

Tercer premi

Anamorfosi

Per endinsar-nos en el mon màgic de l'Anamorfosi i fer-nos descobrir, molts dels secrets que amaga aquest art que també és una ciència. Per l'aplicació pràctica que n'ha fet: la construcció d'un rellotge de Sol, equatorial i cilíndric que permet, per projecció, obtenir-ne un en qualsevol superfície.

Autora:

Aura Tachó i Piñot

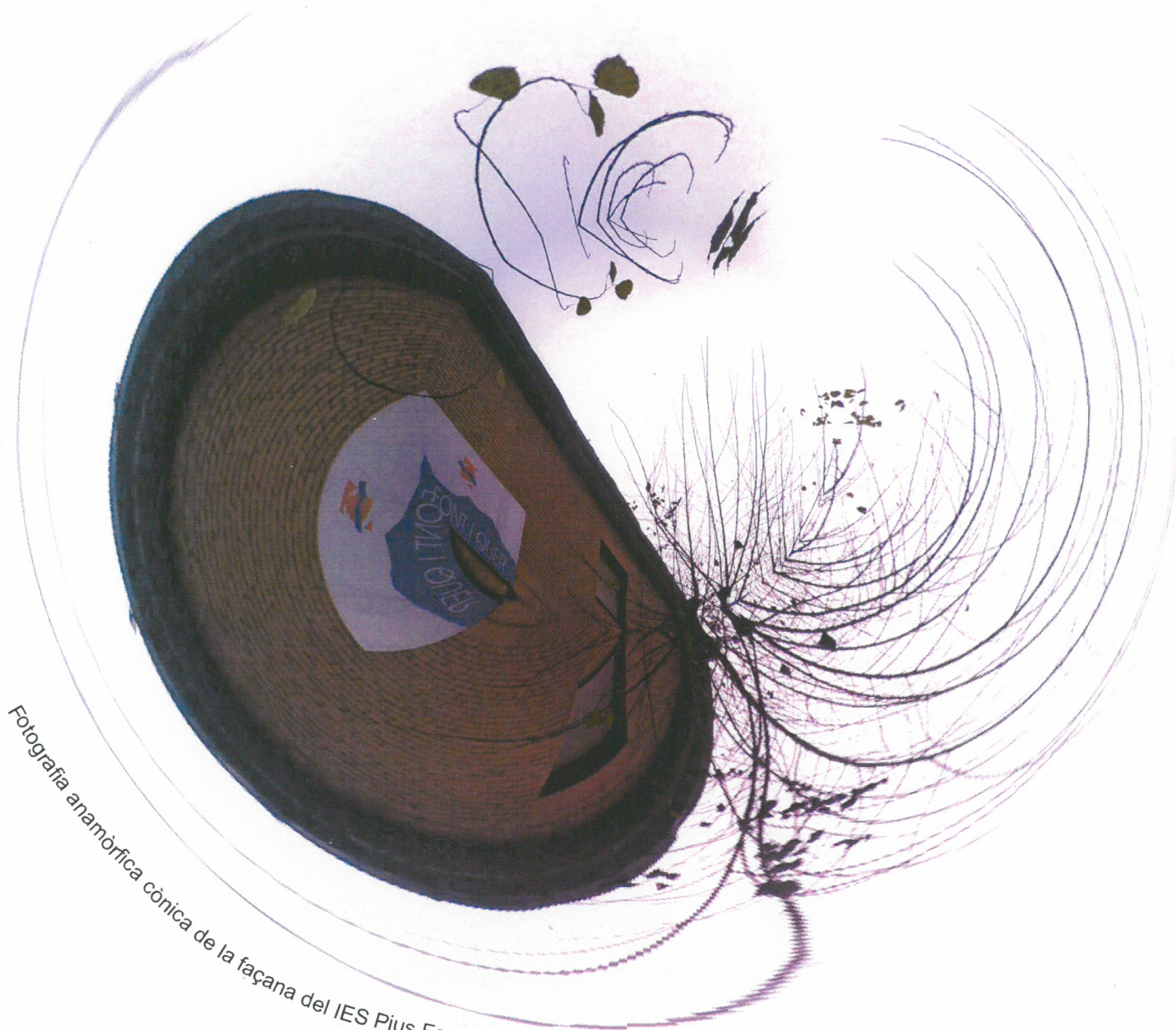
Centre:

IES Pius Font i Quer (Manresa)

Tutor:

Sr. Pedro Cobo

Anamorfosi



Fotografia anamòrfica cònica de la façana del IES Pius Font i Quer

Índex

1. Introducció.....	Pàg.3
2. Història de l'art anamòrfic.	Pàg.5
2.1. Segle XV.....	Pàg.5
2.2. Segle XVI.	Pàg.5
2.3. Segles XVII i XVIII.	Pàg.11
2.4. Segles XIX i XX.....	Pàg.15
3. Art anamòrfic actual.....	Pàg.17
4. Les transformacions planes.....	Pàg.26
4.1. La inversió. Propietats.....	Pàg.26
4.2. Homologia.....	Pàg.31
5. Anamorfosi fent servir miralls.....	Pàg.34
5.1. Anamorfosi cònica.	Pàg.34
5.2. Anamorfosi cilíndrica.....	Pàg.39
6. Màquines de veure, dibuixar i projectar.	Pàg.43
6.1. La cambra fosca.....	Pàg.43
6.2. La llanterna màgica.....	Pàg.44
6.3. El vel d'Alberti.....	Pàg.45
6.3. El portell de Dürer.....	Pàg.46
6.5. El pantògraf de Parré.....	Pàg.46
6.6. L'instrument de Lancio Urbino.	Pàg.47
7. Projector de rellotges de Sol.....	Pàg.48
8. Conclusions.....	Pàg.51
9. Bibliografia.	Pàg.53

1. Introducció

Quina relació hi ha entre els rellotges de sol, l'art renaixentista, els senyals horitzontals de trànsit, les grans escultures, els secrets, els efectes òptics i les matemàtiques? Per què el David de Miquel Àngel és cap gros? Aquestes preguntes es poden respondre amb una sola paraula: **Anamorfosi**.

L'anamorfosi (del grec *ana*, una altra vegada, i *morphé*, forma) és la deformació exagerada que pateix un dibuix, una pintura o una escultura, que mirada des del punt de vista usual és impossible de reconèixer. Al mateix temps, però, mirada des d'un altre punt de vista o mitjançant un mirall corb, apareix regular, sense cap mena de deformació. És una endevinalla, un monstre i un prodigi a la vegada. Quan algú descobreix el secret que guarda una pintura anamòrfica es meravella, s'espanta; són imatges descompostes i restablertes pels nostres propis ulls, una evasió que implica un retorn.

Aquest art de deformar la realitat per després descobrir-la amb tota la seva perfecció no resulta familiar ni als pintors; només uns quants en saben el secret. Durant el treball s'aniran descobrint els detalls, les tècniques, l'evolució i les aplicacions que ha tingut aquest art al llarg del seu desenvolupament, des de *Da Vinci* fins als nostres dies.

¿Com és possible que un caprici d'inversió òptica, que hauria pogut passar desapercbut o simplement desaparèixer, s'hagi desenvolupat considerablement des del segle XVI fins al segle XXI? Tot i que al llarg dels segles XX i XXI no s'hagi desenvolupat tant, en el seu perfeccionisme, la màgia d'aquest art, la seva tècnica infal·lible, la seva obertura a totes les diversitats, fisiològiques i poètiques n'han assegurat la continuïtat.

Els objectius que procurarà d'assolir aquest treball són:

- Primerament, farem una recerca de la història de l'art anamòrfic des dels seus inicis fins als nostres dies.
- Estudiarem les transformacions matemàtiques que regeixen l'art anamòrfic, així com diferents construccions gràfiques que relacionin la imatge original amb la imatge anamòrfica a través de miralls cònics i cilíndrics.
- Analitzarem les màquines que, al llarg de la història, s'han fet servir per veure i dibuixar art anamòrfic (com ara la llanterna màgica, les piràmides visuals, el perspectògraf, alguns programes informàtics...). Igualment construirem una màquina de projectar rellotges de sol sobre qualsevol superfície i n'estudiarem els seus fonaments i propietats.

Per dur a terme els nostres objectius, estructurarem el treball en parts molt diferenciades. En primer lloc, farem un recull de dades històriques sobre el naixement, l'expansió i l'estat actual. Relacionarem, al mateix temps, la part històrica amb les obres més destacades i les analitzarem. D'aquesta manera, es podrà veure l'evolució de l'art anamòrfic al llarg dels segles.

La segona part serà un estudi de les transformacions anamòrfiques planes des del punt de vista matemàtic i les propietats dels elements, com ara les circumferències, els

angles i les rectes relacionades. Recollirem diferents maneres d'aconseguir un punt homòleg d'un altre des de diferents elements a través de la inversió.

Seguidament, farem un recull de les màquines utilitzades per crear imatges distorsionades i relacionarem el seu funcionament amb les matemàtiques de l'anamorfosi. A més, farem un breu estudi dels fonaments dels rellotges de sol amb la finalitat de construir un projector de rellotges de sol seguint les indicacions de Bravo (2005), que acabarem construint al final de treball.

Amb aquest treball podrem relacionar els descobriments en matemàtiques de cada època amb les imatges que creaven, les tècniques utilitzades amb el seu corresponent rerafons matemàtic i molts objectes actuals, que estan deformats anamòrficament per donar-los una més ampla funció i ni ens n'adonem. Veurem com una cosa tan subjectiva com el fet de captar i plasmar la realitat es pot convertir en una obra tan perfecta i objectiva com són les matemàtiques.

2. Història de l'art anamòrfic

En aquest primer apartat farem un resum de l'història de l'art anamòrfic. En dividirem en seu desenvolupament en segles, des del segle quinze fins al segle dinou tot i que hi ha certs descobriments i tècniques que pertanyen a més d'un segle i es van perfeccionant al llarg d'aquests.

L'origen de l'anamorfosi és incert. El terme anamorfosi deriva del grec i vol dir tornar a construir o sense forma. Aquest art s'escampà ràpidament durant els segles XV fins al XVIII. Les tècniques es van anar desvetllant progressivament i no va ser fins als segles XVI i XVII que es considerà un art virtuós i aparegué en tots els manuals de dibuix. No va ser dins als segle XVII que els artistes van començar a fer servir el terme anamorfosi. Primer el van fer servir per diversió, per donar un toc diferent a les seves obres, més endavant l'utilitzaren per integrar valors polítics, socials o espirituals (representació de Sants) amagats a l'obra.

2.1. Segle XV

Un dels primers a desenvolupar-ne la tècnica va ser Leonardo Da Vinci al segle XIV a occident. Corrents artístics d'aquest segle - el renaixement - dugueren als artistes a tornar a descobrir l'art de la perspectiva, que havia estat oblidat durant l'Edat Mitjana. Leonardo, va fer aparèixer als seus apunts, notes i esborranys, per ser més concrets al "Codex Atlanticus" (1483 - 1518) noves perspectives, on s'hi veu una prematura anamorfosi del cap i l'ull d'un nen petit (*Fig.2. 1*). Va ser ell, també, un dels primers a tractar la geometria de la perspectiva. En un primer moment es considerà una meravella de l'art i es va conservar gelosament com un dels secrets més ben guardats.

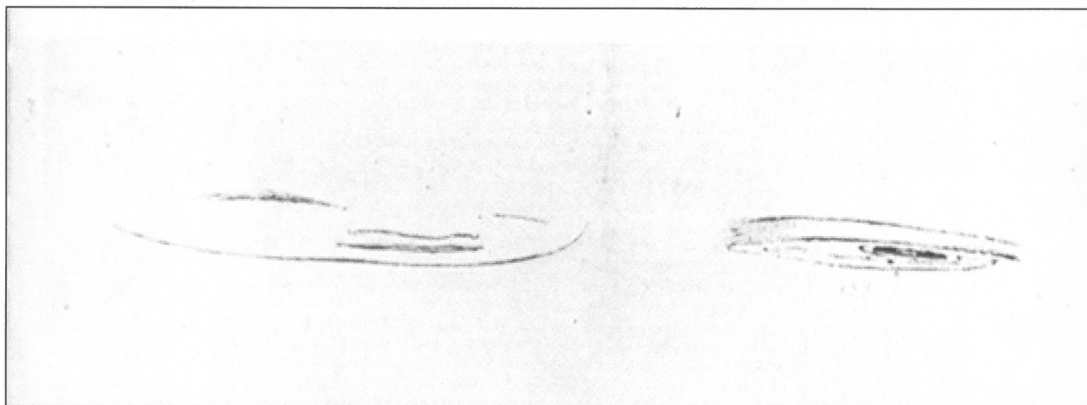


Fig.2.1 Leonardo da Vinci, *Dibuixos anamòrfics amb la cara d'un nen i un ull*, 1485
Còdex Atlànticus, (fol. 35, vers A) Biblioteca Ambrosiana. Milà

2.2. Segle XVI

Alguns dels més cèlebres exemples del segle XVI són el retrat del rei Eduard VI (*Fig.2.2* i *Fig.2.3*), atribuït a William Scrots, i una calavera als peus dels dos personatges que surten al quadre *Els Ambaixadors* de Hans Holbein (*Fig.2.4*).



Fig.2.2 William Scrots, *Edward VI*, 1546
Oli sobre tela
National Portrait Gallery, Londres



William Scrots, va pintar un retrat anamòrfic d'Eduard VI (*Fig.2.2*), probablement només per diversió, on la imatge correcte es pot observar només des del solc que s'ha fet al costat dret del marc de fusta (*Fig.2.3*).

Fig.2.3 Rectificació del quadre
Edward VI de William Scrots.

L'altre important representació anamòrfica del segle XVI és la impressionant calavera pintada als peus de dos ambaixadors (Fig.2.4).



Fig.2.4 Hans Holbein, *Els Ambaixadors*, 1533
Oli sobre tela (207x210 cm)
National Gallery, Londres

Els protagonistes són, clarament, un noble i un membre del clergat. La data de la trobada apareix al rellotge de Sol de damunt la taula: 11 d'abril del 1533. Altres elements com el medalló de l'ordre de Sant Miquel, l'edat inscrita al punyal (29) i la senyalització de Polisy (el seu lloc de naixement i residència) al mapamundi, permeten identificar al noble de l'esquerra com *Jean de Dinteville*, en aquell moment ambaixador de França a la cort anglesa d'Enric VIII. Sabent la identitat d'un d'ells, es pot endevinar la de l'altre, confirmada per la seva vestimenta i l'edat que apareix al llibre sobre el que està recolzat (24), podria tractar-se del seu amic el bisbe *Georges de Selve*, aleshores nunci vaticà també a Anglaterra.

Si l'espectador s'aproxima al quadre per la cantonada inferior esquerra, veurà perfectament la terrorífica calavera. Nosaltres hem rectificat la calavera col·locant un mirall inclinat a la base d'una reproducció de la calavera de Hans Holbein, per poder observar-la correctament, com si ens aproximéssim des de la cantonada inferior esquerra al quadre (*Fig. 2.5*).



Fig.5 Rectificació de la calavera amb un mirall pla. (Font: A. Tachó)

Es pot entendre que en aquest quadre datat del 1533, hi aparegui una anamorfosi d'aquest tipus ja que el quadre estava col·locat en unes escales i, quan algú hi pujava veia la calavera com si fos una il·lusió, com si fos màgia. Observar-la devia fer estremir de por ja que el quadre és de dimensions considerables.

La calavera fa referència als temors i les pors espirituals que sembla que flotin per damunt del quadre. Aquesta era una de les funcions principals de l'anamorfosi, amagar dobles sentits, normalment espirituals o polítics dins del quadre, com si fossin un joc (en el cas dels Ambaixadors, no es va parlar d'anamorfosi fins al 1873, al cap de tres segles de ser pintat).

Dürer, va ser l'artista alemany que va representar i explicar millor la idea de perspectiva mitjançant les seves il·lustracions (*Fig.2.6*). Va donar a entendre que un quadre s'ha d'observar des del mateix punt de vista que el pintor l'ha pintat. D'aquesta manera, i acceptant que els quadres (els renaixentistes) tenen només un punt de vista, va desenvolupar les seves teories sobre les perspectives.



Fig.6 Albrecht Dürer, *Artista dibuixant un nu*, 1525

Un tipus de quadre anamòrfic va anar guanyant popularitat a Alemanya. Eren quadres que introduïen imatges anamòrfiques entremig de grans i esplèndids paisatges. Un dels autors més destacats d'aquest gènere va ser Erhard Schön, un dels alumnes de Dürer (Fig.2. 7 i Fig.2.8). En el quadre original s'hi pot observar la reproducció d'un magnífic paisatge amb homes treballant al camp amb animals i carros. Si ens el mirem des d'una banda, veurem els retrats anamòrfics de Carles V, Ferran d'Àustria, el Papa Pau III i Francesc I.



