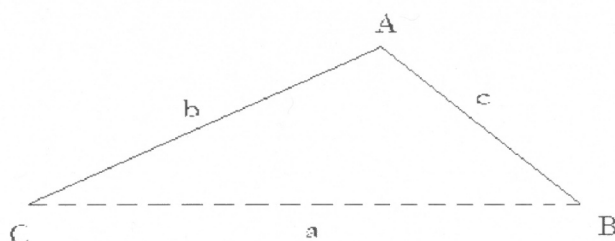


Solució física i informàtica del problema de Steiner per a tres punts

4.1 El problema geomètric

A principis del segle XIX Jakob Steiner, professor de geometria de la Universitat de Berlín, va estudiar el següent problema: *Tres ciutats, A, B i C han de ser unides per un sistema de carreteres de longitud mínima.* En termes matemàtics es demana trobar un punt P tal que la suma dels segments VA , VB , i VC sigui mínima. Aquest problema té moltes aplicacions en el camp de les comunicacions perquè reduir la longitud d'un sistema de carreteres o cables al mínim equival en principi a reduir-ne també el cost.

Com el mateix Steiner va demostrar, la solució geomètrica del problema és que el punt V , que anomenarem vèrtex de Steiner, es troba a dins del triangle format per ABC o correspon a un dels seus vèrtex. Si els angles A , B i C són tots menors que 120° el punt V es troba a dins del triangle. Si un dels tres angles és major que 120° , el vèrtex correspon a aquest mateix vèrtex perquè això fa que la suma dels dos costats del triangle que l'uneixen amb els altres dos vèrtexs sigui menor que qualsevol altra combinació de dos costats. Això és cert perquè l'angle major sempre està oposat al costat major, com es pot demostrar mitjançant el teorema del sinus i el principi que anuncia que els angles interiors d'un triangle sempre sumen 180° :

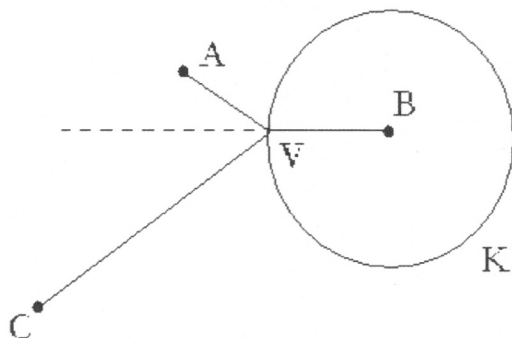


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Sigui ABC un triangle qualsevol amb l'angle major A . Pel problema en qüestió suposem que l'angle A és igual o major que 120° i que $B+C \leq 180-A$ perquè $A+B+C=180^\circ$. Com que B i C són valors majors que zero (en cas contrari, el triangle no es pot construir) $B < 180-A$ i $C < 180-A$. Del teorema del sinus en podem extreure que la longitud d'un costat es pot expressar com $a=2R \cdot \sin(A)$, sent R el radi de la circumferència circumscrita del que en podem deduir que la longitud d'un costat és proporcional al sinus de l'angle oposat. La funció sinus retorna un valor equivalent per a $\sin(A)$ i per a $\sin(180-A)$, igualtat que podem expressar també com $\sin(A)=\sin(B+C)$.

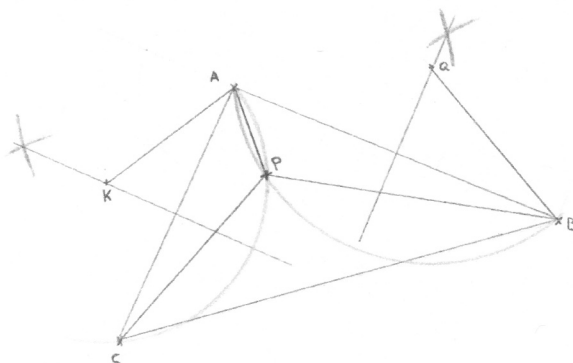
Com la funció sinus és creixent de 0 a 90° i $B+C < 60^\circ$, $\sin(B+C) > \sin(B)$ i $\sin(B+C) > \sin(C)$. El costat a és el major i ens convé evitar utilitzar-lo per a connectar els tres vèrtex.

L'altre cas possible és que el punt V estigui dins del triangle ABC . Imaginem una circumferència K centrada en B i amb radi c . V és un punt de K que minimitza la distància de $VA+VC$. A partir del teorema d'Heró sobre la reflexió de la llum que ja hem vist, podem provar que VA i VB formen angles iguals amb la tangent a la circumferència K per V i per tant els angles AVB i CVB són iguals.



Podem seguir el mateix procediment i construir dues circumferències més amb el centre a C i a A que passin per V per a demostrar que els angles AVB , BVC i CVA són iguals. Aquests tres angles iguals han de sumar 360° , així que cada un ha de valer exactament 120° .

La millor manera de trobar geomètricament el punt V és mitjançant el teorema de l'arc capaç, que permet dibuixar un arc de circumferència amb la propietat de que tots els seus punts units a l'extrem de l'arc formen el mateix angle, en aquest cas de 120° .



Imatge 4.1 Construcció del punt de Steiner mitjançant arc capaç

4.2 El problema físic i el model matemàtic

Podem utilitzar un mètode experimental per a solucionar el problema de Steiner. Comencem per un cas particular del que ja coneixem la solució: com connectar dos punts de manera òptima. Naturalment la solució és que els uneixi un segment. Necessitem dues planxes transparents unides per dos claus que representen els punts A i B . Anomenarem l la longitud de les possibles configuracions diferents que uneixen els dos punts i h la separació que hi ha entre les dues planxes (Imatge 4.2).

