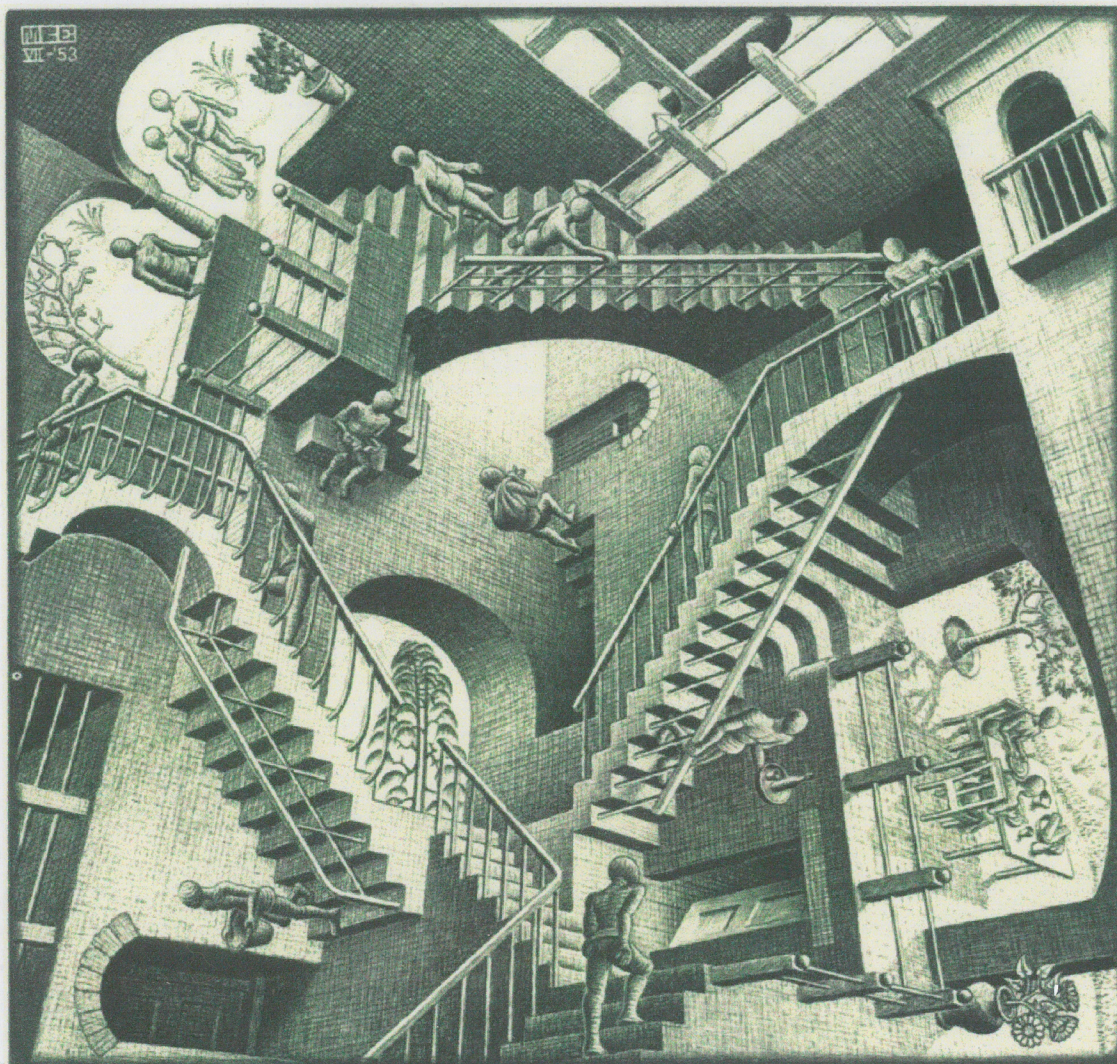


RELATIVITAT



*“El més incomprensible de l’Univers
és que aquest sigui comprensible”*

A. Einstein

3a Edició Premi Poincaré 2006

Segon premi

La relativitat

Autor: David Martí Pete

Centre: IES Joan Guinjoan i Gispert (Riudoms)

Tutor: Sr. Miquel Sánchez

per l'esforç d'entendre els conceptes fonamentals de la relativitat, tant l'especial com la general, i per la lúcida exposició dels mètodes geomètrics de Minkowski.

Sumari

Pròleg	4
Introducció	5
Bloc I - Relativitat Especial	8
1. Evolució històrica de l'estudi del moviment	9
1.1. Relativitat de Galileu	9
1.2. Newton	13
1.2.1. Espai absolut	13
1.2.2. Temps absolut	14
2. La llum	16
2.1. La naturalesa de la llum. Evolució històrica	16
2.2. L'èter	17
2.3. La velocitat de la llum	17
2.4. L'experiment de Michelson i Morley	18
2.5. L'electromagnetisme	21
2.6. La naturalesa de la llum. El model actual	22
3. Relativitat Especial	23
3.1. Espai i temps	25
3.2. Espai relatiu	26
3.3. Temps relatiu	26
3.4. Transformacions de Lorentz	28
3.4.1. Deducció del factor de Lorentz	31
3.4.2. Dilatació del temps	33
3.4.3. Contracció de l'espai	36
3.4.4. Diagrames espai i temps	38