Fig.2.7. Erhard Shön, *Retrats anamòrfics de Carles V, Ferran d'Àustria, el Papa Pau III i Francesc I*, 1535



Fig.2.8 Rectificació de la Fig.7, amb Photoshop

Per altra banda, el David, de Miquel Àngel, és un bon exemple d'art anamòrfic dins l'àmbit de l'escultura. Miquel Àngel, en la seva gran obra David, de dimensions descomunals, només adopta unes proporcions boniques mirada des de baix, i a una certa distància. Si l'obra, per contra, es mirada des de una altura normal o des de sota mateix, mostra un cap massa gros per ser real (passaria just el mateix en qualsevol reproducció de l'estàtua de dimensions reduïdes). (Fig.2.9 i Fig.2.10)

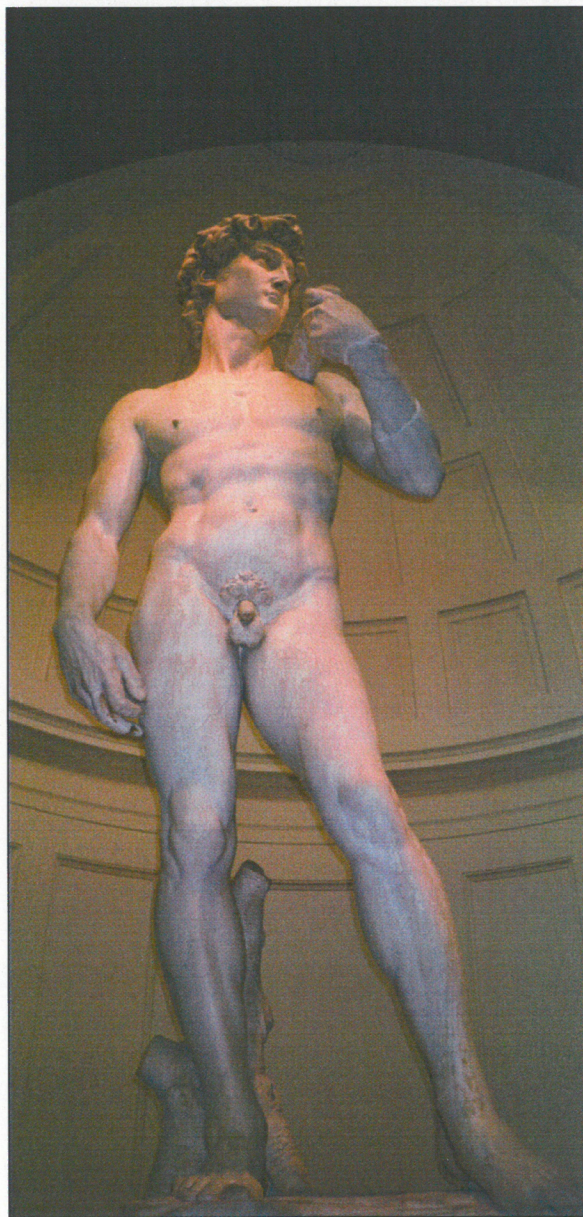
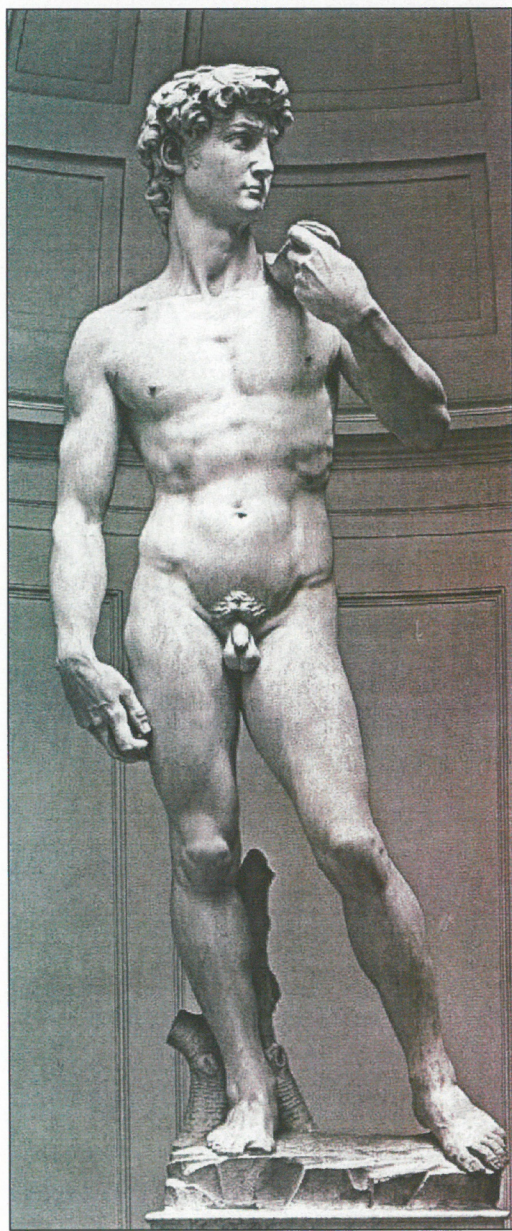


Fig.2.9 i Fig.2.10 Miquel Àngel, *David*, 1501
Esculpit en marbre (dos punts de vista diferents)

2.3. Segle XVII i S.XVIII

Durant els segles disset i divuit, l'art anamòrfic es desenvolupà tant en el camp de la pràctica com en la teòrica. D'aquesta manera es donà un doble desenvolupament molt accentuat, sobretot a països molt influenciats pel renaixement com França o Itàlia. Cal destacar també que molts dels que van investigar i avançar en aquest camp de l'art i les matemàtiques van ser els Jesuïtes, monjos que gaudien d'una bona educació matemàtica i científica.

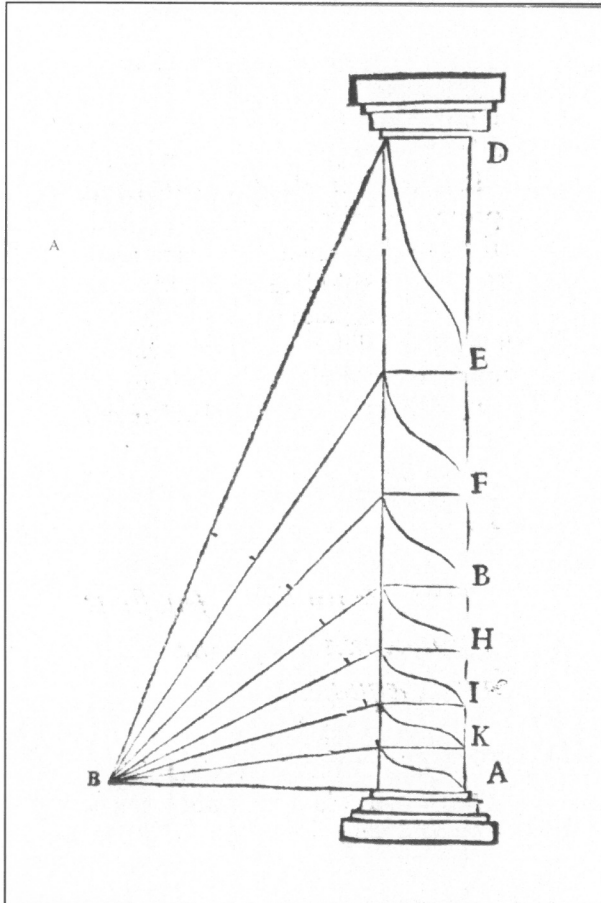


Fig.2.11 Estudi de Kircher, *Columna Trajane*, 1649.
Roma

Lligat amb la perspectiva de visió i les proporcions que Miquel Àngel utilitzà per esculpir a David, podem destacar al segle S.XVII el Temple de Priena, a Atenes, on hi ha una inscripció amb les lletres engrandides conforme mires més amunt. Aquest tipus de perspectiva s'anomenà angles d'Euclides ja que, mirats des del punt de vista indicat, les proporcions de les lletres es mantenen. Si no es fes d'aquesta manera, les lletres superiors serien totalment impossibles de reconèixer per culpa de la insignificant dimensió que prendrien vistes des de tanta distància. (Fig. 2.11)

Als voltant de 1672, Troili proposa l'ús de la regla ja descrita per Euclides per traçar les bases dels murs, les inscripcions, finestres i les estàtues emplaçades a diferents alçades. Va ser l'anomenada *perspectiva al ralentir* (frenant la fuga per l'encreuament proporcionat de les dimensions).

Noves llegendes van ser difoses amb la finalitat de donar a conèixer aquestes noves perspectives, una d'elles és la següent:

<< A propòsit d'un concurs d'una Minerva destinada a coronar un alt pilar, Alcarrene esculpeix una estàtua harmònica i Phidies n'esculpeix una de deformada, amb la boca molt oberta i el nas exageradament estirat. El dia de l'exposició el primer rep tots els elogis i el segon és a punt de ser lapidat. La situació però, canvia. Al posar les estàtues al capdamunt de la columnata on s'havien d'estar, la primera hi queda ridícula i és la segona la que ara, des de baix, es veu harmònica i perfecte.>>

Es diu que, a partir d'aleshores, l'anamorfosi és el recurs més pràctic per aconseguir un aspecte harmònic i bell en grans quadres o en escultures que, com a la llegenda, s'han de col·locar damunt de grans pilars o en llocs alts.

Aquest tipus d'art, que relacionava les ciències i les arts, va agafar molt prestigi, sobretot a Anglaterra. Shakespeare, per exemple, estava fascinat amb aquestes pintures. Durant tot el segle XVII s'estengué la tradició de pintar retrats anamòrfics. François Niceron va marcar un avanç molt importat dins l'art anamòrfic. Va escriure el tractat: *La perspective curieuse* al 1638, que recull tota la geometria d'aquest tipus d'art i de com s'ha de traçar.

Les tres figures següents (Fig. 2.12, Fig.2.13 i Fig.2.14) són alguns exemples dels estudis de diferents tipus d'anamorfosi duts a terme per F.Niceron i que explicarem a l'apartat de *Transformacions geomètriques al pla* (4) d'aquest treball. La Figura 2.12 representa l'explicació i anàlisi de l'anamorfosi cilíndrica; la Figura 2.13, és un cas concret anamorfosi cònica aplicada a un Sant; i la Figura 2.14 és la representació teòrica d'una anamorfosi d'un cap.

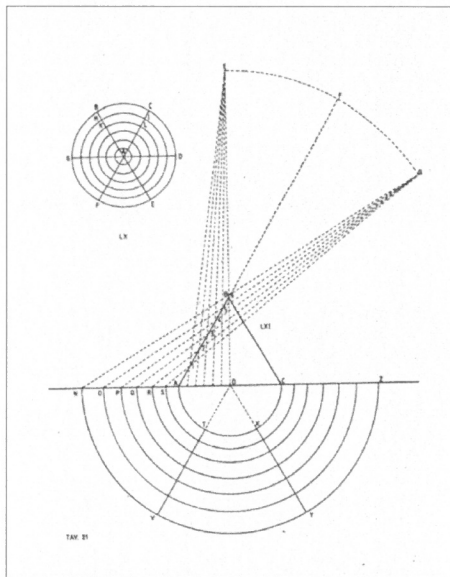


Fig.2.12 F.Niceron, *Geometria de anamorfosi cònica*, 1638

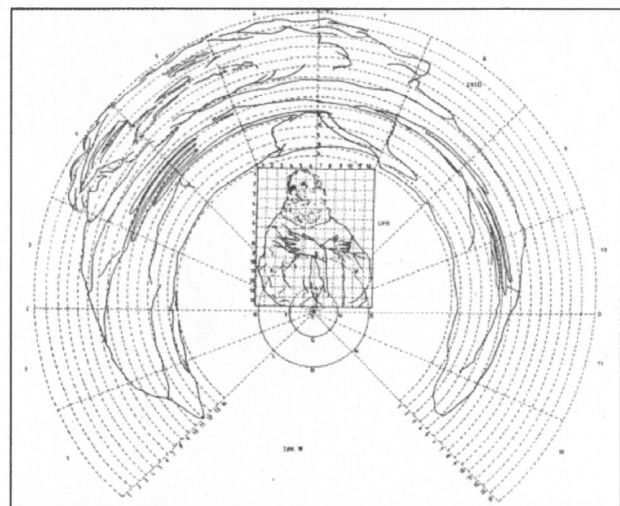


Fig.2.13 F.Niceron, *Anamorfosi cilíndrica de Sant Francesc*, 1638

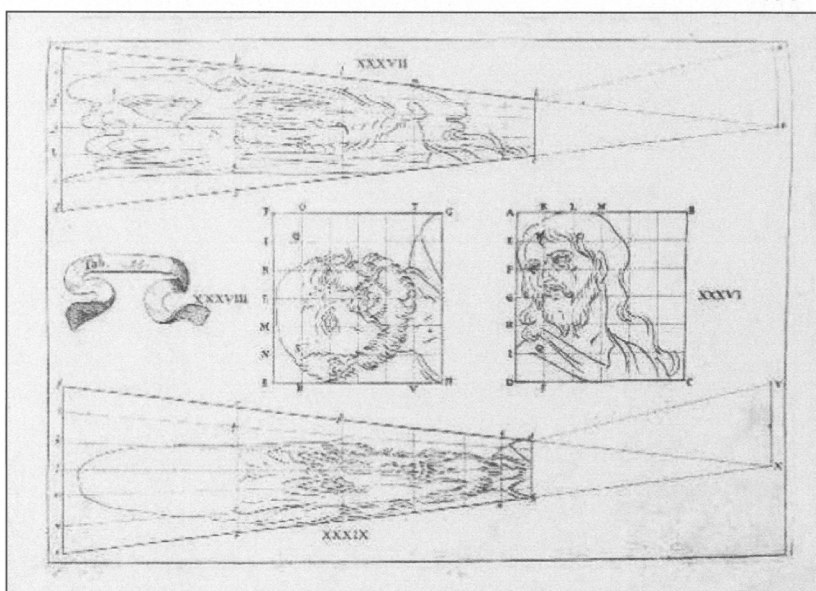


Fig.2.14 F.Niceron, *anamorfosi d'un cap*, 1638

Les tècniques desenvolupades anteriorment es van anar simplificant durant aquest període, convertint l'art anamòrfic fins a ser simplificat en quadres i pintures molt més fàcils de dur a terme i pintar en façanes o parets.

L'art anamòrfic s'utilitzà en la decoració de construccions com ara l'església de Sant Ignasi, a Roma (*Fig. 2.15 i Fig.2.16*). En aquest cas, l'església s'havia de construir i lluir una Cúpula just damunt de l'altar però s'acabaren els diners abans de poder-se realitzar. Trenta anys més tard, l'església va sol·licitar ajuda de l'arquitecte i artista Andrea del Pozzo, expert en l'art de la perspectiva. Amb menys d'un any, Andrea del Pozzo va pintar una fantàstica cúpula en el sostre llis de la gran església. També va pintar, damunt de la resta de l'enorme sostre, una representació de diferents cultures i religions unides sota del mateix cel amb una acurada perspectiva que enganyava als observadors i feia l'església molt més alta i esvelta.



Fig.2.15 Andrea Pozzo, *Cúpula pintada sobre el sostre llis*, 1685
Església de Sant Ignasi (Il Gesù), Roma

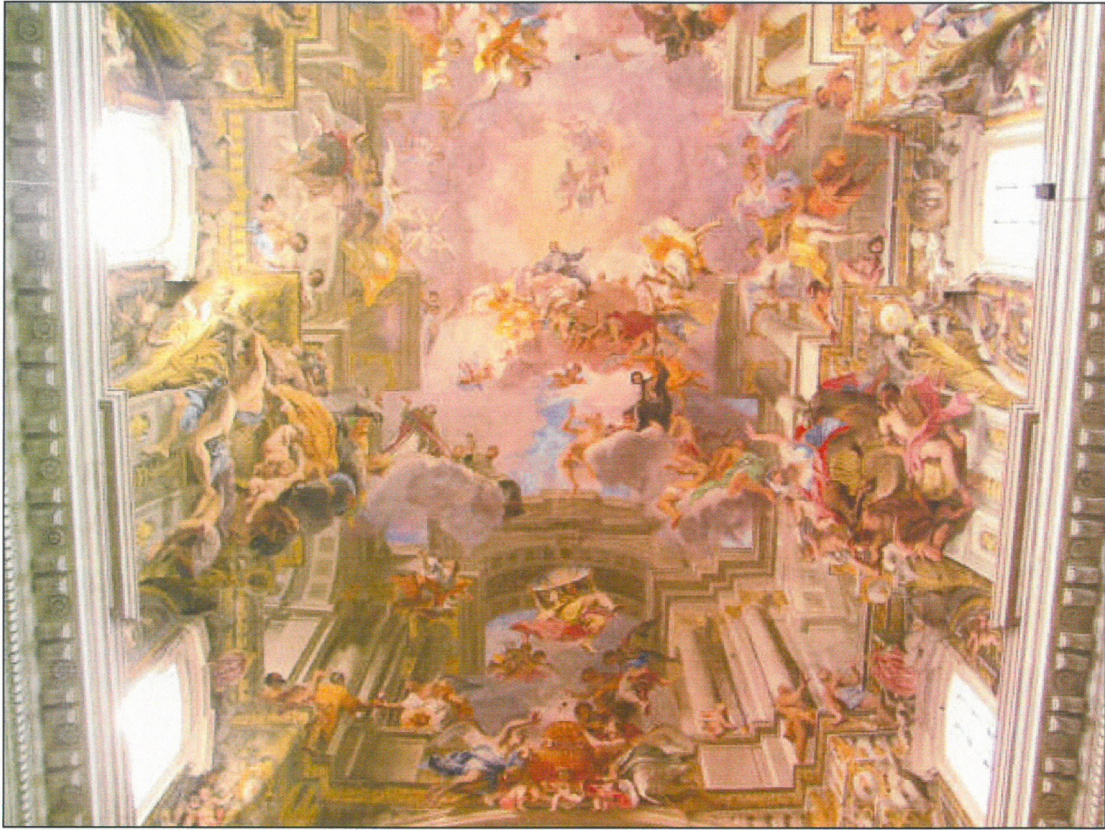


Fig.2. 16 Andrea Pozzo, *Glorificació de Sant Ignasi*, 1691-1694
Sostre de la església de Sant Ignasi(II Gesu) Roma

Amb el descobriment del mirall, un nou instrument anamòrfic s'introduí entre els anys 1615-1625 (*Fig.2.17*). Ara ja no es tractarà de la visió directe sinó de la contemplació dels màgics espectres que es reflectiran a la nova superfície llisa (els xinesos ja el deuriem conèixer ja que les seves imatges estan basades en la representació del seu reflex sobre de la superfície corba).