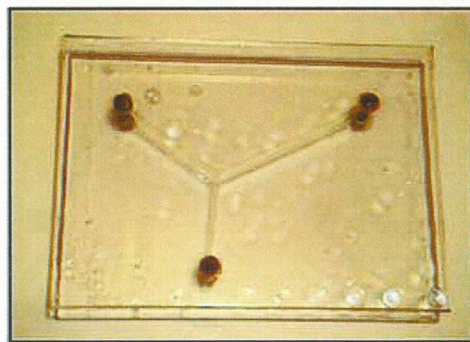


Imatge 4.2 Solució experimental per a dos punts

Al submergir l'estructura en una dissolució d'aigua i sabó es forma una pel·lícula que uneix A i B i que tarda menys d'un segon en arribar a la configuració d'energia potencial elàstica mínima. Com ja hem vist, l'energia elàstica d'una superfície sabonosa s'expressa com $E = \sigma_p A$ si la tensió superficial és constant. En aquest cas l'àrea es pot expressar com $A=lh$. Com que la separació entre les dues planxes és constant, l'àrea serà mínima quan l sigui mínima. Al realitzar l'experiment el resultat és una superfície sabonosa rectangular que correspon a la configuració òptima que esperàvem.

El problema de Steiner per a tres punts no té una solució tan senzilla, com ja hem comentat. Utilitzem el mateix suport amb tres claus enlloc de dos per a resoldre aquest cas experimentalment (Imatge 4.3). En el cas que tots els angles del triangle siguin menors de 120° , la pel·lícula que representa la solució està formada per tres rectangles que s'uneixen en un punt que forma angles de 120° . En l'altre cas, el vèrtex V correspon al punt del triangle que té l'angle major que 120° .

He repetit l'experiment dels tres punts deu vegades i en totes el resultat ha estat el mateix: el vèrtex de Steiner es situa de manera que forma angles de 120° amb els punts del triangle tot i que tarda un parell de segons en situar-se. Les mesures dels angles estan fetes amb un transportador que té un error de $\pm 1^\circ$ i sempre el resultat és el mateix. El gruix de la pel·lícula de sabó es pot depreciar.



Imatge 4.3 Solució experimental per a tres punts

Quantificar l'energia potencial elàstica d'aquest sistema és molt més complicat. Comencem per calcular la longitud dels tres segments:

$$\sqrt{(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2} + \sqrt{(x - B_x)^2 + (y - B_y)^2} + \sqrt{(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2}$$

Les coordenades x i y situen el vèrtex d'unió V . Les altres coordenades (A_x , A_y ...) determinen la posició dels punts a unir. Com tots els segments de la solució pel problema de Steiner són rectes, la configuració està determinada per la posició del vèrtex d'unió. Anomenarem l a la seva longitud total, és a dir, a la suma de les tres distàncies. L'energia elàstica serà $E = \sigma_p lh$. Com la tensió superficial i la separació entre les dues plaques són constants, l'energia només depèn de l'expressió de $l(x,y)$ i d'una constant que anomenarem c que correspon a $\sigma_p * h$.

$$E(x,y) = l(x,y) * c;$$

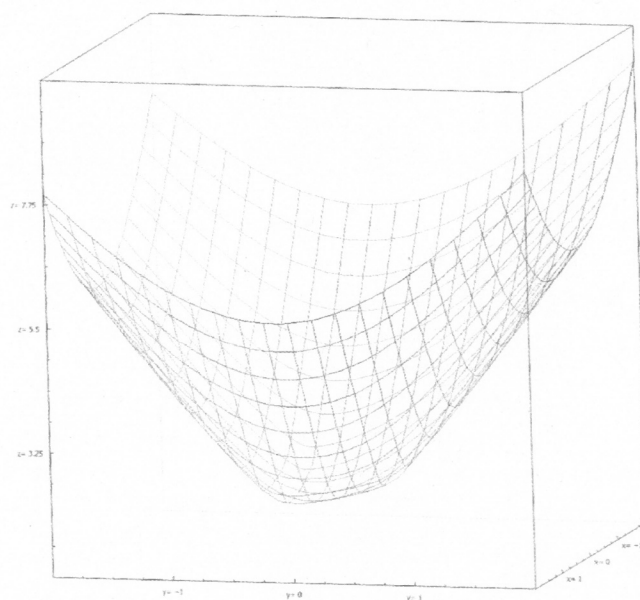
La funció de l'energia i la de la longitud són proporcionals i per tant tenen els seus màxims i mínims en els mateixos punts, tot i que aquests tenen imatges diferents. La gràfica de la funció l de dues variables independents es pot representar en un espai

tridimensional $z = l(x,y)$. (Imatge 4.4). La gràfica ha estat generada mitjançant el programa Microsoft Student® 2007 utilitzant les següents coordenades:

A: (0.5,0.5);

B: (-0.5,0.5);

C: (-0.5,-0.5);



Imatge 4.4 Representació de $l(x,y)$;

La coordenada z representa la longitud de la carretera que uneix els tres punts A , B i C utilitzant com a vèrtex d'unió el punt situat a les coordenades x i y . La funció no té màxim ja que podem escollir un punt V tan allunyat com vulguem. És difícil demostrar que aquesta funció només té un mínim absolut. Si s'intenta estudiar per derivades parcials l'equació de $l(x,y)$ el resultat és una fórmula molt complexa que no aporta més informació. Ens hem de refiar del gràfic, que mostra clarament que només té un mínim.

El vèrtex d'unió de l'experiment físic tarda un parell de segons en arribar a la posició d'equilibri estable associada a un mínim d'energia potencial. Es pot veure com es desplaça just després de que la pel·lícula s'hagi format. El moviment del vèrtex correspon a un desplaçament cap a configuracions de menor energia potencial. És similar al moviment d'una pilota que cau per acció de la gravetat en un paratge en tres dimensions com el de la gràfica. Això es pot explicar en termes energètics: en els dos casos l'energia potencial es redueix fins a trobar un mínim. Com l'energia és la integral

de les forces que rep un sistema, en un mínim les forces que afecten al sistema són zero o estan totes igualades.

Matemàticament ha de ser possible trobar la situació del mínim mitjançant procediments complicats, però la pel·lícula el troba amb un procés molt simple: el moviment del vèrtex V segueix la direcció de la tangent de la funció que determina una pendent més pronunciada des del punt on és, com faria una pilota. Això té sentit físicament perquè, com ja hem dit, la variació de la funció de l'energia equival a força. És per això que un cos al caure per una pendent sempre tendeix a seguir la inclinació major. Com que en el cas del problema de Steiner per a tres punts només hi ha un punt mínim, que és absolut, el vèrtex V al "caure" pel paratge energètic de la gràfica sempre troba el punt de mínima energia potencial, que equival a la solució òptima. Per a comprovar si aquest model matemàtic és correcte, utilitzarem un programa informàtic que simula els moviments del vèrtex.