3.5. Els experiments amb muons	44
3.6. Paradoxes espai-temps	45
3.6.1. La paradoxa del tren i el túnel	46
3.6.2. La paradoxa dels germans bessons	47
3.7. La constància de la velocitat de la llum	49
3.8. Els viatges per l'univers	49
3.9. Els viatges en el temps	51
3.10. Relació entre massa i energia: $E = mc^2$	52
 Bloc II - Relativitat General	 54
 4. Evolució històrica de l'astronomia	 55
4.1. El Model Geocèntric	55
4.2. El Model Heliocèntric	57
4.3. Les lleis del moviment planetari	58
4.4. La Llei de la Gravitació Universal	59
 5. Evolució de la geometria	 61
5.1. Geometria Euclidiana	61
5.2. Geometries No Euclidianes	63
5.2.1. Geometria Hiperbòlica	63
5.2.2. Geometria El·líptica	64
 6. Relativitat General	 65
6.1. El principi d'equivalència	65
6.2. L'experiment d'Eddington	67
6.3. El problema del periheli de Mercuri	69
6.4. L'estructura de l'espai-temps	70
6.5. La gravetat	70
6.6. Les lents gravitacionals	71

6.7. Els forats negres	73
6.8. Els forats de cuc	74

Annex: Biografia d'Albert Einstein	76
---	-----------

Conclusions	81
--------------------	-----------

Bibliografia	83
---------------------	-----------

Agraïments	86
-------------------	-----------

Pròleg

Ara que es compleixen cent anys de la teoria de la relativitat especial d'Albert Einstein, estic gratament sorpresa de veure que la gent jove continua interessant-se en aquesta teoria.

La física moderna és impossible de concebre sense la teoria de la relativitat. Basant-se en ella es creen aparells tan complicats com són els acceleradors de partícules i es fa possible el càlcul de les reaccions nuclears. Però desgraciadament, la teoria de la relativitat és molt poc coneguda fora del cercle estret dels especialistes. La comprensió d'aquesta teoria és difícil i requereix un complex aparell matemàtic.

Per això és molt important el fet que un alumne vulgui fer el seu treball de recerca sobre aquest tema. S'ha de valorar l'esforç i dedicació que en David Martí ha hagut de fer, al ser un tema de difícil comprensió i fora del temari que es dona al Batxillerat. Triant aquest tema en David Martí, ha demostrat el seu interès i les seves ganes d'adquirir coneixements nous, estudiant i aprofundint en una part de la física molt poc coneguda per la major part de la gent.

Mercè de la Muela

Professora de Física de l'I.E.S. Joan Guinjoan

Introducció

Des d'un bon principi tenia clar que volia fer un treball relacionat amb les matemàtiques per això des d'un principi em vaig apuntar al departament de matemàtiques però a l'hora de decidir el tema va ser més difícil. Després de molt pensar s'em va acudir fer un treball de recerca sobre la Teoria de la Relativitat ja que abans ja n'havia sentit a parlar i tenia curiositat per a saber com podia ser que el temps i l'espai no fossin iguals per a tothom. A més a més, aquest tema era idoni ja que el **2005** era l'**Any Mundial de la Física**.



Es commemorava el centenari de 1905, l'anomenat "annus mirabilis" d'Einstein. Aquest va ser l'any més prolífic d'Einstein. Durant el 1905 Einstein va publicar cinc articles claus per a la física posterior. Un d'aquests articles, titulat "*Sobre l'electrodinàmica de cossos en moviment*" descrivia la Teoria de la Relativitat Especial. Els altres tractaven sobre altres fenòmens de la física, en especial relacionats amb la llum i l'electromagnetisme. A causa d'aquest esdeveniment, es podia trobar un munt d'informació sobre la relativitat a internet. A més a més, fent aquest treball contribueixo en la meua mesura a l'objectiu de l'Any Mundial de la Física: divulgar la teoria d'Einstein.

L'objectiu inicial d'aquest treball era ser un treball de recerca bibliogràfica divulgatiu, que acostés a qualsevol persona que el llegís a la relativitat. No pretenc en cap moment que després de llegir el treball el lector sigui un expert en relativitat i sàpiga aplicar tots els coneixements, sinó que la meua intenció és que li quedi un idea global del que és la Teoria de la Relativitat, sobre què es basa i quines en són les seves conseqüències. Aquest treball el podria llegir qualsevol persona ja que no es necessiten uns coneixements previs de física, el treball parteix de zero i introdueix els coneixements necessaris per a poder entendre la Teoria de la Relativitat. Alguns conceptes més complicats com ara la rapidesa ja no els he introduït al treball ja que tot i que són importants, són prescindibles per entendre les bases de la relativitat.

El treball s'estructura en dos blocs: la relativitat especial i la relativitat general. Corresponen a les dues parts en que es divideix la Teoria de la Relativitat i que es poden distingir perfectament. La Teoria de la Relativitat Especial (TRE) parla de com es veuen afectats els fenòmens físics quan hi intervenen velocitats properes a la de la llum, però en absència de camps gravitatoris. En la TRE no es tenen en compte els efectes de la gravetat. En el treball explico les conseqüències més importants com ara la dilatació del temps, la contracció de l'espai i la famosa equació $E = mc^2$. Abans d'introduir la TRE hi ha dos apartats que expliquen la situació de la física anterior a aquesta teoria, un tracta de l'evolució històrica de l'estudi del moviment, des de Galileu fins a Newton i l'altre tracta de la llum. L'altre gran bloc tracta la Teoria de la Relativitat General (TRG). Aquesta generalitza la TRE estudiant els camps gravitatoris i l'estructura de l'espai-temps. De la mateixa manera que abans, hi ha dos apartats de visió històrica abans de la TRG, un que explica com ha evolucionat la astronomia i l'altre parla de la geometria per fer referència després a la geometria de l'espai-temps.