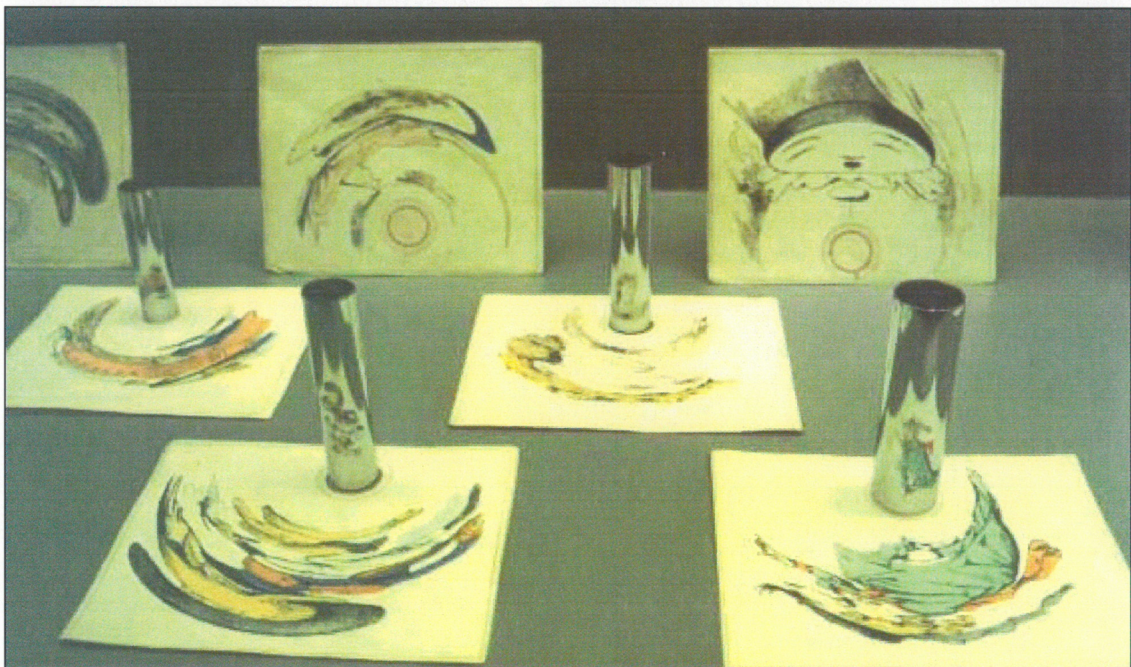


Fig.2.17 Joc de miralls corbs

Després d'aquest descobriment es dugueren a terme nous anamorfismes, més complexes. Van començar a guanyar terreny les pintures anamòrfiques amb perspectives còniques i cilíndriques que comportaran càlculs savis i experimentacions laborioses (multitud de trames geomètriques que s'hi desenvolupen i reuneixen). Naixeren els jocs de miralls (coneguts com a curvilínies) que evocaran imatges fantasioses i els enganys de la vista.

2.4. Segles XIX i XX

Al 1860, es deixarà de banda l'art anamòrfic per decidir que les imatges que més bé representaran el món que ens envolta seran les fotografies. Tot hi així aquest no s'arribà a suprimir mai del tot. Naixeren amb la càmera fotogràfica les fotografies estereoscòpiques i amb elles un nou art anamòrfic, amb molt més color. Tot i així, durant la segona meitat del segle dinou passà a segon terme; ja no formava part del coneixement popular, passà a formar part dels llibres específics de perspectiva i en exhibicions o llibres molt especials.

Al cap de poc temps però, alguns artistes com Salvador Dalí, van crear imatges amb un doble anamòrfic amagat i invisible (*Fig.2.19*). En aquesta, per exemple, s'hi pot observar la representació d'un mosquit aixafat i s'hi pot entreveure una finestra oberta. A la rectificació, però, s'hi veu la cara d'un pallaso amb les celles arquejades i la barbata molt marcada.



Fig.2.18 Salvador Dalí, *Anamorfosi cilíndrica de la cara d'un pallaso*.
Col·lecció Bàrbara Hartman Turcker, USA

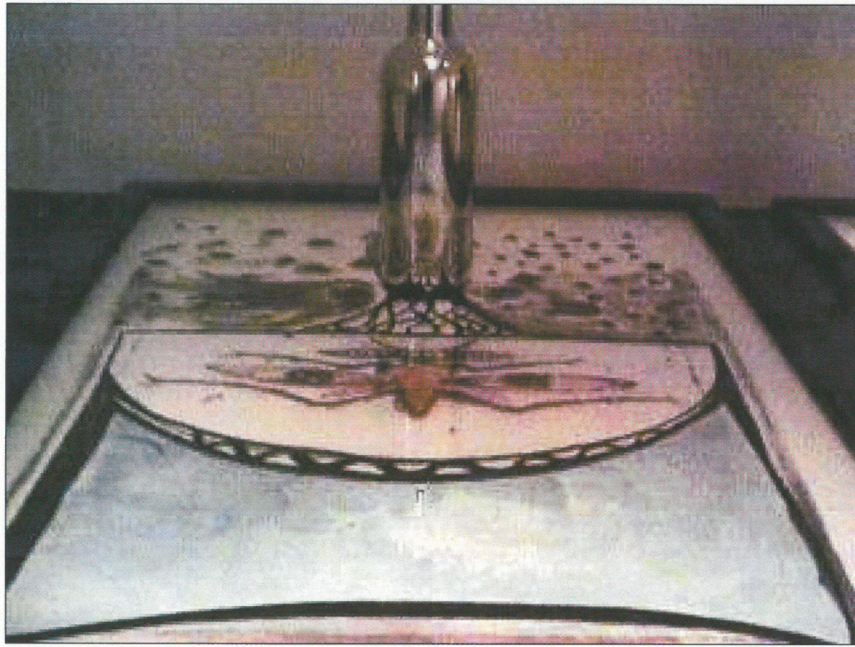


Fig.2.19. Rectificació amb mirall de l'*Anamorfosi cilíndrica de la cara d'un pallaso.*, Salvador Dalí

3. Art anamòrfic actual

Actualment l'art anamòrfic no és gens conegut però ens afecta a la vida quotidiana més del què ens pensem. Per exemple, si una persona que no està acostumada a veure la televisió la veu des d'un altre angle, les imatges que apareixeran en aquesta seran massa primes, seran anamòrfiques però nosaltres no ens n'adonem. L'art anamòrfic es fa servir també als decorats dels teatres per aconseguir efectes d'opressió, espai o perspectiva, dins el camp artístic actual, naturalment, i a l'hora de pintar els senyals de trànsit horitzontals.

Artistes com Kelly M. Houle i István Orosz encara dibuixen a mà els seus quadres totalment anamòrfics, basats, normalment en l'anamorfosi cilíndrica o cònica. La següent imatge és un exemple d'anamorfosi cilíndrica dibuixat per Kelly M. Houle i la seva rectificació amb un mirall cilíndric. Apareix, al seu quadre, la representació d'un jardí amb flors i arbres i una nena amb un vestit blanc. Segons l'autora, és l'Àlicia al País de les meravelles. (*Fig.3.1 i Fig.3.2*)



Fig.3.1 Kelly M. Houle 1999, *360° cylindrical anamorphosis (without mirror)*, acrylic on masonite 30"x40"



Fig. 3.2 Rectificació Kelly M. Houle 1999, *360° cylindrical anamorphosis (with mirror)*, acrylic on masonite 30"x40"

Altres exemples destacats de l'art anamòrfic actual serien els dibuixats per hongarès István Orosz i rectificats amb *Adobe Photoshop* canviant la perspectiva d'aquests (Fig.3.3 i Fig.3.4). En la primera imatge s'hi veu la representació d'un teatre, amb dones ben vestides i homes fent retrats. En la rectificació, però, s'hi pot observar el retrat de William Shakespeare

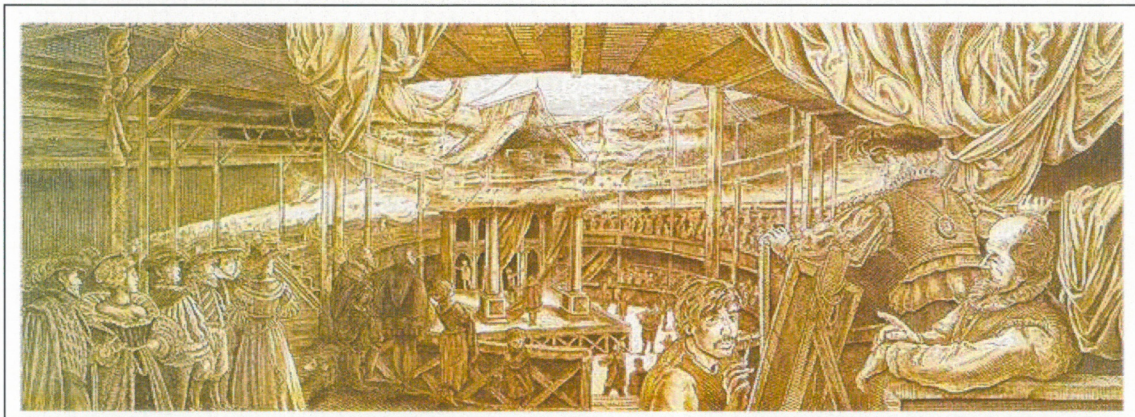


Fig.3.3 István Orosz, *Shakespeare theatre*

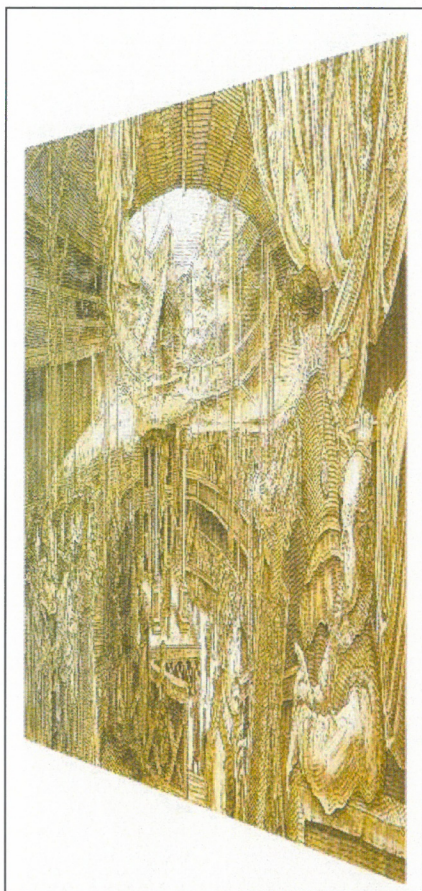


Fig.3.4 Rectificació amb Photoshop
István Orosz, *Shakespeare theatre*

Una altra superfície on representar l'art anamòrfic que ha adquirit popularitat últimament és al terra i a les parets. Artistes com Julian Beever, Kurt Wenner o el català Toni Ortiz han plasmat (en dues dimensions) els seus dibuixos (fets amb guix) que sembla que tinguin profunditat a molts carrers i parets produint sensacions impressionants, sempre recorrent a l'art anamòrfic. Les següents imatges en són exemples. (Fig.3.5, Fig. 3.6 i Fig. 3.7).

A la imatge de la dreta, Julian Beever ha representat una cascada en unes escales i ha pintat el terra com si es tractés d'una casa alçada amb aigua als fonaments. Ha pintat també una plataforma que representa una fusta on s'hi ha col·locat al damunt i des d'on ha fet veure que s'anava a capbussar.

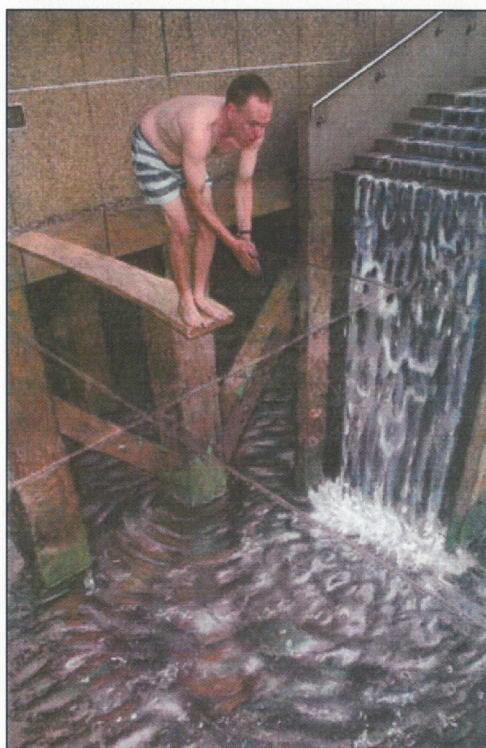


Fig.3.5 Julian Beever, *Waterfall*

Kurt Wenner, a la imatge inferior, ha pintat al terra un mural que representa un forat profund i esquerdat d'on en surten (o d'on n'intenten sortir) humans despullats i agonitzant. Fa realment fresa ja que els colors que ha utilitzat per representar aquests humans són el blau, el verd, i el rosa i encara creen una sensació més crua de sofriment.



Fig.3.6 Kurt Weener, *Dies Irae*

El català Toni Ortiz va dibuixar al terra de la plaça Puig Mercadal de Manresa una imatge que representava un heroi grec lluitant contra una bèstia amb cap de brau i una llarga llança a la mà. Bo i mirant-lo des del punt de vista exacte es veu perfectament la profunditat de la fossa on lluiten i sembla que les columnes siguin més altes que el mateix terra i neixin dins la fossa.



Fig.3.7 Toni Ortiz, *Sense Títol*, Pl.Puigmercadal, Manresa.



Fig.3.8 Rectificació Toni Ortiz, *Sense títol*

Tot i així, l'art anamòrfic no és gens famós ni conegut. Ens queda l'esperança que amb les noves tecnologies, allò que abans era només per als més savis, torni a despertar interès. Programari lliure com *Anamorph Me* (Fig.3.9), *Anamorfos* (Fig.3.10) o programes de retoc fotogràfic professional com el mateix *Adobe Photoshop* (Fig.3.11), han aconseguit transformar el mateix art anamòrfic en funcions matemàtiques que deformen la imatge a partir de criteris com ara el radi del mirall cilíndric o l'alçada del mirall cònic, que podrem definir nosaltres mateixos d'una manera senzilla i ràpida.

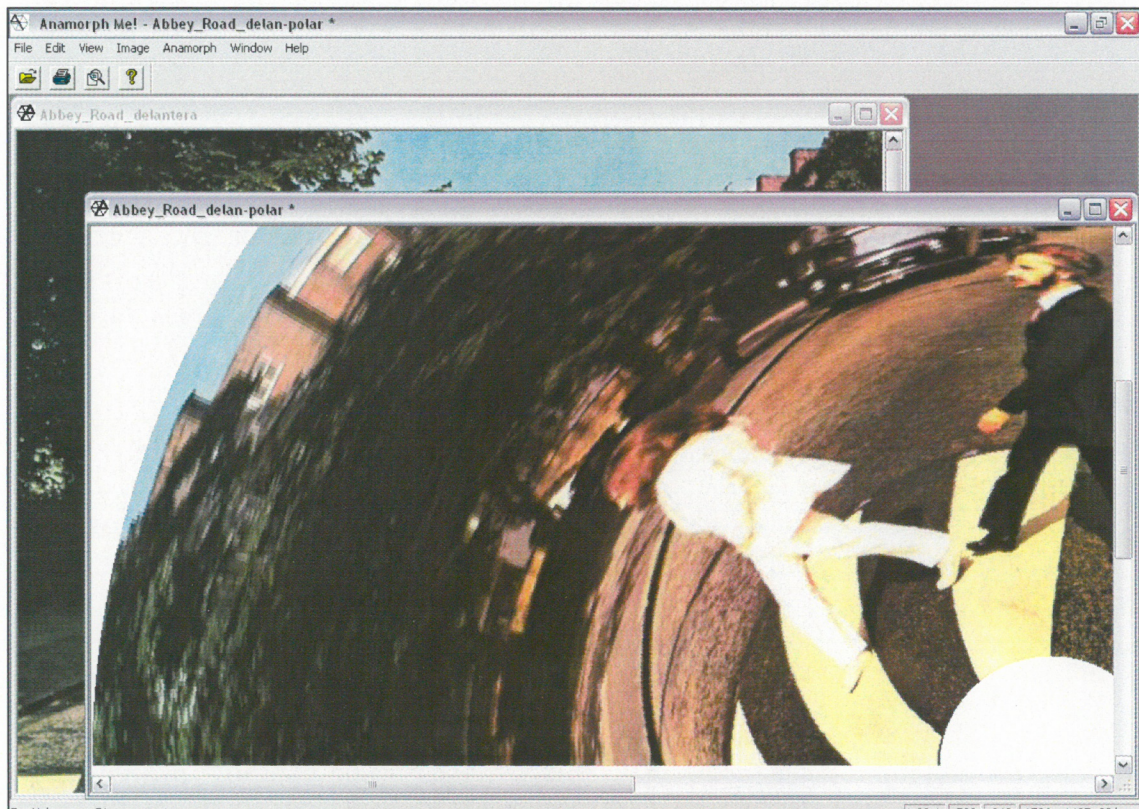


Fig.3.9 Imatge extreta del programa *Anamorph Me!*.