El que fa el programa és trobar un mínim de l'equació $l(x,y)$. Una funció recursiva calcula quin és el pendent cap a quatre direccions perpendiculars des d'un punt determinat i escull el més pronunciat. Tot seguit avança seguint aquesta direcció i el procediment torna a començar. Quan arriba a un punt en el que ja no pot reduir més la distància de la carretera, el programa deixa de funcionar i representa la solució gràficament (Imatge 4.5). La funció recursiva, que és la més important del programa ja que fa moure el vèrtex, és aquesta:

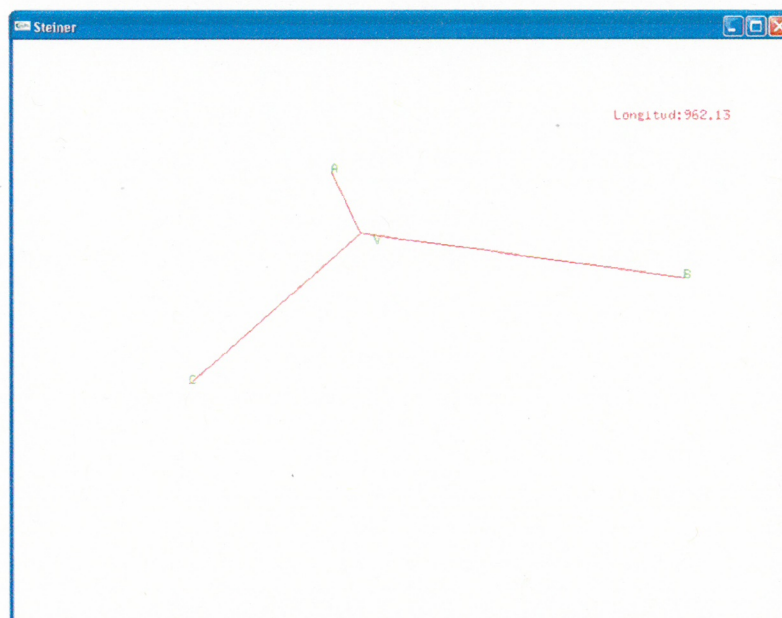
```
void buscador (int x, int y, int ax, int ay, int bx, int by, int cx, int cy) {
    float d = distancia (x,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);

    float d1 = distancia (x+1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d2 = distancia (x,y-1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d3 = distancia (x-1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d4 = distancia (x,y+1,ax,ay,bx,by,cx,cy);

    d1=d1-d;
    d2=d2-d;
    d3=d3-d;
    d4=d4-d;

    if ((d1<0) || (d2<0) || (d3<0) || (d4<0)) {
        if ((d1<d2) && (d1<d3) && (d1<d4)) buscador (x+1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d2<d1) && (d2<d3) && (d2<d4)) buscador (x,y-1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d3<d1) && (d3<d2) && (d3<d4)) buscador (x-1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d4<d1) && (d4<d2) && (d4<d3)) buscador (x,y+1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    }
}
```


La funció *distancia* calcula la longitud dels tres segments (VA , VB , VC) i els suma. Les variables $d1$, $d2$, $d3$ i $d4$ guarden la variació de la distància al moure V .



Imatge 4.5 Solució representada gràficament

El programa treballa amb coordenades cartesianes enteres compreses entre 1 i 1000, que són els extrems de la finestra del gràfic. L'entrada del programa són tres parells de nombres enters, que determinen la posició de les ciutats A , B i C . La sortida és el gràfic que situa i uneix les tres ciutats amb el vèrtex i la longitud de la carretera mínima a l'extrem superior dret.

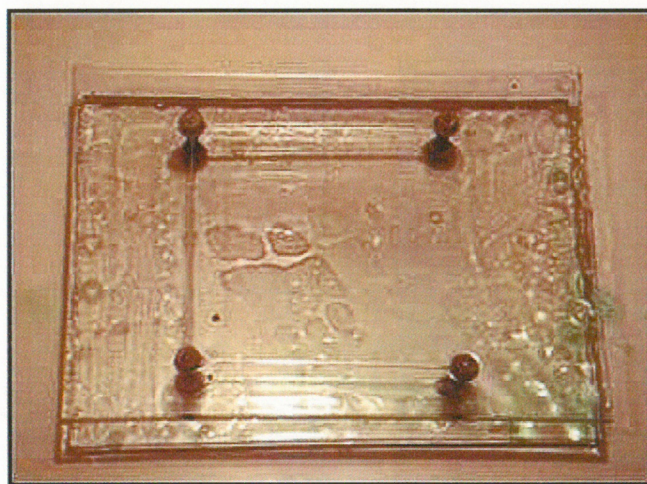
Aquest programa permet comprovar que el model matemàtic que explica el moviment del vèrtex de Steiner és correcte. El programa ha trobat la configuració òptima en tots els casos provats i no varia segons on es situï el vèrtex de Steiner a l'inici. Això és degut a que el problema de Steiner per a tres punts només té un mínim i per tant aquest és el mínim absolut i representa la solució òptima, a diferència del que passa amb el problema de Steiner per a més punts.

4.3 Generalització del problema de Steiner

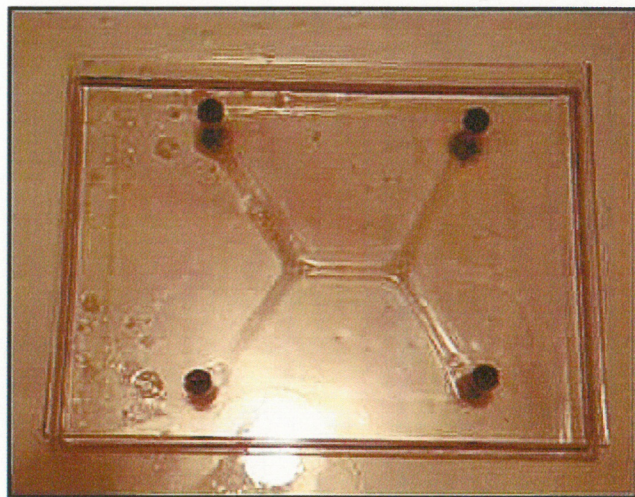
El problema de Steiner per a un nombre variable de punts també s'anomena problema de la carretera. L'enunciat és gairebé el mateix: unir un nombre variable de punts amb un sistema de segments per a que la longitud total d'aquests sigui mínima.