El nostre mètode de treball amb el tutor va ser dissenyar un índex inicial del treball que després aniríem completant. Vaig anar desenvolupant apartat per apartat, però quan obtenia més informació sobre un apartat que ja havia fet els anava completant. El tutor anava revisant cada apartat que enllestia. L'índex final no s'assembla gaire a l'inicial. Hi ha apartats que els vaig canviar de lloc fins a tres vegades ja que cada vegada que llegia més sobre relativitat tenia una visió més àmplia del treball. També n'hi vaig afegir de nous i en vaig treure alguns que eren innecessaris. A mesura que anava avançant el treball, aquest agafava cada vegada més formalitat. L'última etapa del treball la vaig dedicar a fer que el treball fos més formal, intentant demostrar algunes fórmules i afegint els diagrames espai-temps.

Al ser un treball de recerca bibliogràfica, la búsqueda d'informació pren bastant importància. He utilitzat tots els mitjans que estaven al meu abast: internet, llibres, vídeos, articles de revistes i diaris, etc. El més importat de tots és internet ja que vaig trobar un munt de pàgines web amb informació sobre la relativitat. El fet que enguany fos l'any de la física i justament a causa del centenari de 1905, l'any més prolífic d'Einstein, ha fet que la Teoria de la Relativitat estigués d'actualitat. A la televisió es van emetre diversos capítols que relataven la vida d'Einstein i les aportacions que va fer a la física. Als diaris també van sortir alguns articles que en parlaven. A part de tota la

informació que vaig treure d'internet, també vaig consultar alguns llibres que vaig agafar prestats de la Biblioteca Xavier Amorós de Reus. El meu tutor em va passar bastant informació, em va fotocopiar alguns capítols de llibres i articles.

Durant la realització d'aquest treball de recerca em vaig trobar amb diverses dificultats. La major dificultat és la capacitat d'abstracció que requereix aquest tema. El fet d'estudiar el comportament de dos sistemes de referència en moviment en els quals l'espai i el temps difereixen és difícil d'imaginar en un principi. A més a més, una de les coses que em va confondre més va ser que les transformacions de Lorentz en algunes webs apareixien d'una manera i en altres hi havia alguns símbols canviats i un canvi d'ordre de manera que d'una no podies passar a l'altra mitjançant càlculs algebraics. Aquesta confusió amb les fórmules es va ajuntar amb el fet que en unes webs utilitzaven una nomenclatura diferent per a simbolitzar les magnituds d'un sistema i les de l'altre. Al final vaig descobrir que de fet les dues formes de les transformacions de Lorentz eren vàlides, el que passa és que les altres eren les transformacions de Lorentz inverses, que són les transformacions de Lorentz però substituint la velocitat v per $-v$. De fet en aquesta dificultat per entendre la teoria de la relativitat es basava precisament l'objectiu d'aquest treball de recerca, fer que aquesta teoria que és bastant difícil d'entendre així d'entrada sigui comprensible per una persona que llegeixi el treball i no tingui necessàriament coneixements previs de física.

Bloc I

Relativitat Especial

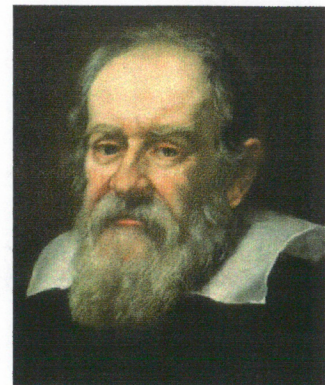
1. Evolució històrica de l'estudi del moviment, l'espai i el temps

L'estudi del moviment ja preocupava als grecs. Aquest interès pel moviment, la seva naturalesa i les normes que el regeixen es devia a la voluntat d'explicar el moviment dels astres i els altres fenòmens de l'astronomia com ara els eclipses. Un dels problemes que es plantejaven els savis era si el moviment era relatiu. Relatiu significa que no és absolut i per tant, que depèn d'alguna cosa, que no és igual en tots els casos. Són el moviment, l'espai i el temps relatius? Depenen de la situació de l'observador? En el cas del temps, si és relatiu, podem fer que vagi més ràpid o més lent i fins i tot, podríem arribar a viatjar en el temps? Al llarg d'aquest treball anirem resolent aquestes qüestions.

1.1. Relativitat de Galileu

Quan viatgem en tren, per a saber si ens movem o estem quietes necessitem mirar per la finestra. Sense mirar per la finestra no es pot determinar l'estat de moviment del tren. Per tant, per a poder estudiar el moviment, primer hem de fixar un **sistema de referència**. Fixar un sistema de referència significa establir un punt o conjunt de punts respecte als quals referim el moviment, és a dir, establir una situació de repòs on es situa l'observador. En el cas del tren, el sistema de referència respecte al que es mou seria l'andana.

Galileu Galilei va ser un científic italià que va viure entre els segles XVI i XVII. És un dels físics més importants de la història, se'l considera el pare de la física juntament amb Newton. Galileu va estudiar el moviment dels cossos, els planetes (amb el seu telescopi), les marees, etc. Pel que fa al moviment dels cossos, va enunciar que aquest és relatiu al sistema de referència que s'utilitzi. L'estat de moviment o repòs d'un cos depèn del sistema de referència que s'utilitzi per a observar-lo. Per exemple, per a una persona que vagi en tren i miri per la finestra, els bancs de l'andana es mouen, en canvi, per a un observador situat a l'andana els bancs estaran quietes.