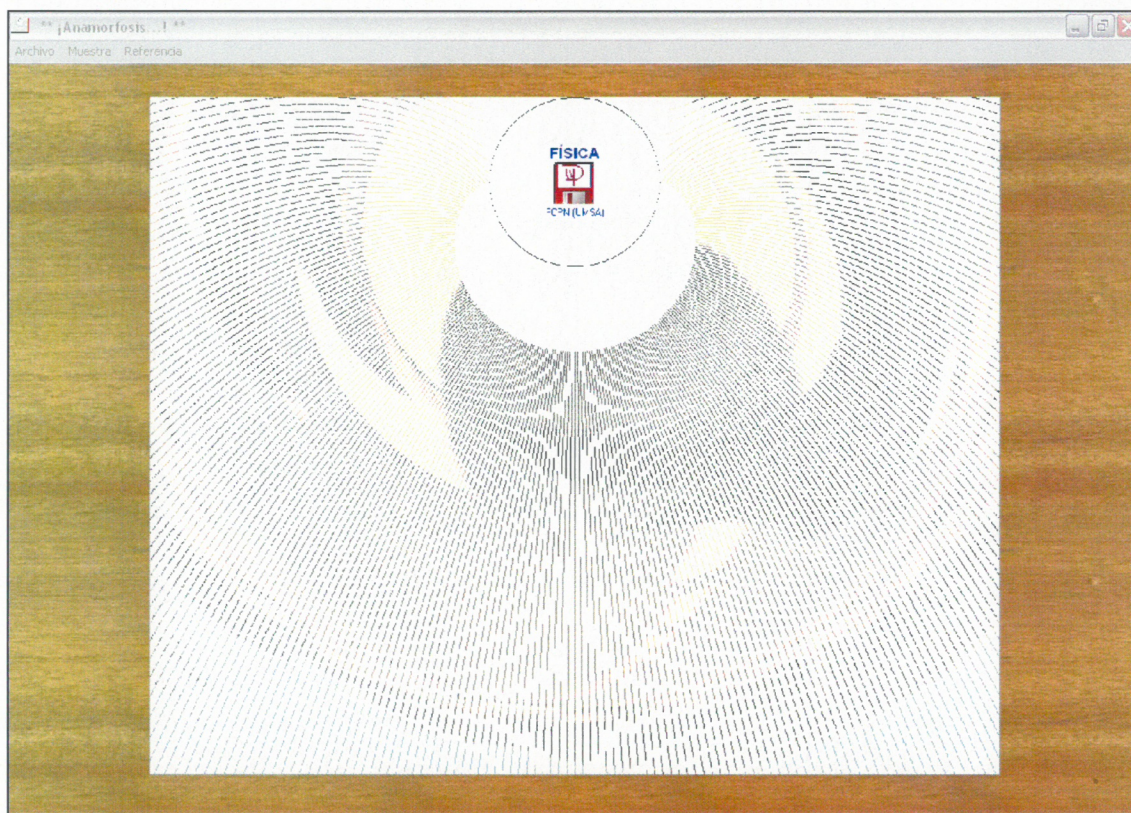


Fig. 3.10 Imatge extreta del programa *Anamorfosis*.

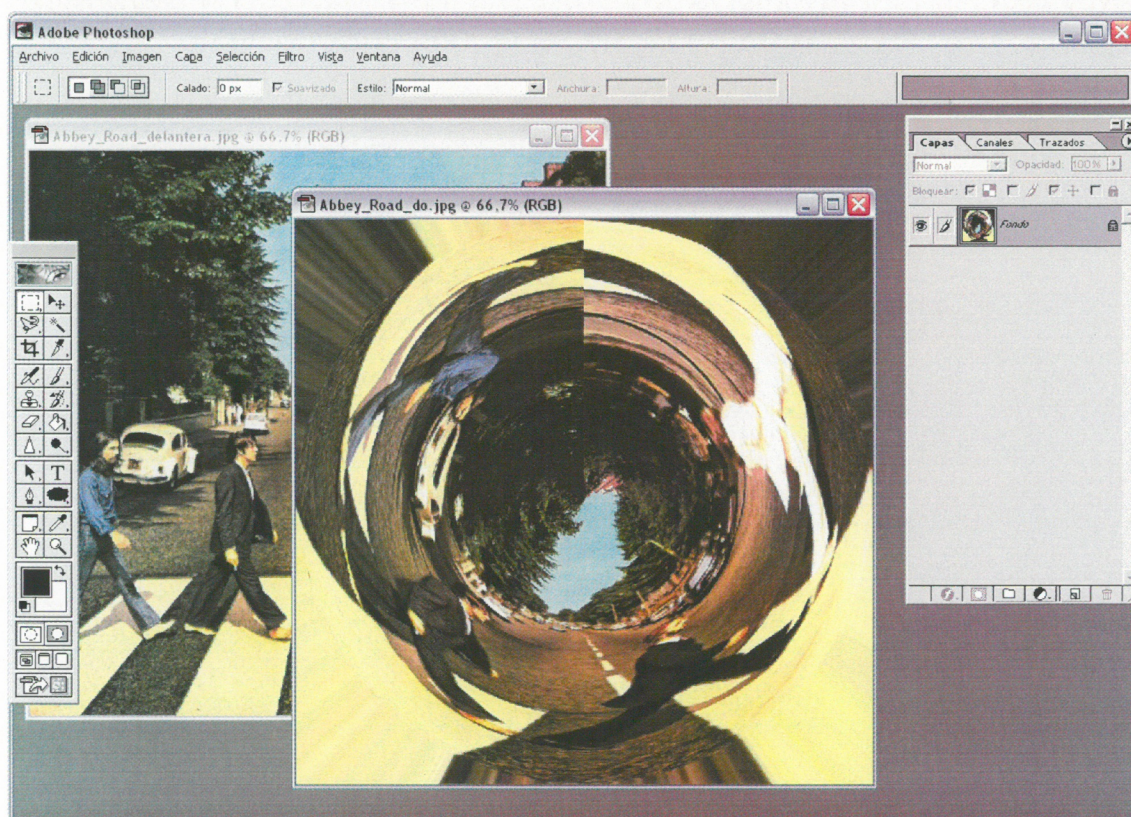


Fig.3.11 Imatge extreta del programa *Adobe Photoshop*.

No ens podem pas descuidar la importància que té actualment l'art anamòrfic dins l'àmbit del disseny dels senyals de trànsit. Aquests, i com podem apreciar a les figures 3.12 i 3.13, quan es pinten al terra presenten una amplada normal, la justa per veure-la sense dificultats, però la llargada és desproporcionadament molt més llarga del que en realitat sembla des del nostre cotxe. A les figures següents podem apreciar com d'allargades són dues fletxes que, des de l'alçada del nostre cotxe, semblen normals.



Fig.3.12. Vista d'un senyal de trànsit horitzontal des de l'alçada d'un vianant.



Fig.3.13 Vista d'un senyal de trànsit horitzontal des de l'alçada d'un vehicle.

I com sempre, la publicitat ha de ser pionera de tot el que té relació amb els enganys i els trucs visuals. L'art anamòrfic no podia ser menys. Uns anys enrera, a França, es va popularitzar un anunci recreant una anamorfosi cilíndrica a grans dimensions per anunciar un cotxe (Fig.3.14). Tot i que cridava prou l'atenció, es demostra aquí que l'art anamòrfic encara es poc popular per ser fet servir en un món on l'èxit i la popularitat són la moneda de canvi.



Fig.3.14 Anunci basat en l'anamorfosi cilíndrica

4• Transformacions geomètriques al pla

Són aplicacions del pla en si mateix que transformen una figura donada en una altra que s'anomena homòloga o transformada de la primera. Hi ha diferents tipus de transformacions planes:

• **Anamòrfiques:** són aquelles transformacions planes que modifiquen la forma entre la figura original i la transformada. Per tant, generalment, no conserven els angles, ni el paral·lelisme ni les longituds. Per exemple, la inversió i l'homologia, sent les afinitats un cas particular d'aquesta. A més, dins de les afinitats, hi pot haver les transformacions isomètriques i isomòrfiques, com a casos particulars d'aquestes

• **Isomètriques:** conserven les dimensions (distàncies) i els angles i el paral·lelisme entre la figura original i la transformada. S'anomenen també moviments. En són clars exemples les simetries, les translacions, els girs i les possibles composicions entre ells.

• **Isomòrfiques o conformes:** són transformacions que conserven els angles i el paral·lelisme. Les longituds de la transformada són proporcionals a les de l'original i, per tant, només conserven la forma. Per exemple, la homotècia i la semblança.

Transformacions anamòrfiques

Farem un breu estudi de la inversió i la homologia que són les transformacions planes que realment canvien, en general, la figura original, per tant, deixarem de banda les transformacions isomètriques i isomòrfiques per centrar-nos en les anamòrfiques.

4.1. Inversió: és la transformació que fa correspondre el punt P' al P , i ambdós punts s'anomenen punts inversos. En aquest cas, dos punts P i P' serien inversos respecte el cercle d'inversió amb centre O i radi de la inversió k si P' és el peu de l'altura del triangle OQP sobre el costat OP , essent PQ la recta tangent al cercle en el punt Q . (Fig.4.1)

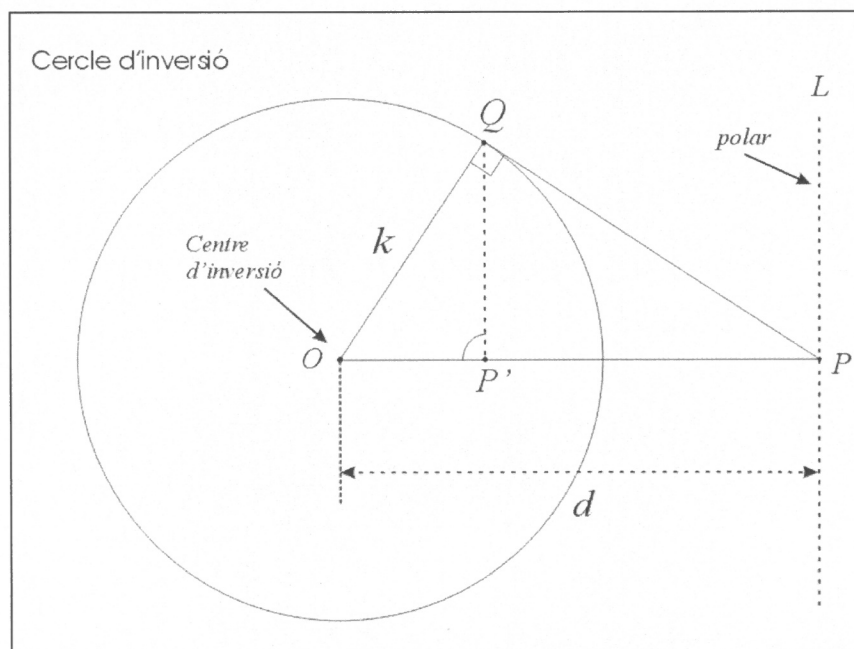


Fig.4.1

Així doncs, els triangles **OQP** i **OP'Q** són semblants i per tant la relació que hi ha entre el punt **P** i el seu invers **P'** és:

$$\frac{OP}{k} = \frac{k}{OP'} ; k^2 = OP \cdot OP'$$

*Relació que defineix la inversió respecte del cercle de centre **O** i radi **k**.*

· Expressió algebraica de les equacions d'una inversió:

Pretenem expressar les coordenades (x',y') del punt **P'** en funció de les (x,y) del punt **P** i de **k** (veure Fig.4.2). Per simplificar-ne els resultats podem suposar que el centre d'inversió és l'origen de coordenades.

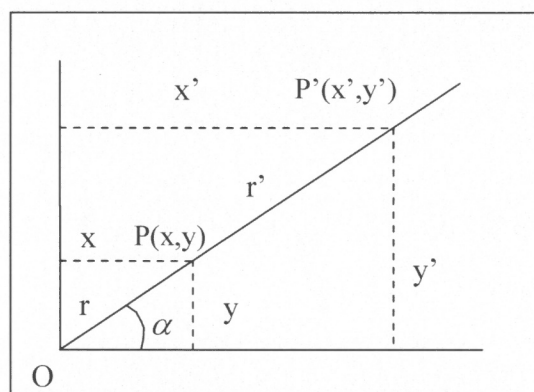


Fig.4.2

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = y'/r'; \quad \boxed{y' = r' \sin \alpha} \\ \cos \alpha = x'/r'; \quad \boxed{x' = r' \cos \alpha} \end{array} \right\} r' = \frac{x'}{\cos \alpha} = \frac{y'}{\sin \alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = y/r; \quad \boxed{y = r \sin \alpha} \\ \cos \alpha = x/r; \quad \boxed{x = r \cos \alpha} \end{array} \right\} r = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}$$

Partim de la relació d'inversió $k^2 = OP \cdot OP'$:

$$k^2 = r \cdot r'; \quad \frac{x}{\cos \alpha} \cdot \frac{x'}{\cos \alpha} = k^2 ; \quad \frac{xx'}{\cos^2 \alpha} = k^2$$

$$\left. \begin{array}{l} xx' = k^2 \cdot \cos^2 \alpha ; \quad x' = \frac{k^2 \cdot \cos^2 \alpha}{x} \\ \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2} \end{array} \right\} \frac{k^2 x}{r^2} = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \quad x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$k^2 = r \cdot r' ; \quad \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{y'}{\sin \alpha} = k^2 ; \quad \frac{yy'}{\sin^2 \alpha} = k^2$$

$$\left. \begin{array}{l} yy' = k^2 \cdot \sin^2 \alpha ; \quad y' = \frac{k^2 \cdot \sin^2 \alpha}{y} \\ \sin^2 \alpha = \frac{y^2}{r^2} \end{array} \right\} \quad \frac{k^2 y}{r^2} = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \quad y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}$$

Així, direm que les equacions de la inversió seran:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \\ x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

La inversió és una transformació que converteix P en P' i P' en P, per tant, la seva inversa coincideix en ella mateixa, serà involutiva.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} = f \end{array} \right\} \quad f \circ f = I \quad \text{Per tant, } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2} \end{array} \right.$$

• Propietats de la inversió:

i) La inversa de la recta $y' = mx'$ que passa per l'origen (centre d'inversió) és ella mateixa.

$$y' = mx' ; \quad \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} = m \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} ; \quad \boxed{y = mx}$$

Per tant, totes les rectes que passen pel centre d'inversió són dobles.

ii) La inversa d'una recta $x' = k$ que no passa per l'origen, però és tangent a la circumferència d'inversió, és una circumferència que passa per l'origen. (Fig.4.3)

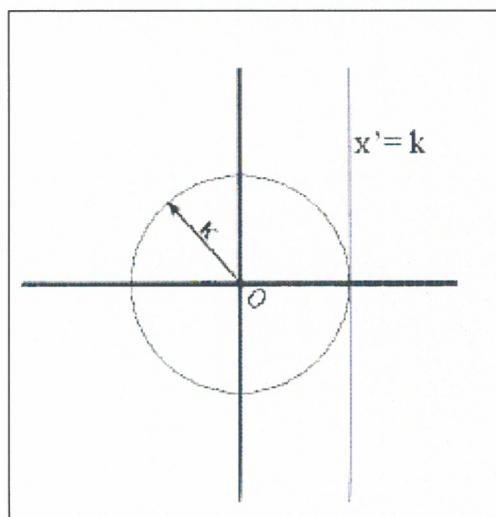


Fig.4.3

$$\frac{k^2 y}{x^2 + y^2} = k ; x^2 + y^2 = kx ; \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{k^2}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 - kx = 0$$

Circumferència de centre $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ i radi $\frac{k}{2}$.

iii) La inversa d'una recta $x' = p$ que no passa per l'origen és una altre circumferència que passa per l'origen. (Fig.4.4)

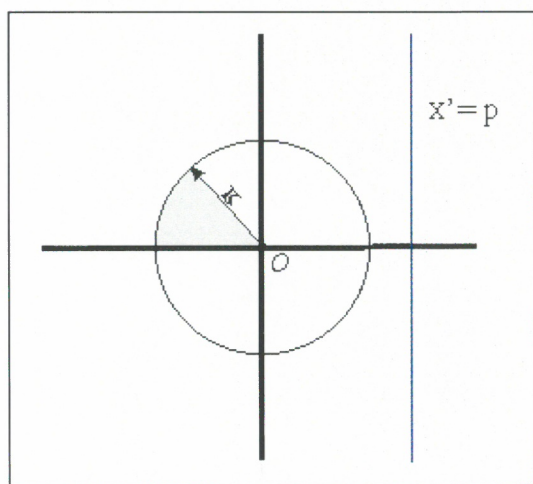


Fig.4.4

$$p \neq k$$

$$x' = p ; \left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2}\right) = p ; p(x^2 + y^2) = k^2 x ;$$

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{p} x = 0$$

circumferència de centre $\left(\frac{k^2}{2p}, 0\right)$ i radi $\frac{k^2}{2p}$

A partir d'aquestes transformades i considerant un cercle de radi petit (inferior a la longitud d'un quadrat), comprendrem, com indiquen Gardner (1984) i Dixon (1991) que la *Figura 4.6* és la transformada de la *Figura 4.5*, i viceversa.

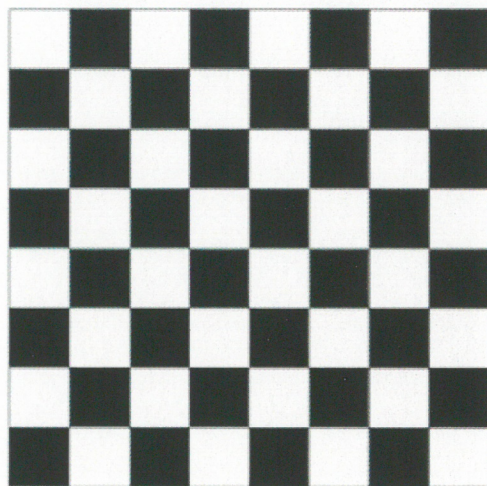


Fig.4.5

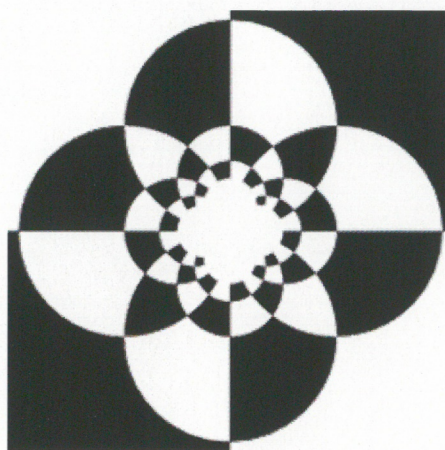


Fig.4.6

iv) La inversa d'una circumferència C ($x'^2 + y'^2 = p^2$) de radi p i centre a l'origen es transforma en una altre circumferència. (Fig. 4.7)

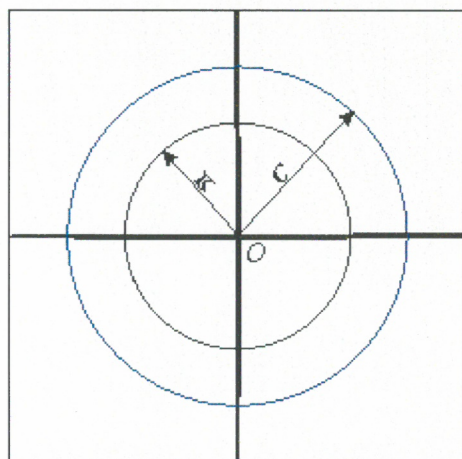


Fig.4.7

$$\left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \right)^2 = p^2; \quad \frac{k^4 x^2 + k^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = p^2;$$

$$k^4 = p^2(x^2 + y^2);$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k^2}{p} \right)^2$$

circumferència de centre l'origen
de coordenades i radi $\frac{k^2}{p}$

Aquestes equacions es poden estendre també a la inversió respecte a una esfera, i per tant, dins l'espai tridimensional.