Les configuracions òptimes per a més de tres punts són molt similars a les que ja hem vist, ja que els vèrtexs de Steiner continuen tenint la propietat d'unir tres segments amb tres angles de 120° . La complicació és que el nombre de vèrtexs possibles augmenta a mesura que s'afegeixen més punts a unir. Com que cada vèrtex de Steiner uneix tres punts, el nombre màxim que n'hi pot haver és $n-2$. De moment aquesta fórmula es compleix per als casos que hem vist anteriorment ($n=2$ i $n=3$).

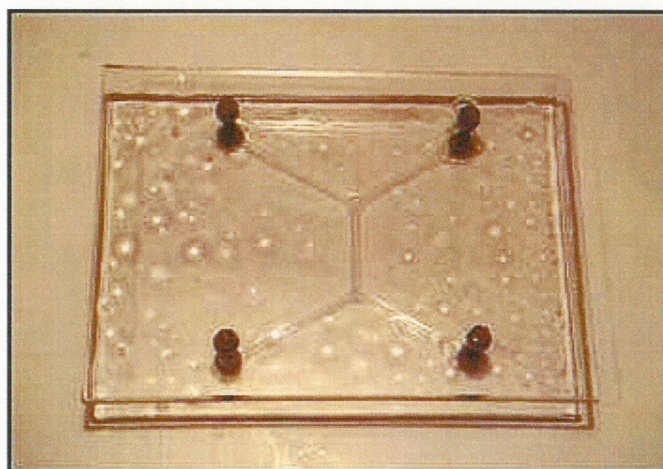
Utilitzarem una estructura similar a l'anterior però amb quatre claus situats formant un quadrat. En aquest cas l'experiment no determina una sola configuració ja que després de deu repeticions els resultats són varis i hi ha tres configuracions diferents que semblen estables. N'he obtingut dues amb forma de C orientada en totes les direccions (Imatge 4.6) i les altres vuit esbossen una H amb les puntes inclinades (Imatge 4.7) i (Imatge 4.8).



Imatge 4.6 Configuració amb forma de C



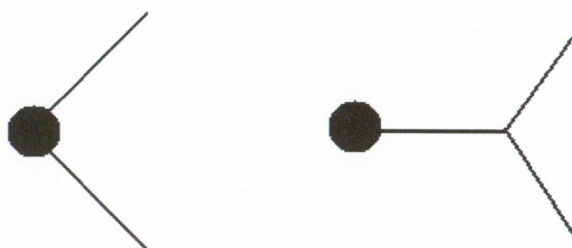
Imatge 4.7 Configuració amb forma de H



Imatge 4.8 Configuració amb forma de H girada

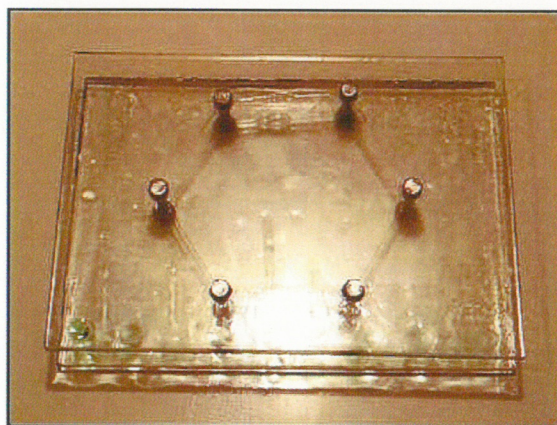
Calculant la longitud de les tres configuracions descobrim que la òptima és la que té forma de H i dos vèrtexs de Steiner. Com que es tracta de punts disposats en forma de quadrat les dues que tenen aquesta forma tenen la mateixa longitud total, però si la disposició no fos simètrica no serien iguals. Si prenem 1 com la mesura d'un costat del quadrat; llavors la primera solució té una longitud total de 3 unitats. En canvi les altres dues tenen una longitud de $1+\sqrt{3}$ que és aproximadament 2,73.

La primera configuració que hem obtingut amb pel·lícules de sabó pel problema amb quatre punts es pot desestimar perquè és fruit de l'error experimental. No representa una configuració mínima perquè els claus són massa gruixuts i això fa que les dues pel·lícules que s'haurien de tocar no estiguin en contacte (Imatge 4.9). En el model teòric, els punts tenen un diàmetre infinitament petit i, en canvi, en el sistema anàleg, els claus no. Aquest problema es pot solucionar bufant lleugerament per a crear una pertorbació que uneixi les dues pel·lícules.



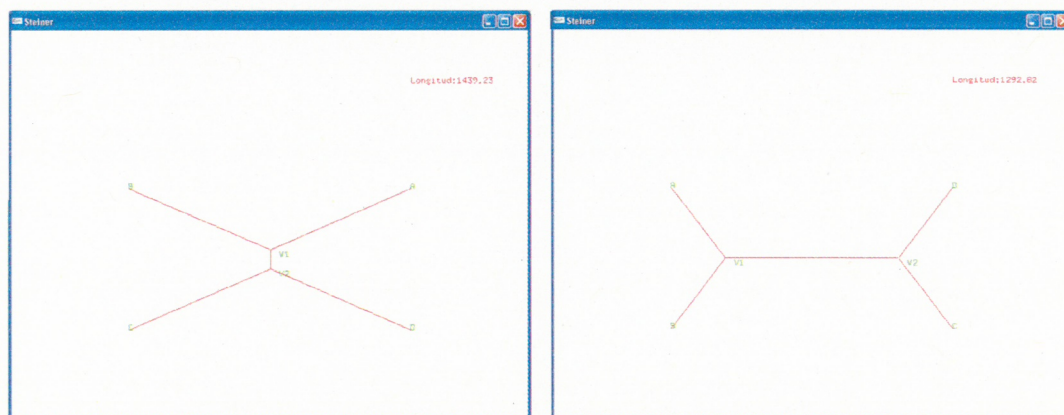
Imatge 4.9 Error experimental associat al diàmetre dels claus

No obstant això, que dues pel·lícules de sabó s'uneixin en un clau no és senyal d'error. Això pot passar quan l'angle que formen les dues pel·lícules és major o igual a 120° , com ja hem vist en la primera demostració geomètrica. L'hexàgon regular és una figura especialment interessant ja que per a unir els seus vèrtex de manera òptima no s'utilitza cap vèrtex de Steiner. Això és així perquè els angles interiors de l'hexàgon són de 120° (Imatge 4.10). Qualsevol polígon regular de més de sis costats s'uneix de forma òptima sense vèrtexs de Steiner per la mateixa raó.