Un dels experiments que es feien en la seva època per a estudiar la relativitat del moviment era el llançar una pedra de dalt del pal d'un vaixell en moviment. Primer analitzem la situació en repòs. Si la pedra es deixa caure (amb velocitat inicial 0), la trajectòria és una línia vertical. (Fig. 1.1) En canvi, si es llança amb una certa velocitat horitzontal, llavors la seva trajectòria serà parabòlica. (Fig. 1.2)

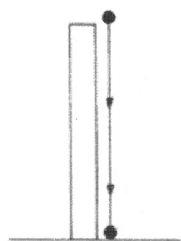


Fig. 1.1



Fig. 1.2

Ara fem l'experiment sobre el vaixell en moviment. Definirem dos sistemes de referència per a poder comparar-los. Situem un observador a dalt del vaixell i un altre a terra. Deixem caure la pedra a la vora del pal del vaixell en moviment. (Fig. 2) La pedra caurà al peu del pal o caurà més endarrera a causa del moviment del vaixell? Aquesta pregunta portava de cap tots els físics de l'època però Galileu va arribar a la solució d'aquest problema. La pedra caurà al peu del pal. Per a l'observador de dalt del vaixell, com que el seu sistema de referència està en repòs, veurà caure la pedra amb una trajectòria rectilínia, exactament com si fes l'experiment a terra ferma, sense veure's afectat per la velocitat del vaixell. Per l'altre observador situat a terra, tot i que sempre veu la pedra caient al costat del pal, com que el pal s'ha anat desplaçant, per aquest observador la trajectòria de la pedra haurà sigut parabòlica.

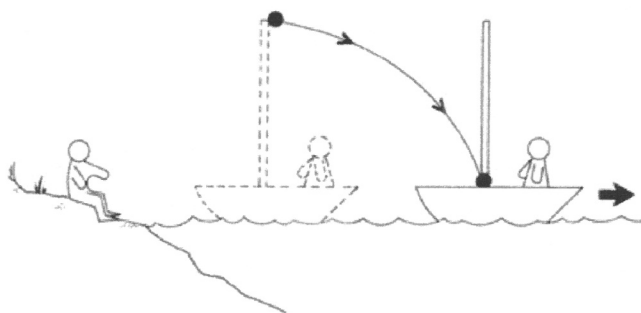


Fig. 2

Això s'explica perquè per a l'observador situat a terra la pedra és llançada amb una velocitat horitzontal, concretament la que portava el vaixell.

A partir d'experiments com aquest, Galileu va deduir que tot moviment és relatiu a un sistema de referència. Segons això, no podem determinar si un objecte es mou o no

si no agafem primer un sistema de referència respecte el qual puguem observar-lo. Com a conseqüència d'això, les lleis físiques perquè siguin considerades vertaderes s'han de poder aplicar a qualsevol sistema de referència, ja estigui en repòs o en MRU (moviment rectilini uniforme), és a dir, en línia recta i velocitat constant (sense acceleració). Aquest és l'anomenat **Principi de Relativitat** de Galileu: "Tots els sistemes de referència són equivalents alhora de formular-hi les lleis físiques de la mecànica". L'observador del vaixell observarà el mateix que si l'observador que està en el port deixés caure una pedra des de dalt d'un pal situat a terra ferma. Els dos veurien caure la pedra verticalment. No hi ha cap experiment que ens permeti distingir un SR en moviment d'un que no ho estigui ja que, de fet, tots els sistemes de referència estan en moviment respecte d'algun altre. Si el moviment és accelerat, els efectes de l'acceleració s'han de tenir en compte al aplicar les lleis físiques. Si el moviment no és rectilini, també apareix un altre tipus d'acceleració. Però, tret d'això, no hi ha manera de saber si nosaltres ens movem amb MRU o estem en repòs, recordem el cas del tren on es feia necessari mirar per la finestra per a saber-ho, en canvi, si el moviment és accelerat, tot és diferent ja que notaríem l'acceleració. A l'hora d'estudiar un moviment, qualsevol sistema de referència és vàlid, podem triar el sistema de referència que millor s'adapti a les nostres necessitats.

Ara generalitzarem el cas del tren i de la pedra per a estudiar les lleis de la mecànica de Galileu. Suposem que tenim un SR que anomenarem S que està en repòs i un altre SR que té un MRU respecte aquest que anomenarem S' (Fig. 3). En l'exemple d'abans, S seria el port i S' , el vaixell.

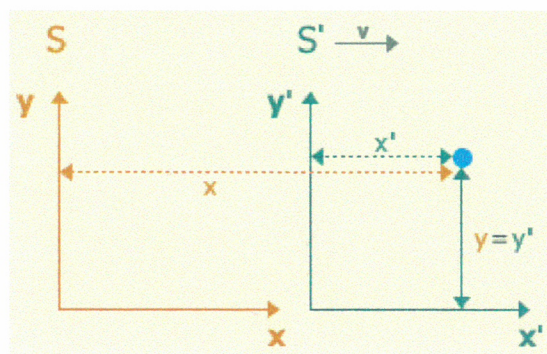


Fig. 3

Per a estudiar el moviment d'un cos en S' que observarà un observador situat en S , s'han d'utilitzar les següents transformacions que s'anomenen **transformacions de Galileu** en contraposició a les transformacions de Lorentz que veurem més endavant.