4.2. Homologia: L'homologia plana és la transformació geomètrica del pla en si mateix de tal forma que entre la figura homòloga i l'original es compleixen les següents relacions (Fig. 4.8)

- Els punts homòlegs estan en línia recta amb un punt fix anomenat centre d'homologia.
- Les rectes homòlogues es tallen en un mateix punt de la recta fixa anomenada eix d'homologia.

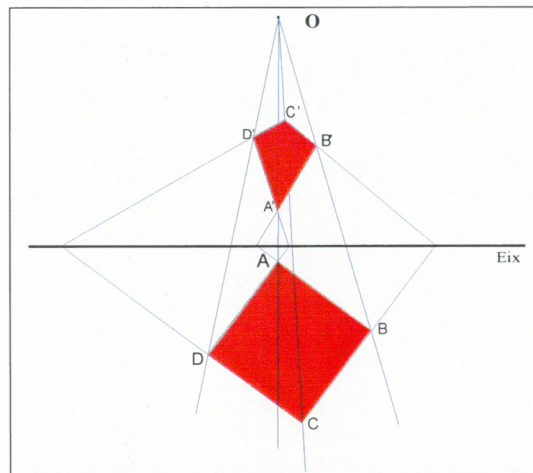


Fig.4.8

D'aquesta manera els punts A' , B' i C' són els homòlegs dels punts A , B i C , ja que compleixen les següents afirmacions:

- El punt A està en línia amb el seu homòleg A' i el centre d'homologia O , el mateix que B amb B' i O , i C amb C' i O .
- Les rectes AB i $A'B'$ es tallen a l'eix d'homologia, igual que BC i $B'C'$, i AC i $A'C'$.

· Rectes Dobles: són aquelles rectes que uneixen dos punts homòlegs amb el centre d'homologia. Per exemple OA i OA' , de la Figura 3, que en homologia es dibuixen com a una única recta i en realitat és una *recta doble*.

· Rectes límit: s'anomena *recta límit* la recta homòloga de l'infinit, és a dir, serà aquella recta on es trobin els punts homòlegs dels quals es troben a l'infinit. Com que la homologia és una relació entre dues figures, existiran dues rectes límit, una per cada figura.

Tipus d'homologia:

Les homologies es classifiquen segons, la naturalesa del seu centre i del seu eix, en: homologies pròpiament dites, afinitats, homotècies i translacions.

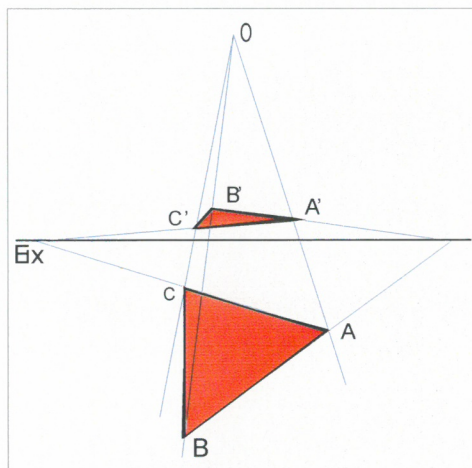


Fig.4.9

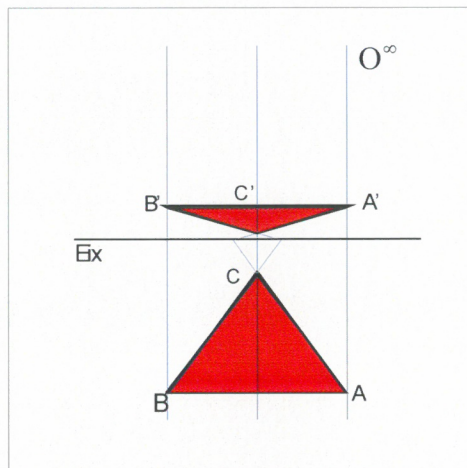


Fig.4.10

Farem un resum de les dues primeres homologies ja que són les que realment canvien la forma de les figures transformades.

- **Homologia:** s'anomena homologia quan disposem de centre O , dos punts homòlegs i l'eix per determinar-ne el seu homòleg. Aquest tipus de transformació es farà servir per trobar seccions en el sistema de representació dièdric. (Fig.4.9)

- **Afinitat:** (o afinitat homòloga) és un cas particular d'homologia en que disposem d'eix i coneixem dos punts homòlegs però determinem el centre d'homologia a l'infinit (O^∞). (Fig.4.10). Aquestes transformacions s'utilitzen, sobretot, a l'hora de representar el sistema cònic.

En el cas de la Fig.4.10, la direcció d'afinitat seria l'angle format per les rectes paral·leles AA' i BB' amb l'eix d'afinitat.

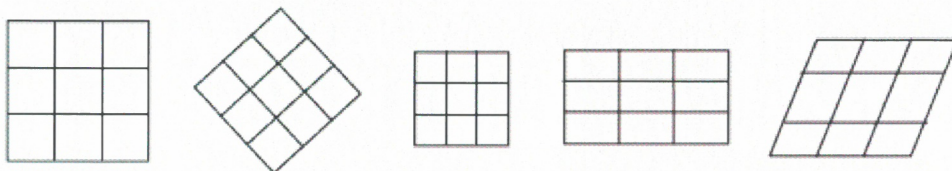
$$\frac{AM}{A'M} = \frac{BM}{B'M} = R$$

La relació anterior s'anomena raó d'afinitat, R que si és negativa les figures estan situades una a cada banda de l'eix, que es considera com a origen de les dues distàncies. Si estiguessin situades a la mateixa banda de l'eix la raó d'afinitat seria positiva.

Com que les transformacions afins només relacionen x , y i termes constants, les seves equacions generals seran equacions polinòmiques de grau 1, de la forma:

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = Dx + Ey + F \end{cases}$$

Les transformacions afins, encara que A , B , C , D , E i F siguin només nombres, poden transformar una figura rotant-la (girs), ampliant-la o reduint-la (semblances, homotècies) i distorsionant-la com en les següents figures d'exemple:

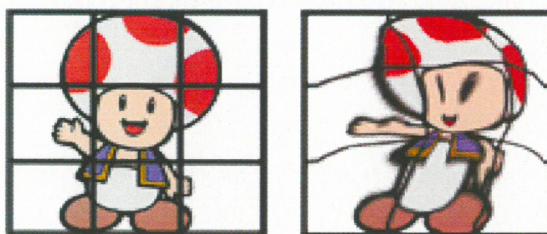


En aquests casos, encara que els angles i les mesures puguin canviar, les paral·leles es conserven. Aquest tipus de transformació s'usa sobretot per corregir les distorsions d'un mapa o les que pateixen els documents en ser digitalitzats.

· Un altre tipus de transformacions són polinòmiques de grau més gran que la unitat. Al incloure aquest tipus de transformacions que ja no són afins poden arribar a crear distorsions molt més complicades.

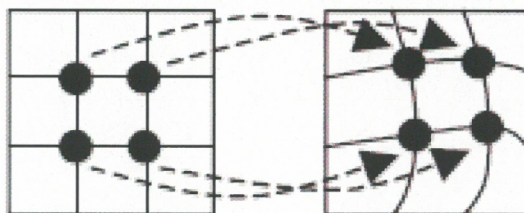
$$\begin{aligned} x' &= P(x, y) \\ y' &= Q(x, y) \end{aligned}$$

Per exemple:



La complexitat de la distorsió augmenta al mateix temps que el grau dels polinomis $P(x,y)$ i $Q(x,y)$, però són sempre suaus i fàcils, no forcegen ni trenquen l'objecte.

Molt sovint, els paràmetres exactes de les transformacions polinòmiques (és a dir els coeficients de $P(x,y)$ i $Q(x,y)$) no els coneixem però es poden calcular aproximadament a partir dels punts de control si es coneix tant la figura original com la transformada.



5. Anamorfosi fent servir miralls

Els miralls, descoberts al s. XVII, van ser un instrument innovador i transcendental per a l'evolució de l'art anamòrfic. Va permetre, tant a l'artista com a l'observador, crear i descobrir la figura original d'una manera molt més ràpida i precisa però a la vegada indesxifrable a ull nu.

Els miralls juguen amb la reflexió dels raigs de llum sobre la seva superfície llisa. La **reflexió** és el canvi de sentit d'una ona, en aquest cas, parlem dels raigs de llum en incidir sobre una superfície i continuant-se propagant en el mateix medi. La primera ona, o raig de llum, s'anomena **raig incident** ja que és el que s'acosta a la superfície llisa. El **raig reflectit** serà el que se n'allunya després de reflectir-s'hi.

Si la superfície no es llisa, com les ones del mar, s'anomenarà *reflexió difusa*, però en aquest cas, com que els miralls que estudiarem tenen una superfície llisa, la reflexió s'anomena *espectacular*, i segueix unes lleis ben determinades:

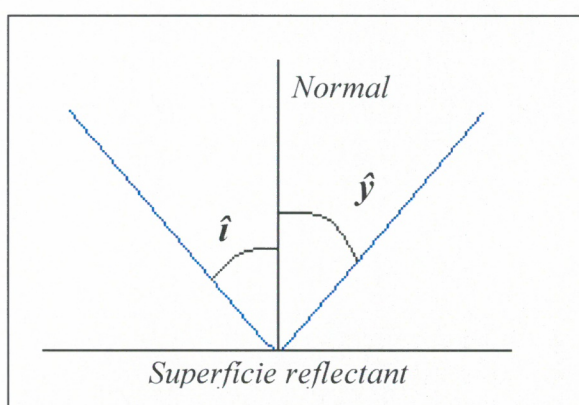


Fig.5.1

El raig incident, la **normal** i el raig reflectit es troben en el mateix pla i l'**angle d'incidència $\hat{i}$** (angle comprès entre la normal i el raig d'incidència) és igual a l'**angle de reflexió $\hat{r}$** (angle comprès entre la normal i el raig de reflexió).

$$\hat{i} = \hat{r}$$

Podrem classificar en dos tipus les anamorfosi que fan servir miralls segons el tipus siguin aquests: l'anamorfosi cònica i la cilíndrica.

5.1. Anamorfosi Cònica

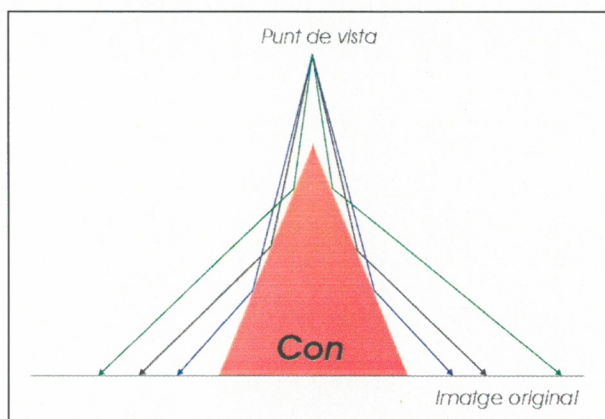


Fig.5.2

Seguint el principi de la reflexió, els miralls cònics utilitzats per rectificar les imatges anamòrfiques funcionen de la següent manera: des del punt de vista de l'observador surten uns raigs amb un angle d'inclinació diferent que reboten a la superfície llisa del mirall, surten del mirall amb un angle de 180° menys l'angle d'incidència i reflecteixen el dibuix de la imatge original. D'aquesta manera, els raigs que incideixen a la part superior del con seran els que reflectiran (des del punt de vista de l'observador) els punts més allunyats de la imatge original.

Un dels primers a desenvolupar la Geometria de l'anamorfosi cònica va ser I.L. Vaulezard, al 1630. (*J. Baltrusatis, 1984*)

Dins del seu tractat, Vaulezard traçava la figura anamòrfica dins d'una graella quadrada situada al centre del con, fent el transformat de cada punt de la forma següent (veure *Fig. 5.3* i *Fig. 5.4*):

- Va representar el con mitjançant el triangle ACD , com si estigués tallat per la meitat perpendicular a la seva base.
- Vaulezard va fixar el punt E sobre la prolongació de l'altura del con i definint-lo com a punt de vista de l'observador.
- El punt B el va situar a la base del con, és el peu de l'altura d'aquest.
- El punt G es troba en el punt d'intersecció de l'allargament de la generatriu del con i l'arc de circumferència de centre A i radi AE .
- L'arc de E a G serà el mateix que el GF , per tant, serà un punt contingut també dins l'arc de circumferència de centre A .
- Va fer sortir de cadascuna de les divisions centrals de la graella (B, K, I i H) una recta fins a E , el punt de vista.
- Ara, va unir el punt F amb cadascun dels punts en que les rectes EB, EK, EI i EH tallen el costat CA i el pla.

D'aquesta manera, va obtenir la imatge del punt K , per exemple, unint-lo amb el punt E i traçant una recta que unís el punt en que EK talla amb la generatriu de con, i F i allargant-la fins que aquesta talli amb el pla. Per tant, la imatge de K serà O .

Un cop obtingudes les imatges dels punts B, K, I i H , Vaulezard va començar a traçar la part inferior de la nova reixa anamòrfica dibuixant circumferències concèntriques de centre B i radis BO, BN, BM, BL , les imatges dels punts B, K, I i H . Ara ja tenia les imatges de les rectes horitzontals de la meitat de la graella que no tenien la mateixa distància entre si. Per obtenir les imatges de les línies verticals de la graella, va dividir les circumferències, ja obtingudes, en vuit parts iguals, totes convergents al centre de la base del con, el punt B .

Així doncs, un cop obtinguda la imatge de la graella ja podia transportar la imatge del dibuix original dins d'aquesta.

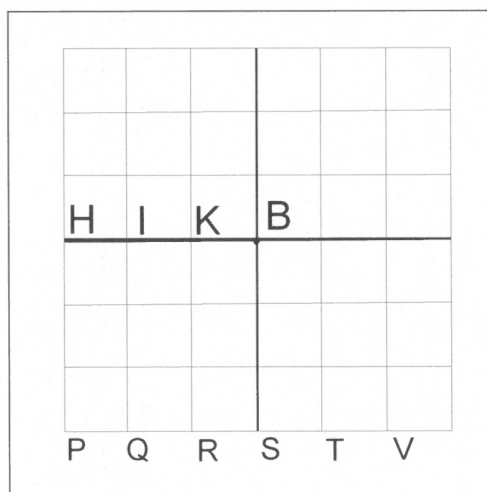


Fig.5.3. Graella

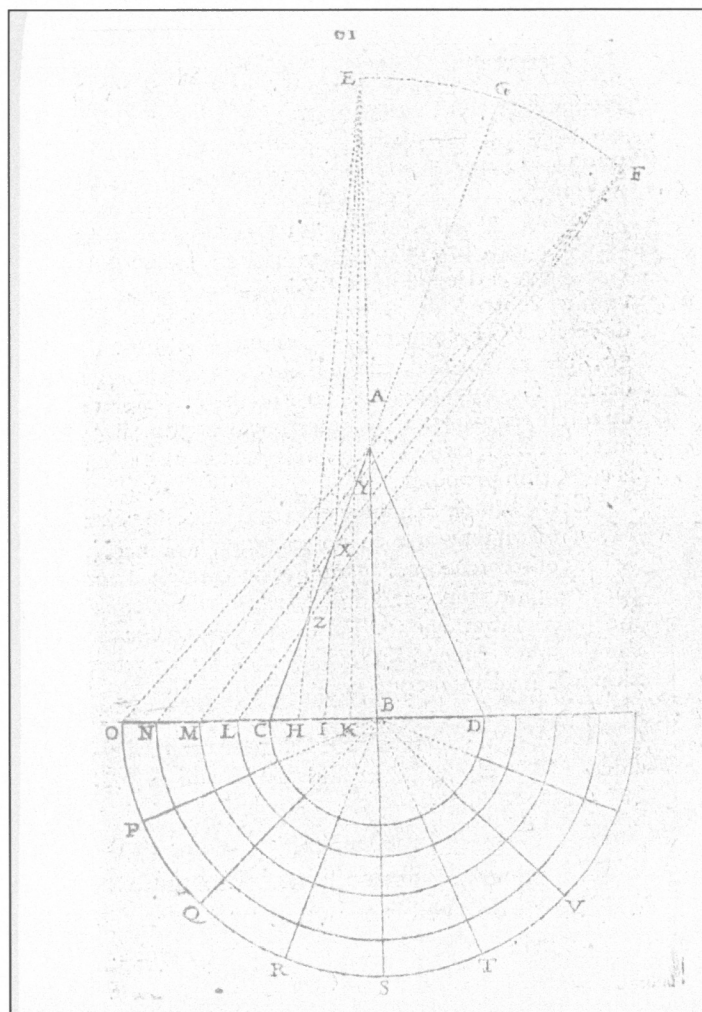


Fig.5.4 I.L.Vaulezard, *Geometria de l'anamorfosi cònica*, 1630

Teòricament exacta i pràcticament realitzable, la perspectiva cònica de Vaulezard es va prendre, sense patir cap modificació com un model clàssic. No va passar el mateix però, amb la geometria cilíndrica, la qual es va anar modificant al llarg del temps per perfeccionar-la.