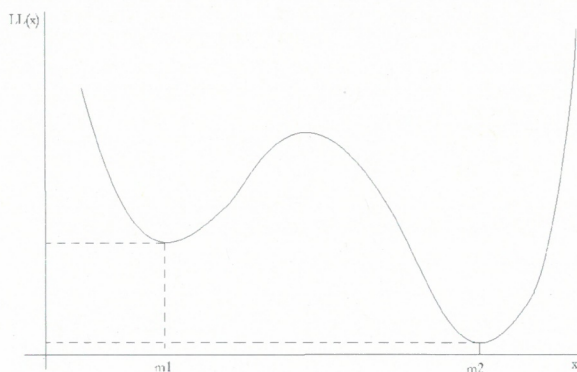
Imatge 4.10 Hexàgon regular

Si poguéssim solucionar el problema del diàmetre dels claus, el model experimental tampoc no seria fiable perquè una mateixa distribució de punts pot determinar configuracions mínimes diferents. Això és perquè les pel·lícules de sabó són estables si es troben en una configuració energètica mínima, però aquest mínim pot no ser el mínim absolut (Imatge 4.11).



Imatge 4.11 Les dues configuracions són estables però només una és mínima. Han estat generades amb el programa Steiner-4.

Les dues configuracions representen mínims locals de longitud, el que vol dir que l'energia potencial elàstica dels sistemes es troba en els dos casos en una posició de mínim estable. La configuració de la dreta, a més, representa el mínim absolut de la funció de l'energia elàstica perquè no hi ha altres configuracions estables a part d'aquestes dues. Es pot passar d'una configuració a l'altra sacsejant suaument l'experiment. D'aquesta manera es transmet energia cinètica a la pel·lícula i aquesta pot desplaçar-se fins a altres configuracions. Al deixar-la quieta un altre cop el principi de mínima energia potencial la portarà fins a un estat d'energia estable.



Imatge 4.12 Gràfica de l'energia potencial elàstica per a quatre punts.

La coordenada de les abscisses representa les posicions que poden prendre els vèrtexs. L'eix de les ordenades equival a la llargada de la carretera que uneix els quatre punts i els dos vèrtexs, que és proporcional a l'energia potencial elàstica de la pel·lícula.

El gràfic és una versió simplificada de l'energia associada a cada posició dels vèrtexs. Aquesta funció és gairebé la mateixa que la que ja hem vist pel problema amb tres punts, però en aquest cas té dos vèrtexs independents i quatre punts preestablerts. Aquesta funció s'hauria de representar en un espai de cinc dimensions perquè quatre variables determinen la posició dels dos vèrtexs i la cinquena seria la imatge. Aquesta representaria la longitud total de la configuració. Aquesta funció ha de tenir dos mínims i es podrien trobar matemàticament mitjançant derivades parcials però fer-ho és summament complicat.

El programa Steiner-4 serveix per a trobar mínims de distància en espais de cinc dimensions. Com feia l'altra versió, calcula quant varia la distància de la carretera que uneix tots els punts al moure els dos vèrtexs. L'entrada del programa són quatre parells de nombres enters que determinen les coordenades dels quatre punts inicials. El programa col·loca inicialment els dos vèrtex de Steiner a les coordenades del primer i tercer punt i des d'allà ajunta el primer i el segon punt amb un vèrtex, el tercer i el quart amb un altre i també els dos vèrtexs entre si.

Com ja hem vist, la sortida del programa Steiner-4 no té perquè ser la òptima, ja que emula el procediment de les bombolles de sabó. Tot depèn de l'ordre amb el que s'introdueixen les coordenades ja que això determina quina parella de punts uneix cada vèrtex. Aquesta versió també mostra posició d'ambdós vèrtexs a cada moment en una altra finestra i també mostra la distància total.

377 500	600 500	->	623
378 500	600 500	->	622
379 500	600 500	->	621
380 500	600 500	->	620
381 500	600 500	->	619
382 500	600 500	->	618
383 500	600 500	->	617
384 500	600 500	->	616
385 500	600 500	->	615
386 500	600 500	->	614
387 500	600 500	->	613
388 500	600 500	->	612
389 500	600 500	->	611
390 500	600 500	->	610
391 500	600 500	->	609
392 500	600 500	->	608
393 500	600 500	->	607
394 500	600 500	->	606
395 500	600 500	->	605
396 500	600 500	->	604
397 500	600 500	->	603
398 500	600 500	->	602
399 500	600 500	->	601
400 500	600 500	->	600

Pot semblar que aquest procediment tan simple falli amb els casos més banals, com el dels quatre punts situats en una recta, però dóna la resposta correcta ja que els vèrtexs es situen sobre dos dels punts originals.



El codi és molt més llarg que el de l'altra versió perquè per a computar la variació de la funció de la llargada s'han de fer 24 càlculs abans de cada moviment, mentre que en el programa anterior només se'n feien quatre. Això és degut a que el moviment independent de dos vèrtexs es pot combinar de moltes maneres, concretament 5^2 . Cinc són els moviments que pot fer un sol vèrtex: anar endavant, endarrere, a la dreta, a l'esquerra o quedar-se quiet. Per tant una combinació del moviment dels dos estableix 25 possibilitats diferents, però se li ha de restar la de que els dos es quedin quiets, ja que si passa això, el programa ja ha trobat un mínim.

És per això que el següent pas, que seria programar una altra eina que calculi la llargada mínima per al problema de cinc punts, és gairebé irrealitzable. Per a aquest problema seria necessari fer $5^3 - 1$ operacions abans de moure els vèrtexs.