$$x = x' + v \cdot \Delta t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

on x és la posició final (posició mesurada des de S), x' és la posició inicial (posició respecte S'), v és la velocitat de S' respecte S , Δt és el temps transcorregut. Per exemple, per calcular la posició d'una persona que va en un tren que s'allunya de l'andana, suposem $x' = 2$, v seria la velocitat del tren i llavors només cal substituir t per saber la posició en cada instant (suposem que el tren no accelera, que sempre va a velocitat constant). L'equació anterior també es pot expressar de la següent forma:

$$x' = x - v \cdot \Delta t$$

Fins aquí és fàcil però quan el mòbil situat en S' no està en repòs la cosa es complica un mica, és l'anomenada **composició de velocitats** i es pot deduir derivant les transformacions de Galileu respecte el temps:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

Ara arreglem les equacions ja que sabem que la derivada de la posició respecte el temps és igual a la velocitat i per tant ens queden les següents equacions:

$$u_x' = u_x - v$$

$$u_y' = u_y$$

$$u_z' = u_z$$

Anomenem u a la velocitat del mòbil per a diferenciar-la de la velocitat amb que es mouen els dos SR entre sí. La composició de velocitats segons les transformacions de Galileu queda de la forma següent:

$$u' = u - v$$

$$u = u' + v$$

on u és la velocitat del mòbil que s'observarà des de S i u' la que s'observarà des de S' . Si el cos està en repòs com en la majoria dels casos que estudiem, llavors $u = v$. Això

s'ha de tenir en compte a l'hora d'aplicar les transformacions de Galileu ja que per exemple l'equació per a calcular la posició d'un cos que té una velocitat positiva respecte de S' seria $x = x' + (u' + v) \cdot t$.

1.2. Isaac Newton

Isaac Newton va ser un científic, filòsof i matemàtic anglès que va viure en els segles XVII – XVIII. Va ser un científic clau en la història de la ciència, alguns diuen que el més important. Newton va escriure el que pot considerar-se l'obra més famosa de la física, el "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" que inclou la seva llei de la gravitació universal amb la que va resoldre amb exactitud els moviments de tots els planetes i satèl·lits. Quan analitzem l'evolució històrica de l'astronomia ja tornarem a parlar de Newton. Pel que fa a les seves aportacions a l'estudi del moviment, va contribuir amb les anomenades tres lleis de Newton que són la base de la dinàmica:



1. El principi de la inèrcia
2. La llei fonamental de la dinàmica
3. El principi d'acció-reacció

El que ens interessa a nosaltres de veritat és la concepció que tenia Newton sobre l'espai i el temps ja que les seves idees van ser considerades durant molt temps com a veritats absolutes i van obstaculitzar l'avanç de la física.

1.2.1. Espai absolut

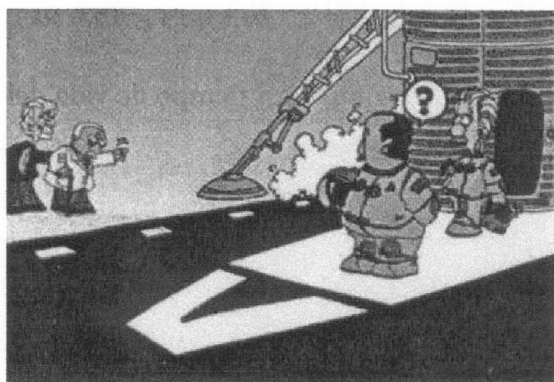
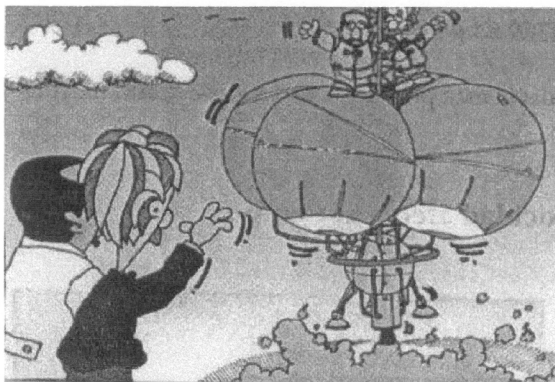
Newton, com tots els científics d'aquella època, acceptava el Principi de Relativitat com a vàlid. Sabia que dins el nostre planeta tots els sistemes de referència es mouen, ja que la Terra es mou al voltant del Sol i aquest gira al voltant del centre de la nostra galàxia, la Via Làctia. Tot i saber que tot l'univers es mou a causa de les forces d'atracció i repulsió, Newton creia que havia d'existir un espai absolut, un sistema de referència absolut respecte el qual l'univers en conjunt estigués en repòs. Creia que

l'últim sistema de referència, el més global, havia d'estar en repòs, aquest sistema havia de ser l'èter, una substància estranya que cobria tot l'univers i permetia alguns fenòmens físics que no tenien explicació el segle XVII. Tot i que Newton no va aportar cap demostració evident, aquest concepte va ser acceptat durant més de dos segles. Això es deu al prestigi que havia adquirit Newton en aquella època amb el descobriment de la llei de la gravitació universal. Els físics posteriors donaven per vertader tot el que havia postulat Newton i no ho qüestionaven.

1.2.2. Temps absolut

Tal com Newton necessitava introduir el concepte d'espai absolut per a complementar la seva llei de gravitació universal, va creure necessari introduir també el temps absolut. Aquest és un temps que passa igual per a tothom, sempre passa de manera constant i no es pot fer que passi més lent o més ràpid. Aquesta manera d'entendre el temps és la que encara avui està arrelada a la societat ja que en la nostra experiència quotidiana, el temps és igual per a tots. En aquella època no era lògic pensar que en algun lloc de l'univers el temps pogués passar més ràpid o més lent.