Després de Vaulezard, molts altres pintors, i artistes en general, s'interessaren per aquesta geometria i van crear-ne els seus propis exemples i explicacions, sempre prenent com a referència la geometria de Vaulezard. Les imatges següents en són exemples (Fig. 5.5 i 5.6):

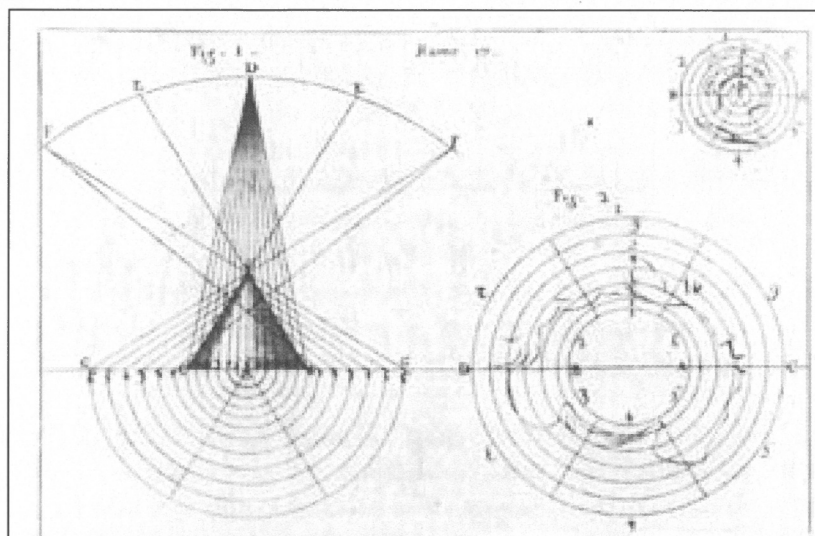


Fig.5.5 Fernandino Galli de Bibena, *Perspectiva i disseny arquitectònic*, 1731

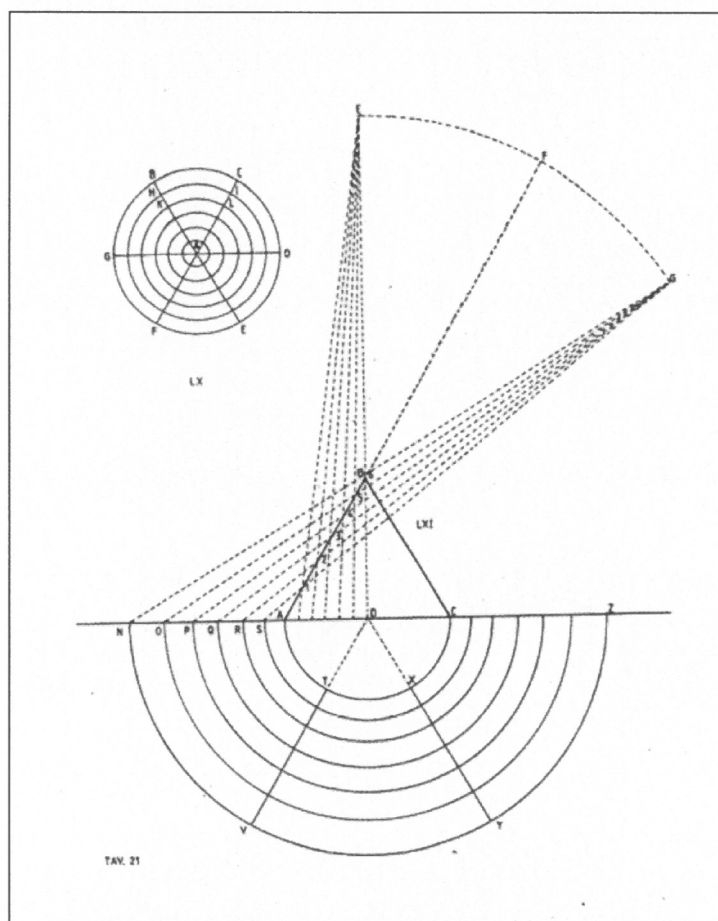


Fig.5.6 J.F.Nicéron. *Geometria de l'anamorfosis cònica*, 1638

Actualment, amb ordinador, tenim mètodes més sofisticats per ensenyar com funciona una anamorfosi cònica, per exemple, amb un dibuix en tres dimensions com el de la figura 5.7. D'aquesta manera, si situem l'ull al punt V com està indicat i tracem una recta des d'aquest fins al P de la quadricula que es dibuixa sota del con, trobarem el punt on es creua amb la generatriu del con. Un cop situat aquest punt ja sabrem l'angle d'incidència del raig visual fins a la superfície llisa del con i en podrem determinar l'angle de reflexió. Així, veurem que la transformada del punt P és el punt P', punt on incideix el raig reflectit sobre la superfície del paper.

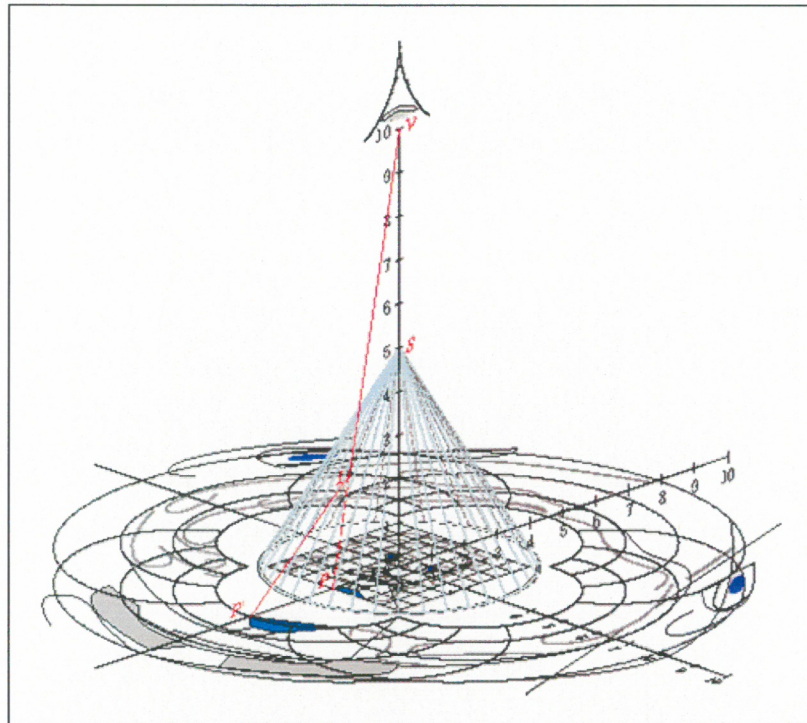


Fig.5.7

Així doncs, uns exemples senzills d'anamorfosi cònica serien les figures 5.8 i 5.9.



Fig.5.8

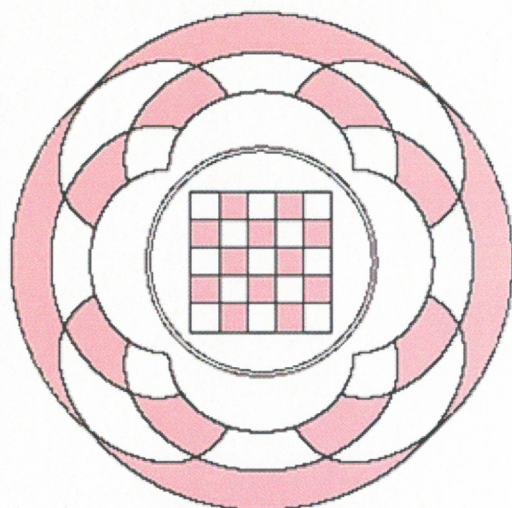


Fig.5.9

5.2. Anamorfosi cilíndrica

El funcionament de anamorfosi cilíndrica no és tan senzill com l'anterior. Ara, el punt de vista no és superior sinó que està només una mica per damunt i en el mateix pla. Això, fa canviar l'orientació dels raigs que hi incideixen i, per tant, els que en surten reflectits. (Fig.5.10)

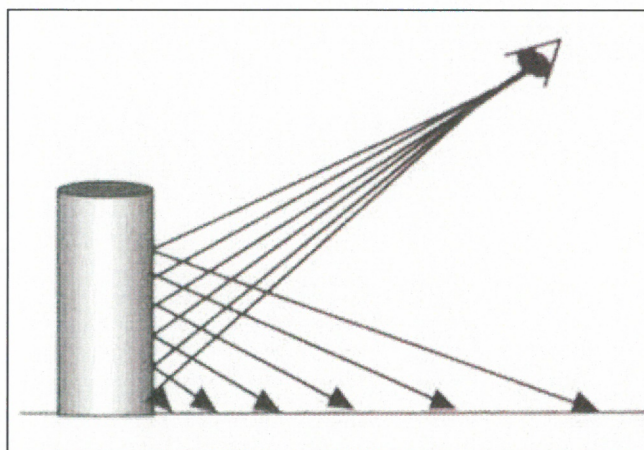


Fig.5.10

Vaulezard i Nicéron, també van ser uns dels primers a estudiar-ne el funcionament però no ho van fer amb tanta exactitud com els que els van seguir.

En un primer moment, Nicéron va observar que les ratlles circulars concèntriques traçades a la base del cilindre es convertien en horitzontals al reflectir-se al mirall cilíndric, i les rectes que passaven pel centre de la base del cilindre s'hi reflectien en forma de ratlles verticals. (Fig.5.11)

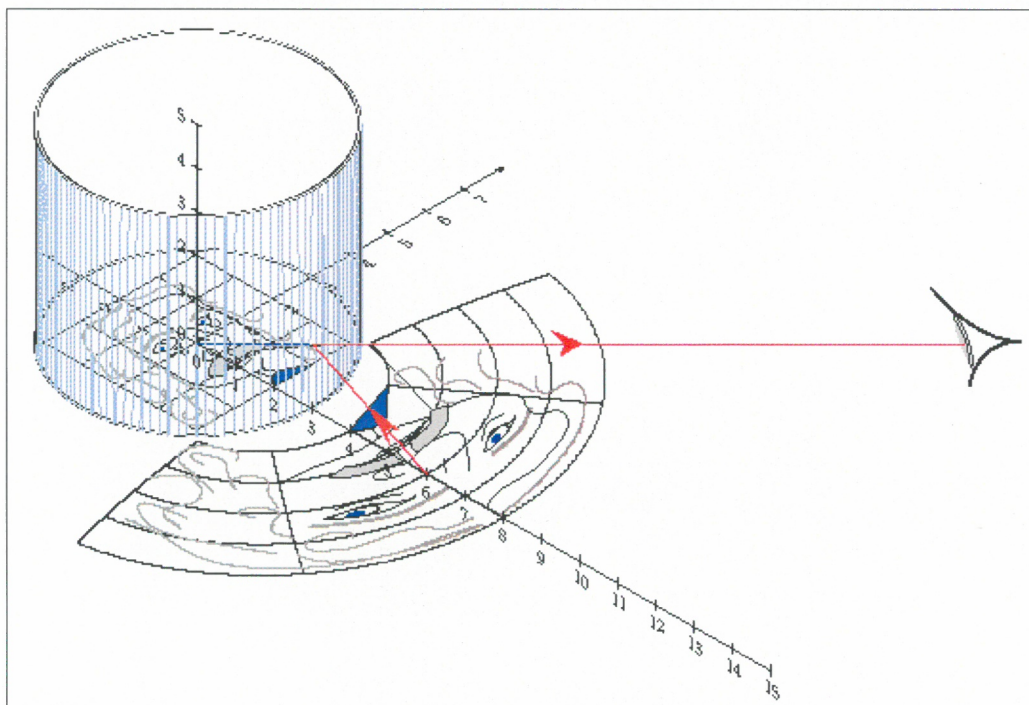


Fig.5.11

Com en la figura 5.12, Niceron va construir la imatge anamòrfica cilíndrica d'una graella quadrada de la següent manera: va situar el punt E al punt mig de la base de la graella. Des d'aquest, va dividir en vuit parts iguals la meitat superior de la circumferència. Cada recta formava un angle de $22^{\circ}5'$ amb la següent. Aquestes rectes seran les imatges de les verticals un cop reflectides damunt del cilindre. Els cercles concèntrics es convertiran, per tant, en les imatges de les horitzontals. El centre d'aquestes, es situarà a tres quartes parts del radi del cilindre des del centre de la graella. Niceron ho feia a mà i era un mètode aproximat i imprecís. No tenia en compte ni el grau d'incidència de la reflexió ni l'altura ni la distància en que es trobava l'observador. (Veure el detall del punt centre, Fig5.13)

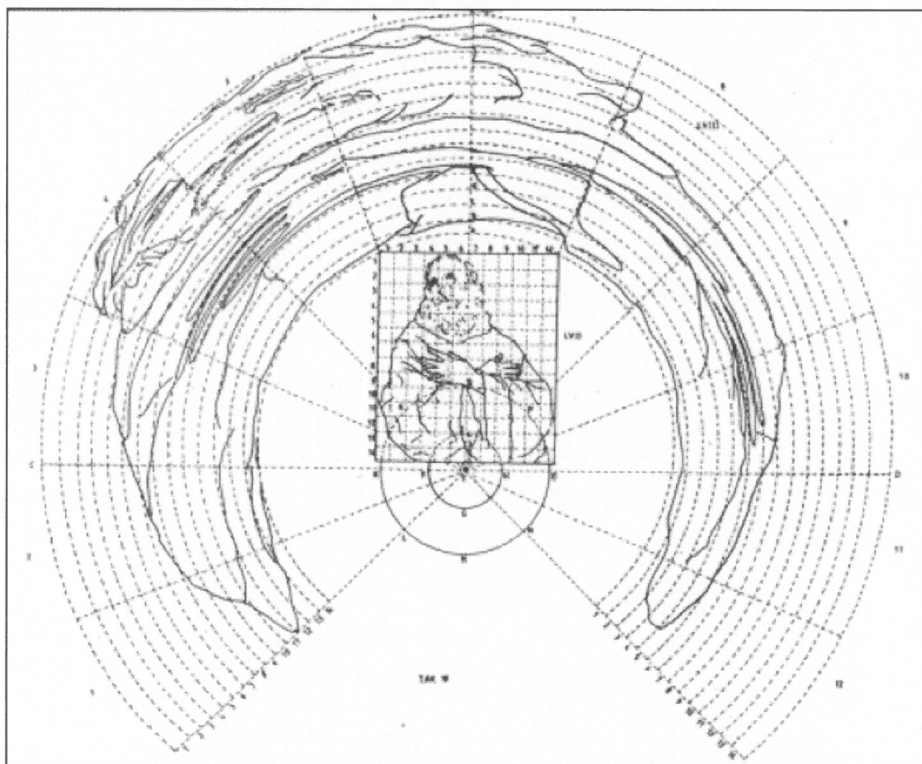


Fig.5. 12 J-F.Niceron, *Anamorfosi cilíndrica de Sant Francesc de Paule*, 1638

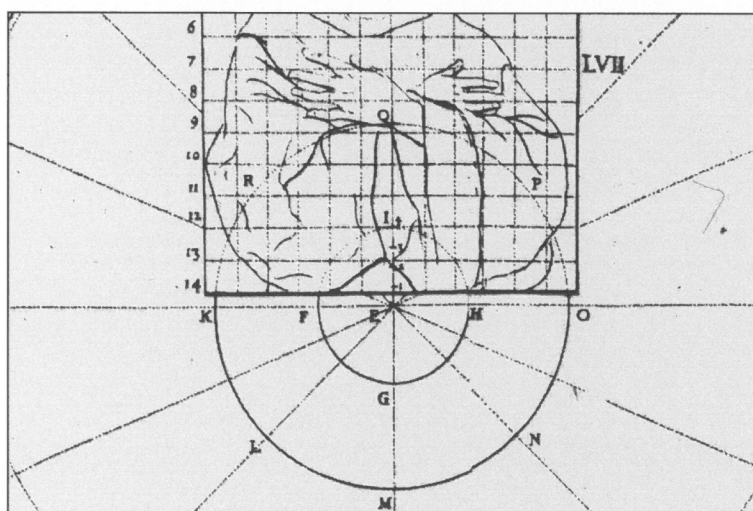


Fig.5.13 Detall de l'*Anamorfosi cilíndrica de Sant Francesc de Paule*, Niceron.

Al 1649, Breuil (J.Baltrusaitis, 1984) va estudiar un altre mètode més precís que pretenia corregir els errors comesos per Nicéron als seus càlculs (*Fig. 14*). Va dibuixar el punt de vista de l'observador i el que això comportava en la reflexió sobre el cilindre des de dos punts de vista diferents (planta i perfil). **O** i **f** són dos punts de vista diferents des d'on es dibuixaran les rectes que serviran per trobar els punts determinants per trobar els centres de les circumferències superiors. Aquestes ja no seran concèntriques i per tant se n'haurà de determinar el centre una per una. Les distàncies obtingudes en projectar el feix de rectes des de **f** sobre el pla (punts **h, i, k, l, m**) es situaran amb l'ajut del compàs sobre la recta del dibuix superior **ED**. Els altres punts obtinguts en la vista perfil (punts **p, q, r, s, t**) es col·locaran de la mateixa manera al damunt de les rectes **BK** i **CL**. D'aquesta manera tindrem tres punts de cada circumferència que ens serviran per, amb l'ajut del compàs i el mètode de les cordes, determinar-ne el centre de cadascuna d'elles.