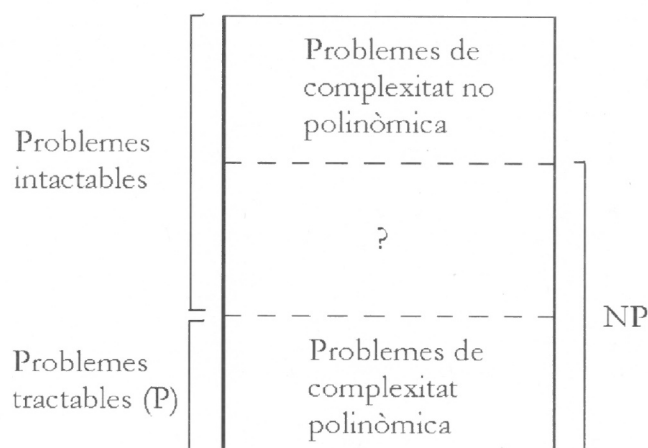
Hem vist que per al problema amb tres punts només hi havia una posició mínima que havia de ser a la força el mínim absolut. Per al problema amb quatre punts n'hi ha dos. A mesura que augmenta el nombre de punts originals van apareixent més configuracions de mínims locals i cada vegada és menys probable trobar experimentalment la configuració òptima i més costós processar-la informàticament.

4.4 P vs NP

L'organització Clay Mathematics Institute ofereix un milió de dòlars per a qui resolgui el problema de $P=?NP$. A part d'aquest, hi ha sis problemes més que han estat catalogats com a Problemes del Mil·lenni pel fet que es consideren fonamentals pel desenvolupament futur de les matemàtiques perquè la seva resolució obrirà una infinitat de nous camins a seguir.

La qüestió de $P=?NP$ tracta de quins problemes poden ser resolts per un ordinador. Els problemes informàtics es poden catalogar en diferents grups. El més general els distribueix segons el seu cost, és a dir, segons el nombre d'operacions que ha de fer el programa per a resoldre un joc de proves. Això determina si el problema és tractable o intractable. Un problema es considera tractable si el cost és polinòmic i aquest grup es simbolitza per P. En canvi no són tractables els problemes que tenen un cost que no és polinòmic. A aquests problemes se'ls anomena impracticables. En aquest cas la funció cost acostuma a ser exponencial o factorial.

P simbolitza els problemes que tenen un cost polinòmic utilitzant un sol processador i NP fa referència als problemes que tenen un cost polinòmic utilitzant tants processadors com faci falta. Tots els problemes que estan en el grup P han d'estar per força en el grup NP perquè si es pot resoldre eficaçment un problema amb un processador també es pot fer amb varis.



Hi ha un grup de problemes dins dels NP que s'anomenen NP-complete. Aquests tenen la característica de que si un pot ser resolt mitjançant un algoritme de cost polinòmic, llavors tots els problemes del grup es poden resoldre amb algoritmes de cost polinòmic. Així que per a provar que $P=NP$ només fa falta trobar un algoritme amb cost polinòmic que resolgui un problema NP-complete qualsevol.

El problema de la carretera és de la categoria NP perquè si el nombre de punts a unir és molt gran, per a resoldre'l s'haurien de trobar tots els punts on és possible que hi hagi un vèrtex de Steiner i comprovar totes les combinacions possibles per a trobar quina té la distància total menor. Naturalment hi ha maneres molt millors que aquesta (que es coneix com a resolució per força bruta) per a trobar la configuració òptima, però cap aconsegueix tenir una funció de cost polinòmica. A més s'ha demostrat que el problema forma part de la categoria dels NP-complete.

Bringsjord i Taylor van publicar un article en el que sostenien que P és igual a NP. La seva argumentació establia el següent: les bombolles de sabó poden resoldre el problema de Steiner en el món físic amb temps polinòmic i les bombolles de sabó obeeixen les lleis clàssiques de la física, que un ordinador pot simular en temps polinòmic. Per tant un ordinador pot resoldre el problema de Steiner en temps polinòmic i això comporta que $P=NP$.

També és molt interessant el que escriuen els autors sobre el concepte de "digital physics". Segons el seu parer, els fenòmens físics més clàssics, és a dir exclouent-hi la física quàntica, poden ser interpretats com si l'univers estigués format per un nombre infinit d'ordinadors. Aquesta idea té molt sentit perquè dels primers als últims ordinadors s'ha utilitzat la física per a fer càlculs. Primer eren aparells mecànics amb engranatges que feien operacions senzilles i ara són descàrregues elèctriques que passen per condensadors i resistències, però es continuen basant en la física.

Si bé crec que el temps que tarda una pel·lícula de sabó en "resoldre" una estructura com les que hem vist anteriorment és encara menor que polinòmic, no crec que l'argumentació sigui correcte. En la meua opinió, el temps depèn més de la distància que ha de travessar un vèrtex des d'on s'ha format fins que arriba a la posició d'equilibri que del nombre de vèrtexs. Una vegada més l'exemple de la pilota que

rodola pendent avall per acció de la força de la gravetat ho il·lustra, ja que tarden el mateix en caure cent pilotes que una i per tant el nombre de vèrtexs (que recordem que és com a màxim el nombre de punts originals menys dos) no influeix. Això és difícil de demostrar experimentalment perquè el temps que triga un vèrtex en arribar a una posició d'equilibri és molt curt i a més molt inexacte, ja que el moviment al treure'l de la dissolució de sabó ja altera la trajectòria.

El problema en l'argumentació de Bringsjord i Taylor és que les bombolles de sabó no resolen el problema de Steiner anàlogament. El que fan és mostrar configuracions d'equilibri estable que estan relacionades amb els mínims locals de longitud de la configuració total. No mostren la solució del problema (a part de per al problema d'unir tres punts, on només hi ha un mínim i aquest ha de ser també l'absolut) si no una configuració de mínim local que pot correspondre a l'absolut. A mesura que es fa més gran el nombre de punts inicials es fa més improbable que s'arribi per casualitat al mínim absolut perquè el nombre de mínims locals augmenta.

Conclusions

A nivell personal, el desenvolupament del treball ha suposat un repte per la complexitat del tema. Crec que un dels encerts ha estat utilitzar fonts de nivell universitari i alguns articles molt elevats. Al tractar conceptes tan específics, poc estudiats i divulgats, gairebé tota la bibliografia està escrita en anglès. Això m'ha suposat, almenys al principi, la càrrega afegida de buscar al diccionari paraules tècniques que jo desconeixia.