El fet que el temps pugui passar més lent o més ràpid, porta lligades una sèrie de conseqüències filosòfiques que són impensables. Per exemple, si el temps passés més ràpid per a una persona que per a una altra, podria un fill arribar a ser més vell que el seu pare? Si es pogués jugar amb el temps i retrocedir uns quants anys, un fill podria matar al seu pare abans de que nasqués ell? I si és així, què li succeiria a ell? Aquest problema té la seva arrel en el principi de causalitat que diu que "a tota efecte li correspon una causa". Si es trenqués aquesta relació, els efectes es podrien donar abans que les seves causes? I si poguéssim aturar el temps, una persona podria aturar-se i conservar-se paralitzada en el temps sense envellir fins que es tornés a modificar el seu curs normal i no notar res? Això en aquella època era impensable, el temps sempre és igual per a tothom!



La teoria clàssica de Newton, tot i que és vàlida per a moltes situacions té certes limitacions. Quan pretenem descriure sistemes microscòpics o mòbils que es mouen a grans velocitats properes a la de la llum, trobem que aquesta teoria presenta alguns errors. Avui diu la teoria de Newton ha sigut reemplaçada per dos grans teories: la Mecànica Quàntica pel que fa a l'estudi de sistemes microscòpics i la Teoria de la Relativitat pel que fa a l'estudi de sistemes inercials que es mouen a velocitats properes a la de la llum.

2. La llum

2.1. La naturalesa de la llum. Evolució històrica

Tots coneixem el fenomen de la llum i coneixem algunes de les seves propietats com ara la reflexió però quan ens parem a pensar què és la llum, no sabem exactament com explicar-ho. La part de la física que estudia la llum és l'òptica.

Des de l'antiguitat han intentat explicar el fenomen de la llum i la vista. Alguns pensaven que la llum provenia dels objectes, altres que era emesa pels ulls. No va ser fins al segle X que Ajasen Basora va dir que la llum provenia del Sol, rebotava en els objectes i la captaven els ulls. Però encara quedava per resoldre la seva naturalesa. **Isaac Newton** va ser el primer en presentar un hipòtesis de la seva naturalesa, el seu **model corpuscular**. Aquest model deia que la llum estava composta per unes petites partícules anomenades fotons que emetien les fonts lluminoses i que es desplaçaven a gran velocitat en línia recta. Aquest model explicava la reflexió però era més difícil explicar la refracció. Per explicar la refracció Newton deia que la velocitat de la llum variava segons la densitat del medi, la velocitat de la llum era més alta en els medis més densos, i que per això els raigs de llum canvien de direcció al canviar de medi. Aquesta hipòtesi contradeia les experiències de l'època.

La impossibilitat d'explicar la refracció a partir del model corpuscular va fer que es busqués un altre model més adequat. L'any 1678, **Christian Huygens** va elaborar el **model ondulatori** on deia que la llum eren ones mecàniques similars a les del so. Aquest model explicava perfectament la reflexió i la refracció ja que al canviar de medi, les ones es comportaven diferent. El principal problema d'aquest model és que tota ona mecànica necessita d'un medi per a propagar-se i, en canvi, la llum es propaga en el buit. Va ser llavors que van postular l'existència d'un nou medi desconegut, l'èter.



2.2. L'èter

L'èter deien que era un medi que ocupava tot l'espai, que ho cobria tot i que estava en repòs absolut. Creien que l'èter era aquell sistema de referència especial, que ja postulava Newton, respecte el qual es podien estudiar tots els moviments amb objectivitat. Deien que l'èter era un medi transparent i indetectable però que servia de suport per a les ones mecàniques de la llum en el buit.

El concepte d'èter, que va sorgir com una explicació de la propagació de la llum a través del buit, no va desaparèixer definitivament fins que Einstein va donar una explicació física d'aquest fenomen: el camp electromagnètic. Fins llavors, la majoria de físics, tot i obtenir resultats negatius en l'intent de percebre l'èter, estaven convençuts de que aquest existia i buscaven alternatives per a explicar els resultats dels seus experiments.

2.3. La velocitat de la llum

Mesurar la velocitat de la llum era un punt clau per entendre'n la seva naturalesa. El primer en calcular-la va ser Olaf Roemer el 1676. Roemer era un astrònom que es dedicava a estudiar els eclipses de les llunes de Júpiter. Mentre feia les seves observacions dels eclipses d'Ió, es va adonar de que els eclipses es produïen uns minuts abans quan Júpiter estava més a prop de la Terra (posició A) que quan estava més lluny (posició B), (Fig. 4).