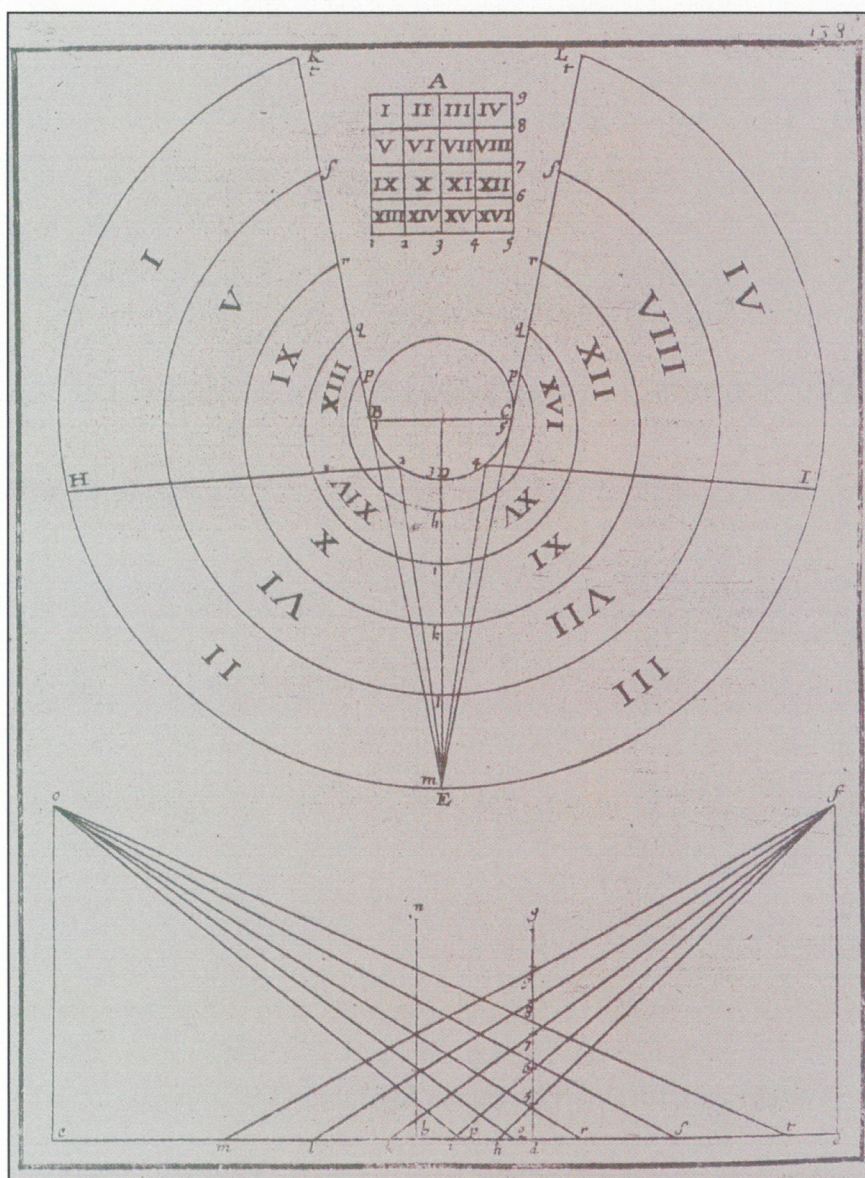


Fig.5.14 LE P.De Breuil. *Geometria de l'anamorfosi cilíndrica, pràctica XII*, 1649

Així doncs, un exemple senzill d'anamorfosi cilíndrica seria el que mostrem a la figura 5.15.

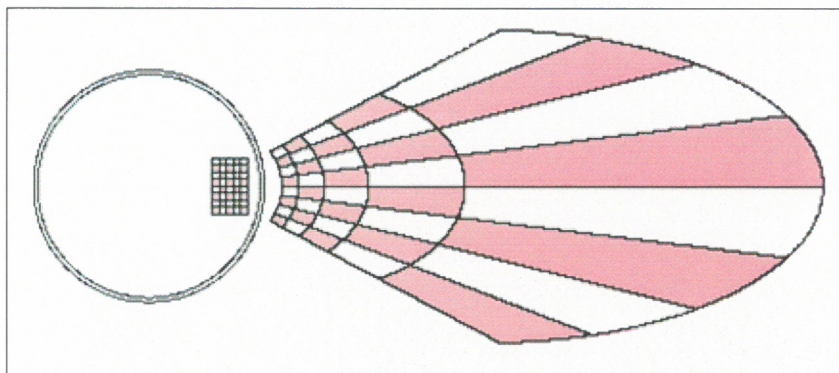


Fig.5.15

6• Màquines de veure, dibuixar i projectar

Per tal de no deixar escapar la precisió de les imatges que els artistes veien a través dels seus ulls, es van començar a desenvolupar, al llarg dels segles XVI i XVII, màquines i instruments que els serviren per captar imatges, deformar-les, analitzar-les i plasmar-les en les dues dimensions del full.

En aquest apartat estudiarem quins eren els instruments que els artistes utilitzaven per veure i dibuixar l'art anamòrfic.

Entres més destacades s'hi troba la cambra, que es basava en la representació de la perspectiva segons el principi de *veure a través* i en anar desenvolupant els fonaments geomètrics. Un cop analitzada la perspectiva, els artistes es van trobar amb un nou problema: el dibuix. Com podien plasmar les tres dimensions que veien, en un full de només dues?

Amb aquests dubtes sense resoldre, els artistes inquiets dels segles XVII van inventar nous mètodes, mitjançant innovadors artilugis, per dibuixar la realitat. A continuació mostrem només alguns d'aquests instruments, centrant-nos amb més detall en la construcció d'una eina per projectar rellotges de sol, la part final d'aquest apartat.

6.1. La cambra fosca

La *cambra fosca* és una sala amb un forat a la paret per on hi entra la llum de fora. A l'entrar-hi la llum projecta les imatges exteriors a la paret contrària de l'orifici. Funciona com l'ull humà: el forat de la paret representa la pupila per on entra la llum i la paret contrària funcionaria com la retina, des d'on captem els estímuls lluminosos. De la mateixa manera que en l'ull, la imatge queda invertida verticalment. (*Fig. 6.1*)

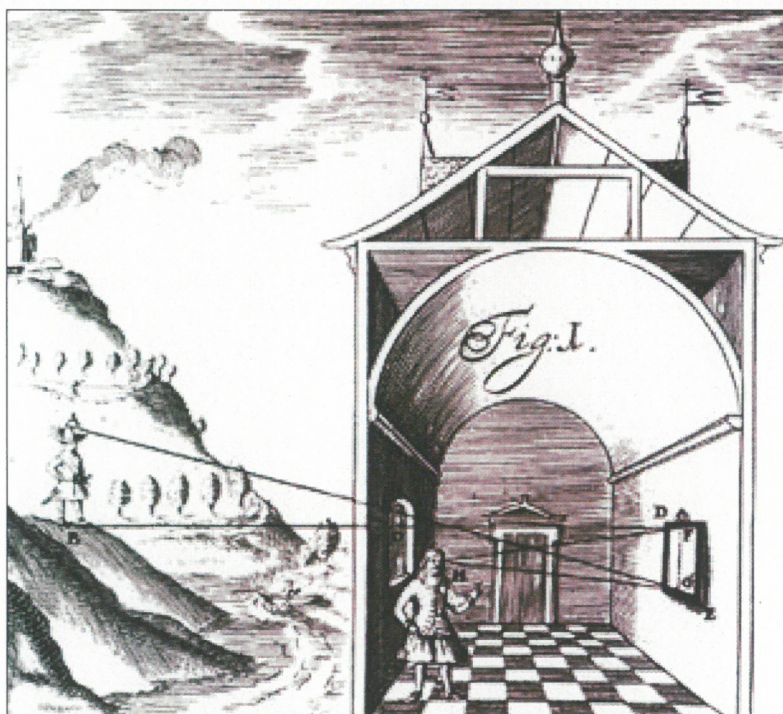


Fig.6.1 La cambra fosca

Tot i que Aristòtil (384-322 aC) ja coneixia la cambra fosca com a mètode de representació d'imatges sobre del full, ningú en va dur a terme una descripció de funcionament fins a Leonardo Da Vinci (1452-1519), que la introdueix als seus manuscrits.

La nul·la mobilitat d'aquestes estances dugué als artistes del segle XVII a perfeccionar-la fins a concebre un nou invent més manejable. Aquest nou invent consistia en una taula de dibuix portàtil amb una caixa de fusta. Aquesta caixa duia integrada, a la part del davant, una lent, que permetia a l'artista dirigir la caixa i el forat cap a la imatge que li interessava copiar. Un cop fet això, l'artista ja podia copiar la imatge amb una cartolina semitransparent recolzada a la part superior de la caixa, on hi havia un vidre.

El nou instrument va ser molt utilitzat per artistes i pintors com Canaletto i Dürer (que l'utilitzava per a recalcar apunts de perspectiva amb força precisió). De la *cambra fosca* en deriva la *llanterna màgica* i la *camera fotogràfica*. Actualment es venen com a joguines, imitant el sistema de la caixa fosca, fetes amb plàstic que, com diu l'anunci, permeten als nens calcar les imatges directament de la realitat. (Fig. 6.2)



Fig.6.2 Joguina basada en el funcionament de la cambra fosca

6.2. La llanterna màgica

Descendent de la *cambra fosca* i antecedent del *cinema*, la *llanterna màgica* es creà per projectar imatges en una paret. Consta d'una làmpada, antigament un llum de metxa o gas, que projecta la llum sobre un mirall còncau i substitueix la llum solar de l'antiga cambra fosca. Es col·loquen objectes o imatges semitransparents per on passarà la llum de la llanterna i es recrearan les formes a la paret oposada. Més endavant, es col·locà una lent entre el dibuix i la paret per enfocar i canviar la mida d'aquest. Va ser utilitzat diverses vegades pels jesuïtes durant els segles XVII i XVIII, que l'utilitzaven per recrear imatges magnífiques de caràcter moral i educatiu per als fidels. (Fig. 6.3)

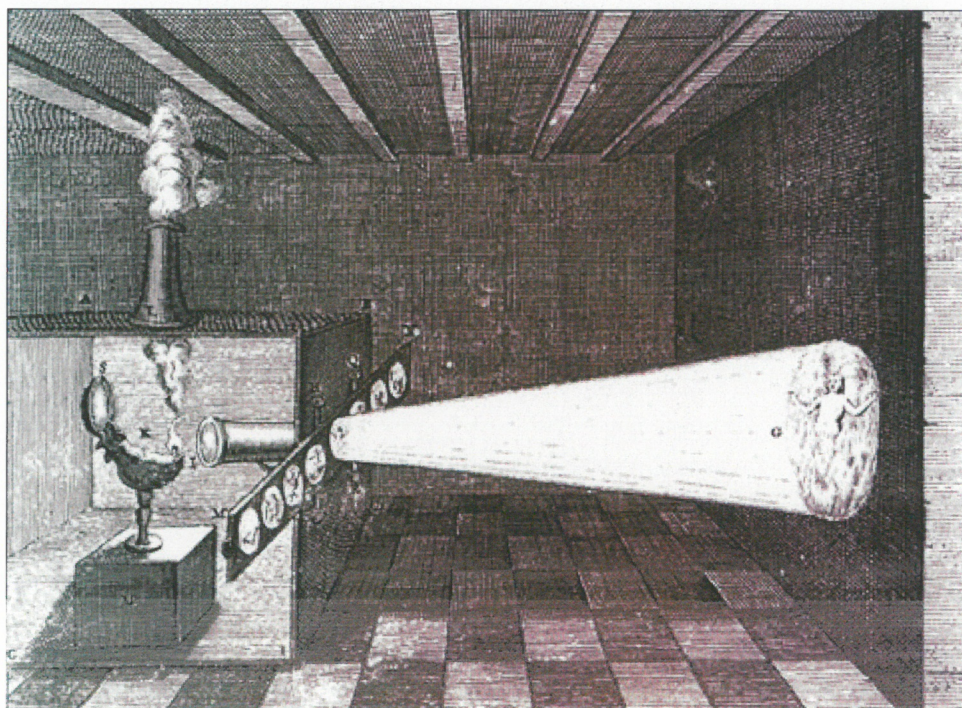


Fig.6.3 La llanterna màgica

6.3. El Vel d'Alberti

El *Vel d'Alberti* permet la reducció, a escala, del natural al dibuix, directament. És possible mitjançant una quadrícula que està formada per cordills entrellaçats en un teixit de gasa. Interposant la trama entre l'ull i el model, l'artista podia dividir el full com a la quadrícula i copiar, quadrat a quadrat, el que hi veia.

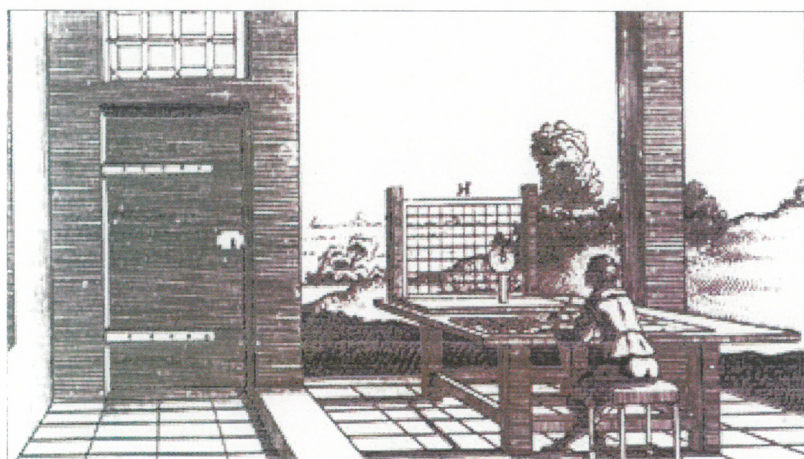


Fig.6.4 El vel d'Alberti

6.4. El Portell de Dürer

El mateix Dürer va dissenyar un instrument per registrar la imatge i el va anomenar el *Portell de Dürer*. Aquest nou instrument tenia un mecanisme que estava format per un cordill passat per una politja fixa a la paret. Del cordill en penjava un plom per un extrem i un cordill per l'altre, que servia per senyalar els punts de l'objecte, que s'anaven gravant en un paper situat al lateral esquerre de l'artefacte, al portell. Més endavant, Dürer va suprimir el cordill i pintava mirant directament a través la de quadrícula del portell, que, a la vegada, li servia de reductor o amplificador de la imatge, igual que *el Vel d'Alberti*.

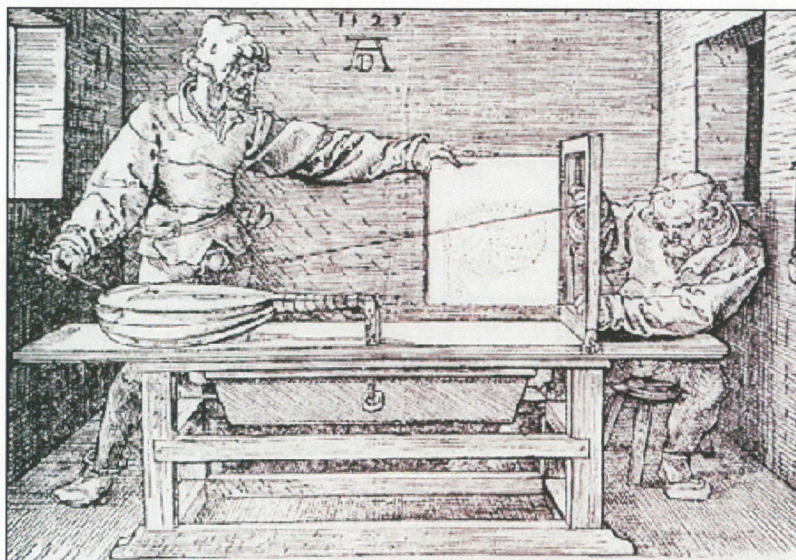


Fig.6.5 El Portell de Dürer

6.5. El pantògraf de Parré

El *pantògraf de Parré* és un instrument ideat pels mateixos artistes d'art anamòrfic per dibuixar la rectificació de figures que presenten una anamorfosi cònica i viceversa, fer l'anamorfosi cònica d'una figura qualsevol.

Consta de dos rombes semblants, els vèrtexs dels quals són articulacions i en comparteixen un. D'aquesta manera, el vèrtex que comparteixen és el centre i l'intersecció de dues barres, normalment de fusta, que formen dos dels costats de cada rombe.

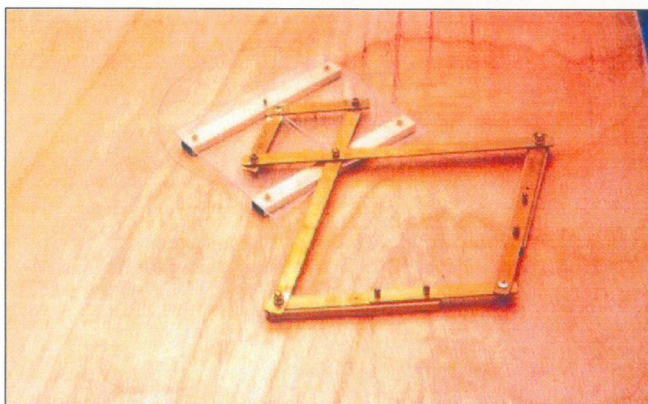
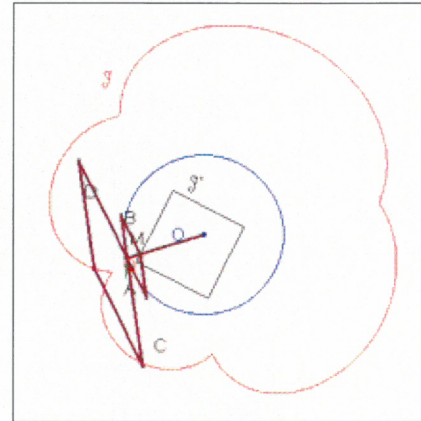
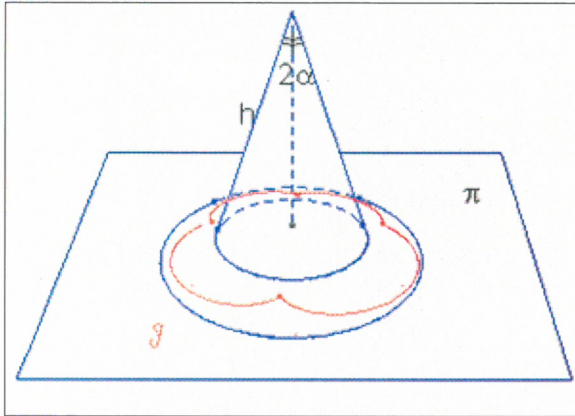
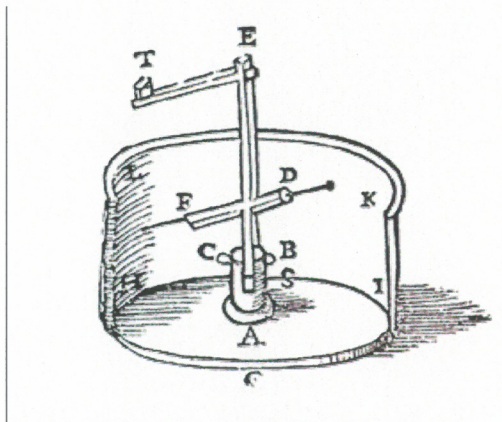


Fig.6.6 El pantògraf de Parré



L'*instrument de Lancio Urbino* també s'ha utilitzat molt en el camp de la percepció de la realitat i la perspectiva. Estava format per un semi cilindre amb la tapa inferior completa i un eix vertical al seu centre. Aquest eix central girava lliurement i al seu extrem s'hi col·locava un regle horitzontal amb dues mires: una per observar objectes propers i una altra per a llunyans. Aproximadament a la meitat d'aquest eix vertical, s'hi trobava un altre regle paral·lel a l'anterior. D'aquesta manera, aquest parell de regles fixos a l'eix central es podien moure amunt i avall i girar a la vegada. Als extrems del regle horitzontal inferior s'hi col·locava una agulla que deixava marcats els punts que es miraven des dels visors del regle superior, al paper que es col·locava a l'interior del semicilindre, com ho indica la *figura 6.9*. Aquest invent va ser molt útil per crear sense haver de ser a vista o de forma imprecisa, imatges amb una anamorfosi cilíndrica.