El més interessant per a mi del treball ha estat descobrir com es complementen les matemàtiques, la física i la informàtica i com per demostrar un principi en una d'elles utilitzem conceptes d'una altra. En tota investigació és molt profitós tenir una base interdisciplinària.

Després de l'elaboració del treball penso que la resposta a la hipòtesi inicial de si les pel·lícules de sabó serveixen per a resoldre problemes de minimització de superfície és que sí. No obstant s'ha d'especificar que una pel·lícula troba mínims locals de superfície i després s'ha de comprovar si es tracta d'un mínim absolut. Per això, en problemes com el de Steiner, plantejats per a unir molts punts on hi ha moltes configuracions possibles amb un mínim local i només una configuració que representa un mínim absolut, l'experimentació amb bombolles no serveix. No obstant això, observant una pel·lícula de sabó minimal es poden estudiar quines propietats matemàtiques ha de tenir una possible solució al problema.

Per a continuar la investigació jo aprofundiria pel camí de la matemàtica més teòrica i del càlcul de variacions, que és la part que té menys pes dins del treball. A més buscant informació sobre les idees de Maupertuis, que són la base del càlcul de variacions, vaig trobar part del discurs de Leibniz, que m'hagués agradat incloure però al no ser un tema essencial, vaig optar per descartar-lo.

Una altra possibilitat seria estudiar la complexitat del problema de Steiner per a un nombre variable de punts i explicar més a fons perquè el temps d'execució no pot ser

polinòmic. També seria interessant comparar els diferents procediments que hi ha per a resoldre'l i escriure un programa amb cada mètode per a analitzar quin és el més efectiu.

Alhora es podria tractar la relació que hi ha entre la física i els processadors actuals. Trobo fascinants els ordinadors quàntics que ja es comencen a utilitzar per a la recerca. Aquests són capaços de dividir nombres en factors primers amb temps polinòmic, el que comprometrà la seguretat d'Internet. Les contrasenyes informàtiques actuals acostumen a demanar quins són els dos factors del nombre resultant de multiplicar dos nombres primers molt grans. Fins ara es calculava que un ordinador tardaria com a mínim un any en trobar la solució, però amb un ordinador quàntic es tardarà molt menys i serà necessari utilitzar un altre sistema d'entrada.

Ha estat enriquidora la llibertat amb la que se'ns ha plantejat el treball. És el primer cop que hem escollit, organitzat i aprofundit en l'estudi d'un tema amb tanta autonomia. Ha estat necessari seguir una metodologia de treball, per a que aquest fos sistemàtic i efectiu, que es basava en l'estudi teòric, en l'experimentació i en l'elaboració d'un programa informàtic per a modelitzar pel·lícules de sabó. En el disseny del programa hi vaig destinar molt temps fins que, observant les pel·lícules de sabó, vaig entendre com minimitzaven la seva superfície.

Estic satisfet del treball realitzat i espero haver sabut comunicar l'entusiasme amb el que he encarat el tema.

Bibliografia

Referències generals

ATKINS, Peter; LORETTA, Jones (1998). *Química: moléculas, materia, cambio*. Barcelona, Ediciones Omega. 1000 pàg.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert (1964). *¿Qué es la matemática?* Madrid, ed. Aguilar. 500 pàg.

STEWART, James (2003). *Calculus*. Belmont (EUA), Brooks/Cole. 1400 pàg.

TIPLER, Paul; MOSCA, Gene (2007). *Física para la ciencia y la tecnología*. Barcelona, ed. Reverté. 1200 pàg.

Bombolles de sabó

BOYS, C. V. (1959). *Soap bubbles: their colors and forces which mold them*. New York, Dover. 200 pàg.

ISENBERG, Cyril (1992). *The science of soap films and soap bubbles*. New York, Dover. 180 pàg.

Màxims i mínims i càlcul de variacions

BLISS, Gilbert A. (1968). *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, Phoenix Books. 280 pàg.

HILDEBRANDT, Stefan; TROMBA, Anthony (1990). *Matemática y formas óptimas*. Barcelona, Prensa Científica. 190 pàg.

TIKHOMIROV, V. M. (1990). *Stories about maxima and minima*. New York, American Mathematical Society. 180 pàg.

Informàtica

MARTÍ, Narciso; PALOMINO, Miguel; VERDEJO, José Alberto (2005) *Introducción a la computación*. Madrid, Anaya. 190 pàg.

SANTOS, Manuel; PATIÑO, Ismael; CARRASCO, Raúl (2005) *Fundamentos de programación*. Madrid, Ra-Ma. 300 pàg.

Articles

AARONSON, Scott (2005). *NP-Complete problems and physical reality*. 23 pàg. (Consulta octubre de 2008)

<http://www.scottaaronson.com/papers/npcomplete.pdf>

BELL, Bob (1999). *Steiner minimal tree problem*. 7 pàg. (Consulta agost de 2008)

<http://cse.taylor.edu/~bbell/steiner/>

BRINGSJORD, Selmer; TAYLOR, Joshua (2004). *P=NP*. 6 pàg. (Consulta agost de 2008)

http://arxiv.org/PS_cache/cs/pdf/0406/0406056v1.pdf

CONSTANS, Nicolas (Desembre del 2005). *Tempêtes dans une bulle de savon*. La Recherche, Secció Physique. (Consulta octubre de 2008)

DUTTA, Prasun; KHASTGIR, Pratik; ROY Anushree (2008). *Steiner trees and spanning trees in six pin soap films*. 17 pàg. (Consulta octubre de 2008)

http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0806/0806.1340v1.pdf

KÖNEMANN, Jochen; PRITCHARD, David; TAN, Kunlun (2008). *A partition-based relaxation for Steiner trees*. 20 pag. (Consulta juny de 2008)

http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0712/0712.3568v1.pdf

Procedència de les imatges

Pàgina 1: Quadre a l'oli de Chardin, *Bombolles de sabó* (1739). National Gallery of Art, Washington.

Pàgina 9: Vinyeta de Tintín. *Hem caminat damunt la Lluna*, Hergé (1953).