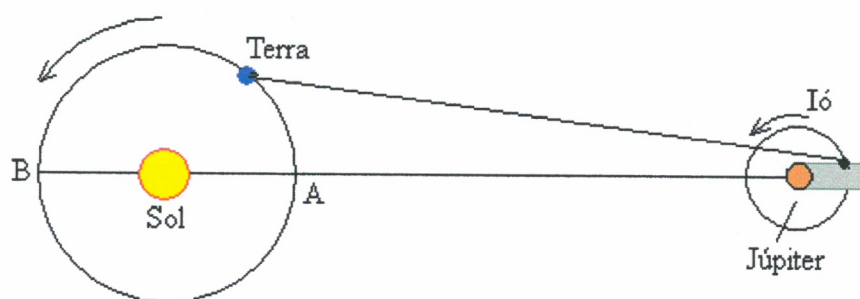


Fig. 4

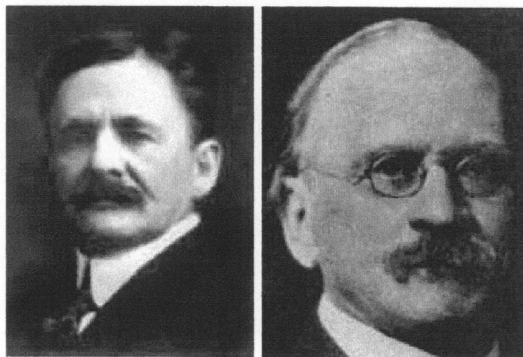
Roemer va deduir que aquesta diferència era deguda al temps que tardava la llum a arribar a la Terra. Va preveure quan s'havien de produir els eclipses en el cas que la Terra estigués més a prop de Júpiter i després va mesurar el retard quan la Terra estava més lluny. Llavors, sabent que el retard era de 996 s i que aquest s'havia de deure a l'augment de distància que havia de recórrer la llum, és a dir, el diàmetre de l'òrbita terrestre (299.000.000 Km), va calcular la velocitat de la llum, c , aplicant la fórmula següent:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{299000000000}{996} = 300200803 \text{ m/s} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Observacions posteriors van revelar que el retràs era exactament de 1.002 s i per tant la velocitat de la llum és de 298.403 Km/s. Aquesta velocitat de la llum és en el buit, ja que en l'univers hi ha el buit. Si la mesurem en l'aire o l'aigua varia. Com que en aquella època es creia en l'existència de l'èter i no creien possible que la llum es propagués en el buit, creien que la velocitat que van mesurar era respecte l'èter, o sigui, el sistema de referència absolut. Roemer, que també creia en l'existència de l'èter, va suggerir que calculant la diferència de la velocitat de la llum segons si es sumava o restava amb la de la Terra, es podia predir la velocitat de la Terra respecte l'èter, per tant, la velocitat absoluta de la Terra, que no depengués de cap sistema de referència. Predint això, Roemer es va anticipar més de 200 anys a l'experiment de Michelson i Morley que veurem a continuació.

2.4. L'experiment de Michelson i Morley

Albert A. Michelson i Edwart W. Morley eren dos físics americans. L'any 1887 van idear un experiment per a poder calcular la velocitat de la Terra respecte l'èter, el sistema de referència absolut. Per calcular-la, s'ajudarien de la velocitat de la llum, que és de 300.000 Km/s aproximadament. Sabent que la Terra gira a 30 Km/s respecte el Sol, segons el principi de relativitat de Galileu, si es mesurés la velocitat de la llum des de la Terra quan



aquesta gira en el mateix sentit que la llum, aquesta seria 60Km/s més petita que la mesurada quan la Terra gira en sentit contrari al de la llum (*Fig. 5*).

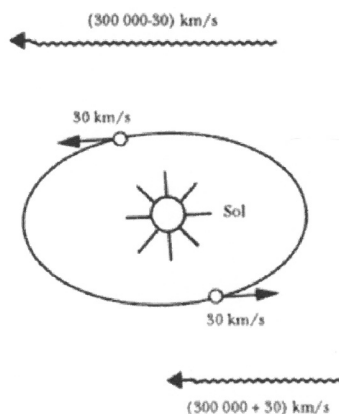


Fig. 5

Si la llum té una velocitat determinada respecte l'èter, aquesta ha de variar segons qui la mesuri. Per a realitzar aquest experiment, Michelson i Morley necessitaven un aparell d'una gran precisió ja que havia de detectar una diferència de només 60 Km/s dels 300.000 Km/s que té la llum en el buit. L'aparell que van fer servir s'anomena **interferòmetre** (*Fig. 6*).

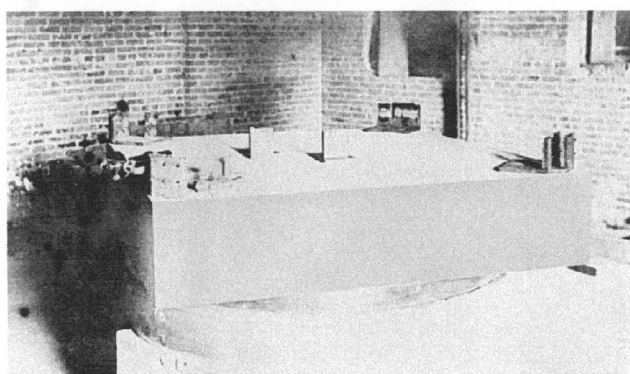


Fig. 6

Aquest aparell constava d'un mirall semitransparent que dividia la llum en dos feixos de llum que tenien direccions perpendiculars (*Fig. 7*). Després aquests feixos eren retornats al centre de l'aparell, gràcies a dos miralls, on s'unien de nou en un sol raig de llum. Al final, aquest raig era captat per un detector. Van realitzar aquesta experiència en diferents estacions de l'any i

volien detectar diferències en el feix de llum que captava el detector. Si la velocitat de la llum depenia de la velocitat de la Terra respecte l'èter, al tenir els dos feixos sentits diferents i al fer-ho en diversos moments de l'any, s'havien de detectar interferències diferents en els diversos moments de l'any.