7. Projector de rellotges de Sol

Al llarg d'aquest treball hem anat elaborant una eina per projectar rellotges de sol sobre qualsevol superfície seguint les indicacions de Bravo (2005). Aquest autor, parteix de la idea que ell considera bàsica i fonamental: “qualsevol rellotge de sol és una projecció damunt d’una superfície donada, d’un rellotge cilíndric equatorial, cilindre, on hi ha el focus de projecció just en el centre del cilindre”.(p.11)

Vàrem començar a construir el nostre propi projector de rellotges de Sol per la llanterna, la única part indispensable.

La part superior està formada per una ampolla de plàstic transparent (d’aquelles de la gasosa) de 0,5 L sobre la que hem dibuixat les línies horàries i les del calendari, com expliquem al paràgraf següent. Dins de l’ampolla hi ha la bombeta, col·locada al damunt d’una vara de fusta i connectada als fils elèctrics que van a parar a la pila. A l’alçada del broc de l’ampolla hi hem fixat uns cargols que permeten la rotació de tot el muntatge podent-se així adaptar a la longitud en que ens trobem a l’hora de projectar-lo.

Sobre l’eix de la bombeta, que està orientat igual que ho estarà el gnom (o estil) del rellotge de sol que projectarem, hi ha col·locat un semicercle graduat (pot ser perfectament un transportador d’angles) que ens servirà per determinar la inclinació del projector segons la latitud del lloc que ens trobem. (Fig.7.1)

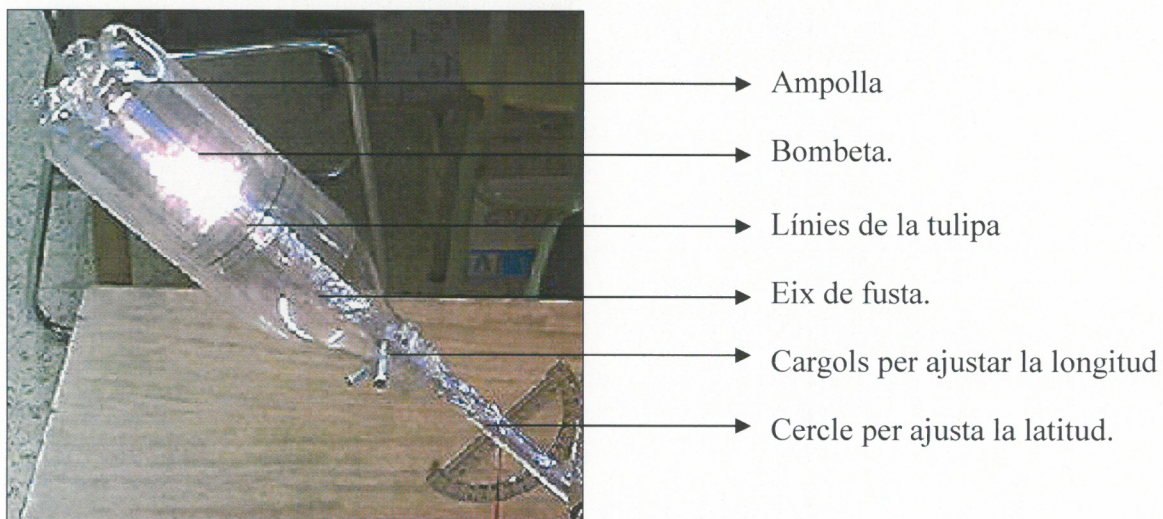


Fig.7.1. Detall de la llanterna projectora. (Foto: A. Tachó)

Per dibuixar les línies horàries, si utilitzem una ampolla de 0,5 L (33mm de radi), com hem fet nosaltres, haurem de retallar un rectangle de 207 x 85 mil·límetres de paper de transparència. Col·locant el paper de forma apaïxada, dibuixarem les línies verticals separades per 8,6 mm. Les numerarem de 1 al 24 i repassarem la número 12 amb un retolador permanent negre. Aquestes línies que acaben de traçar seran res generatrius de l’ampolla i marcaran les hores al rellotge projectat.

La línia que marca l’equinocci la traçarem just a la meitat del paper de transparència, perpendicular a les altres. En el punt on es talla amb la línia de les 6h escriurem 21 de març i on es talla amb la de les 18h, 23 de setembre. Així doncs, en adaptar la làmina a l’ampolla la línia equinoccial es transformarà en una circumferència.

La resta de les línies del calendari les dibuixarem, com indica Bravo (2005), paral·leles a la del equinocci, a les distàncies concretes de 6,7 mm, 12,1 mm i 14,3 mm, per damunt i per sota d’aquesta.

També es pot optar per fer una fotocòpia de la figura 7.2 i ampliar-la o reduir-la segons el tamany de l'ampolla utilitzada.

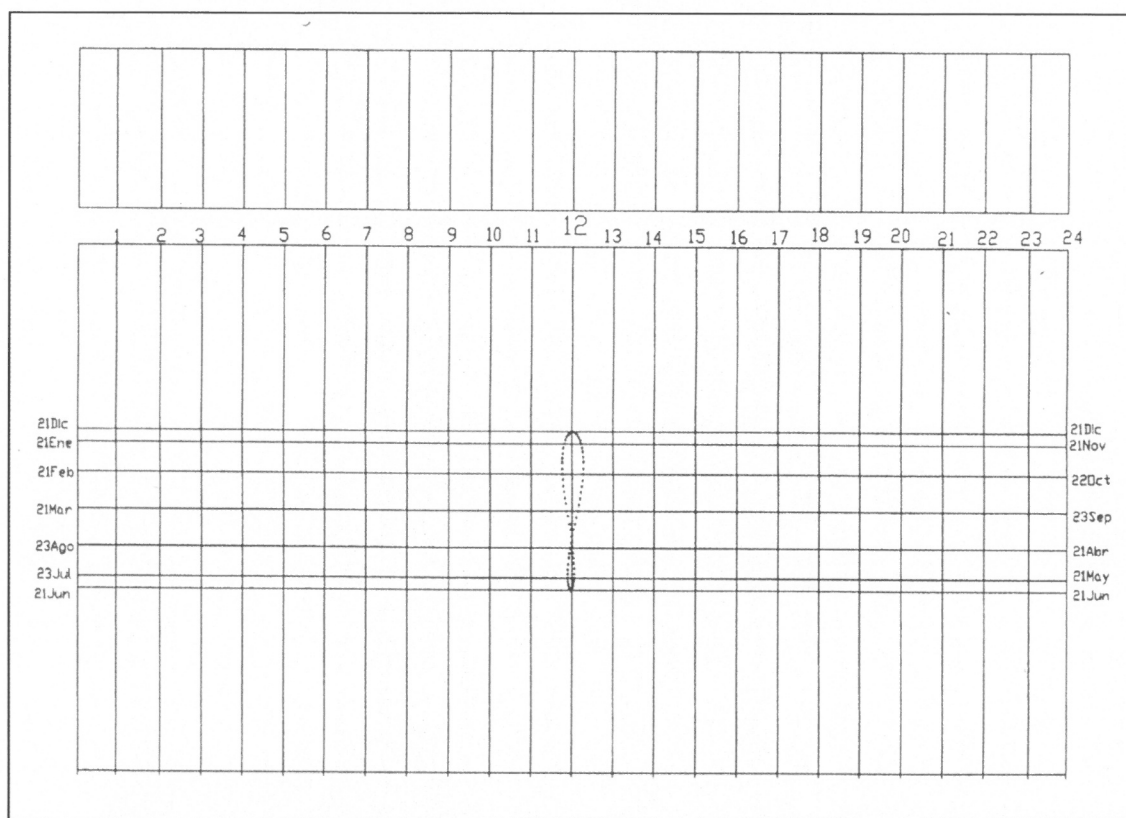


Fig. 7.2. Dibuix complet de la tulipa

Com que tots els rellotges de sol son imatges anamòrfiques del rellotge de sol cilíndric i equatorial, n'hi haurà prou amb combinar posicions i superfícies on projectar-lo per veure com es projecten les rectes que determinen la data.

Tal i com ens recomana Bravo (2005), hem creat també un suport de fusta que ens serà molt útil alhora de mantenir fixa la posició de la llanterna, sense que depengui del nostre pols.

Aquesta base de fusta està construïda amb un forat circular al centre. Aquest, ens servirà per aguantar dret l'eix vertical. Entre l'eix vertical i la base hi hem col·locat un CD usat, graduat del 0° a 360°, que ens servirà per ajustar la llanterna segons la declinació del mur on ho vulguem projectar. Sabem (Palau, 1977) que quan es vol crear un rellotge de sol vertical, la paret sobre la que s'instal·la ha d'estar encarada exactament cap al sud. DE tal manera que, si no és així, és a dir, si la paret té una determinada declinació respecte de la direcció del sud, s'haurà de corregir fent girar l'eix vertical els graus de declinació damunt del CD graduat.

Al costat d'aquest hi hem instal·lat la pila de petaca on anirà connectada la bombeta tot hi que no cal que estigui estrictament situada aquí. L'eix vertical ens servirà per graduar d'una manera més precisa l'angle que s'escau segons la latitud del lloc on estiguem col·locats. La llanterna estarà subjectada a aquest mitjançant pinces o cargols amb palometa que en permetin el gir. (Fig. 7.3)



Tulipa.

Bombeta.

Eix de fusta.

Cargols per centrar.

Cercle per ajustar la latitud.

Eix vertical

Cd per ajustar la declinació de l'eix.

Pila de petaca.

Fig.7.3. Aspecte general de la llanterna. (Foto: A. Tachó)

Podem comprovar que, comparant diferents projeccions podrem trobar què tenen en comú i en què es diferencien els diferents tipus de rellotges de sol i comprovar que en tots ells la línia del equinocci es projecta en forma de línia recta. Al mateix temps, a diferència de amb els ordinadors, amb el projector de rellotges de sol es poden dibuixar aquests sobre qualsevol superfície, per irregular que sigui, ja que és una projecció. (Fig.7.4 i 7.5)



Fig.7.5 Projecció d'un rellotge de sol.
(Foto : A.Tachó)



Fig.7.4. Rellotge de sol sobre la cara d'una persona. (Bravo, 2005)

8. Conclusions

Els objectius d'aquest treball eren: fer un repàs històric del desenvolupament de l'art anamòrfic; estudiar les transformacions matemàtiques que regeixen l'art anamòrfic, així com diferents construccions gràfiques que relacionen la imatge original i la transformada a través de miralls cònics i cilíndrics; analitzar les màquines i els instruments més destacats creats per veure i dibuixar imatges anamòrfiques. Basant-nos en els objectius d'aquest treball exposats a la introducció, podem concloure que:

- Des dels seus inicis, al voltat del segle XV, l'art anamòrfic s'ha anat desenvolupant constantment. Cada artista ha anat modificant aquest art a la seva manera, aportant idees i millorant les tècniques anteriors. Sens dubte, l'anamorfosi més coneguda de tots els temps és la de Hans Holbein, al quadre *Els Ambaixadors* (1533). Hem constatat també, que l'art anamòrfic no és només un estil de pintura o dibuix, s'ha dut a camps més extensos a part d'aquest, com al camp de l'escultura amb *David* o al de l'arquitectura, a l'església de Sant Ignasi. Tot i que sempre s'ha mantingut al marge dels grans corrents artístics, l'art anamòrfic no ha passat mai de moda, des de Da Vinci fins a Orosz o Wenner passant per Salvador Dalí, l'art anamòrfic ha anat rebrotant, sempre en petites dosis, fins als nostres dies.

- Actualment, l'art anamòrfic és poc conegut però gràcies a artistes com Kurt Wenner o Julian Beever, aquest art s'ha convertit en un atractiu per a moltes ciutats on hi podem veure aquest tipus d'art representat als seus carrers i parets. Al mateix temps, els programes informàtics actuals, com *Adobe Photoshop* i *Anamorph Me!* han fet, d'aquest art selecte, una manera de representar la realitat a l'abast de tots els públics.

- Les transformacions matemàtiques que regeixen l'art anamòrfic en el pla són les transformacions anamòrfiques, en concert, la inversió i la homologia, determinant-ne les principals propietats i característiques. De la primera hem identificat equacions propietats i característiques, podent-se generalitzar al cas de la superfície esfèrica. A l'hora d'analitzar la homologia, n'hem especificat dos casos: l'homologia en si i les afinitats. La principal diferència és que les homologies tenen un centre d'homologia determinat i en les afinitats aquest centre es troba a l'infinit.

- Pel que fa a l'anamorfosi a l'espai fent servir miralls cònics i cilíndrics, la construcció de figures anamòrfiques es basa, únicament, en la llei de reflexió: l'angle incident i l'angle de reflexió són iguals. Un cop determinat això, tan en les imatges còniques com en les cilíndriques, els angles dependran de la posició de l'observador. Vaulezard, Nicéron i Breuil són els estudiosos més influents alhora d'explicar la teoria d'aquest art.

- Les màquines més utilitzades per crear imatges anamòrfiques són *la cambra fosca* i *la llanterna màgica*. Es van començar a utilitzar al s.XVI i algunes, com el *Pantògraf de Parré*, encara es fan servir per dibuixar imatges anamòrfiques. Totes però, han evolucionat com a invents més actuals com ho poden ser el cinema o la càmera fotogràfica. En aquest treball hem elaborat també, seguint les indicacions de Bravo (2005), una eina per a projectar rellotges de sol sobre qualsevol tipus de superfícies.

Pel que fa la meua opinió sobre el treball i el tema d'aquesta recerca, he de dir que al començar a fer aquest treball ens varem trobar que gairebé no hi havia informació rellevant però mica en mica, quan ens anàvem introduint dins el món de l'art anamòrfic, la informació sortia dels racons i de les pàgines més abandonades dels llibres i Internet.

Un dels principals problemes és que la majoria d'informació estava escrita en altres idiomes com el francès, l'anglès, l'italià o l'alemany i a l'hora d'assimilar els escrits ens trobàvem dins de jocs de paraules propis de l'idioma que ens conduïen a confusions importants.

Tot i així, ha estat una recerca molt interessant i, com que desconeixia totalment aquest món, m'ha permès d'adquirir uns coneixements sobre una matèria relativament complexa per mi que de ben segur em seran profitosos.

9. Bibliografia

- BALTRUŠAITIS, J. *Anamorphoses, les perspectives dépravées*. Ed. Flammarion. 1984.
- BRAVO, A. *Linterna mágica para dibujar relojes de sol*. Publicaciones ApEA. N°9 (Secundaria). 2005.
- DIXON, R. *Inversive points and Mid-Circles*. § 1.6 in *Mathographics*. New York: Dover, pp.62-73, 1991.
- E.M.M.E, Interactive. *Los Grandes Museos De Europa, Galeria de los Uffizi*. Programa interactiu, CD 3, 1997.
- GARDNER, M. *Viajes por el tiempo, y otras perplejidades matemáticas*. Ed. Labor;
- Gran Enciclopèdia Catalana, Volum 2 (alg-aqu), Barcelona, 1969. INSB: 84-85194-83-7. Anamòrfic-a, Anamorfosi. Pàgines 272-278.
- GARDNER, M. *El sisè llibre de jocs matemàtics de l'americà científic*. Chicago, IL: Universit of Chicago Press, 1984.
- JOHNSON, A. i MARTIN, J.D. The Secret of Anamorphic Art; *Mathematics teacher*, Volum 91, Número 1, Gener 1998, pàgs 24-32.
- PALAU, M. *Relotges de sol. La història i l'art de construir-los*. Ed. Millà, Barcelona. 1997
- WEISSTEIN, E.W. *Inversion*. The Math World – Un recurs de la web de Wolfram (<http://mathworld-wolfram.com/inversion.html>).
- <http://mathsyear2000.co.uk>
- <http://museo.unimo.it>
- <http://xtec.es/%7Esmargeli/anamor/experim.htm>
- <http://www.cict.co.uk/software/maths/artmath.htm>
- http://www.cossio.net/actividades/pinacoteca/p_03_04/dali.htm
- <http://www.museumonline.at/1997/schulen/bg10/english/anam.htm>