Pàgina 10 i 12: Il·lustracions del llibre de C. V. Boys

Pàgina 13: Imatges de la presentació de la conferència del Sr. Aubanell

Pàgina 14 i 15: Les dues imatges són del llibre d'Atkins et alii

Pàgina 17: Gràfic del llibre d'Isenberg

Pàgina 21: Il·lustració del llibre d'Isenberg.

Pàgina 28 i 29: Gràfics del llibre de Tikhomirov

Pàgina 32: Dibuix del llibre de Hildebrandt i Tromba

Pàgina 37: Fotografia de la NASA. Biblioteca de Consulta Microsoft Encarta®.

Pàgina 40: Esquema del llibre de Hildebrandt i Tromba

Pàgina 43 i 44: Dibuixos del llibre de C. V. Boys

Pàgina 51: Gràfica generada amb el programa Microsoft Student® 2007

Annex

Programes

Steiner-3

```

/*
  Name: Steiner-3
  Author: M. Serra
  Description: Programa recursiu que busca minims de distància
*/

#include <iostream>
#include <math.h>

using namespace std;

float distancialineal (int x, int y, int ax, int ay) {
    float d;
    d=((x-ax)*(x-ax)+(y-ay)*(y-ay));
    d=sqrt (d);
    return d;
}

float distancia (int x, int y, int ax, int ay, int bx, int by, int cx, int cy) {
    float d= distancialineal(x,y,ax,ay)+distancialineal(x,y,bx,by)+distancialineal(x,y,cx,cy);
    return d;
}

void buscador (int x, int y, int ax, int ay, int bx, int by, int cx, int cy) {
    float d = distancia (x,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    cout<<x<<" "<<y<<" -> " <<d<<endl;
    float d1 = distancia (x+1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d2 = distancia (x,y-1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d3 = distancia (x-1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    float d4 = distancia (x,y+1,ax,ay,bx,by,cx,cy);

    d1=d1-d;
    d2=d2-d;
    d3=d3-d;
    d4=d4-d;

    if ((d1<0)|| (d2<0)|| (d3<0)|| (d4<0)) {
        if ((d1<d2) && (d1<d3) && (d1<d4)) buscador (x+1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d2<d1) && (d2<d3) && (d2<d4)) buscador (x,y-1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d3<d1) && (d3<d2) && (d3<d4)) buscador (x-1,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
        if ((d4<d1) && (d4<d2) && (d4<d3)) buscador (x,y+1,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    }
}

int main() {
    int ax,ay,bx,by,cx,cy;
    cin>>ax>>ay>>bx>>by>>cx>>cy;
    int x,y;
    x=ax;
    y=ay;
    buscador(x,y,ax,ay,bx,by,cx,cy);
    system("pause");
}

```

Steiner-4

```

/*
  Name: Steiner-4
  Author: M. Serra
  Description: Programa recursiu que busca zones de poc potencial
*/

#include <iostream>
#include <math.h>
#include <vector>

using namespace std;

float distancialineal (int x, int y, int ax, int ay) {
    float d;
    d = ((x-ax)*(x-ax) + (y-ay)*(y-ay));
    d = sqrt (d);
    return d;
}

float distancia (int x1, int y1, int x2, int y2, int ax, int ay, int bx, int by, int cx, int cy, int dx, int dy) {
    float d = distancialineal(x1,y1,ax,ay) + distancialineal(x1,y1,bx,by) + distancialineal(x1,y1,x2,y2);
    d = d + distancialineal(x2,y2,cx,cy) + distancialineal(x2,y2,dx,dy);
    return d;
}

void buscador (int x1, int y1, int x2, int y2, int ax, int ay, int bx, int by, int cx, int cy, int dx, int dy) {
    float distanciactual = distancia (x1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    cout<<x1<<" "<<y1<<" "<<x2<<" "<<y2<<" -> "<<distanciactual<<endl;
    vector <float> d (25);

    d[1] = distancia (x1+1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[2] = distancia (x1,y1-1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[3] = distancia (x1-1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[4] = distancia (x1,y1+1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[5] = distancia (x1+1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[6] = distancia (x1,y1-1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[7] = distancia (x1-1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[8] = distancia (x1,y1+1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[9] = distancia (x1+1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[10] = distancia (x1,y1-1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[11] = distancia (x1-1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[12] = distancia (x1,y1+1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[13] = distancia (x1+1,y1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[14] = distancia (x1,y1-1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[15] = distancia (x1-1,y1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[16] = distancia (x1,y1+1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[17] = distancia (x1+1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[18] = distancia (x1,y1-1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[19] = distancia (x1-1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[20] = distancia (x1,y1+1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[21] = distancia (x1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[22] = distancia (x1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[23] = distancia (x1,y1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    d[24] = distancia (x1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    d[0] = 0;

    for (int x=1; x<25; x++) {
        d[x] = d[x] - distanciactual;
    }

    float pendentmaxim = 0;
    int direccio;
    for (int x=1; x<25; x++) {
        if (d[x] < pendentmaxim) { pendentmaxim = d[x]; direccio = x; }
    }
}

```



```

if (pendentmaxim<0) {
    if (direccio==1) buscador (x1+1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==2) buscador (x1,y1-1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==3) buscador (x1-1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==4) buscador (x1,y1+1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    if (direccio==5) buscador (x1+1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==6) buscador (x1,y1-1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==7) buscador (x1-1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==8) buscador (x1,y1+1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    if (direccio==9) buscador (x1+1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==10) buscador (x1,y1-1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==11) buscador (x1-1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==12) buscador (x1,y1+1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    if (direccio==13) buscador (x1+1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==14) buscador (x1,y1-1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==15) buscador (x1-1,y1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==16) buscador (x1,y1+1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    if (direccio==17) buscador (x1+1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==18) buscador (x1,y1-1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==19) buscador (x1-1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==20) buscador (x1,y1+1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);

    if (direccio==21) buscador (x1,y1,x2+1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==22) buscador (x1,y1,x2,y2-1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==23) buscador (x1,y1,x2-1,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    if (direccio==24) buscador (x1,y1,x2,y2+1,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
}

int main() {
    int ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy;
    cin>>ax>>ay>>bx>>by>>cx>>cy>>dx>>dy;
    int x1,y1,x2,y2;
    x1=ax;
    y1=ay;
    x2=cx;
    y2=cy;
    buscador (x1,y1,x2,y2,ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy);
    system("pause");
}

```