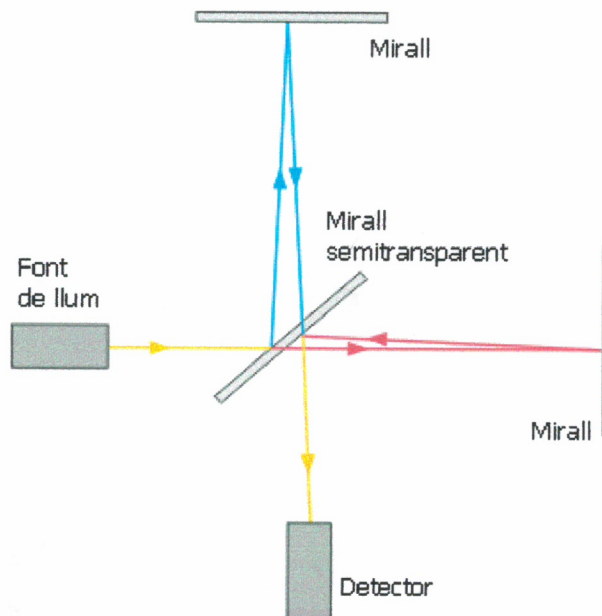
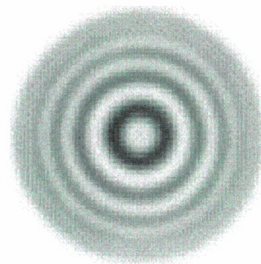


Fig. 7

Al analitzar els detectors d'interferències, Michelson i Morley pretenien determinar la velocitat de la Terra respecte de l'èter. Una **interferència**, referit a la mecànica ondulatoria, és una superposició de dues o més ones i queda marcada en un detector o patró d'interferències. El resultat és semblant a aquest:



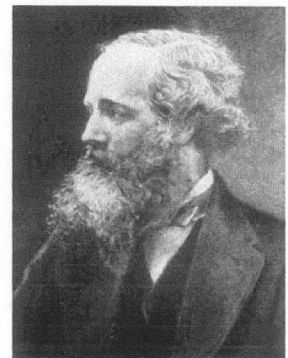
Sorprenentment i en contra de tot pronòstic, l'experiment, que es va dur a terme amb tota la cura i tenint en compte tots els factors, va donar un resultat negatiu. En tots els casos, els patrons d'interferències dels detectors eren iguals. No es detectaven canvis en les diferents mesures, la velocitat de la llum era la mateixa en tots els sentits. Durant alguns anys, aquest resultat negatiu

va ser una anomalia que no encaixava en cap teoria, fins i tot es va arribar a pensar que la Terra pogués moure l'èter amb ella, però finalment aquest resultat va ser la refutació definitiva de l'èter i, per tant, també de l'existència d'un sistema de referència absolut que estigués en repòs.

Aquest experiment demostra que la velocitat de la llum és una constant natural i que la mesuris com la mesuris sempre és la mateixa. Aquest fet és un dels fonaments de la Teoria de la Relativitat. Aquest experiment va ser un dels factors que va propiciar la revolució científica que va portar a acceptar la Teoria de la Relativitat com a nou paradigma.

2.5. L'electromagnetisme

James Clerk Maxwell va ser un físic del segle XIX que va elaborar el **model electromagnètic**. Maxwell va dir que el magnetisme i l'electricitat eren la mateixa cosa, els va unificar en un mateix concepte, l'electromagnetisme. Maxwell es va donar compte de que el camp magnètic estava format per càrregues elèctriques iguals a les del corrent elèctric. Les ones electromagnètiques, a diferència de les mecàniques com es pensava en un principi, són produïdes per l'oscil·lació o acceleració d'una càrrega elèctrica. Aquestes tenen components elèctrics i magnètics. La llum visible només és un tipus determinat d'ona electromagnètica, amb una longitud d'ona determinada, però hi ha un gran espectre de radiacions electromagnètiques. Maxwell va elaborar les denominades Equacions de Maxwell que recollien tot l'estudi sobre el magnetisme i l'electricitat fins llavors. Més endavant, aquestes equacions van ser modificades i generalitzades per Lorentz i després Pointcaré.



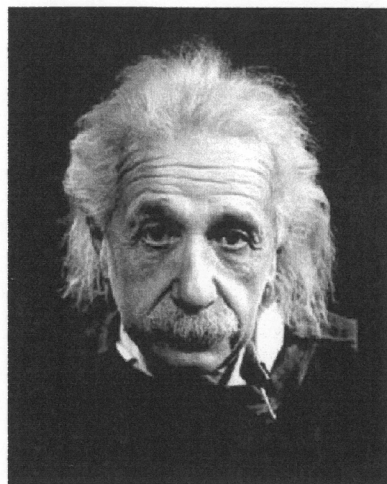
2.6. La naturalesa de la llum. El model actual

La qüestió de la naturalesa de la llum encara no la hem resolta. Al final, són ones o bé corpuscles ? Doncs bé, la veritat és que ni són ones ni corpuscles, són les dues coses a la vegada. De vegades la llum es comporta de forma corpuscular i de vegades com a ona. Es diu que té una dualitat ona-corpuscle. D'entrada costa de creure que pugui ser dues coses tan diferents a la vegada. El problema rau en el nostre concepte de corpuscle i ona, per nosaltres són dos conceptes que contraposen però en realitat són compatibles, els conceptes d'ona i partícula són models elaborats per nosaltres però la natura no sempre s'adapta als nostres models.

En conclusió, la naturalesa de la llum és força complexa, es pot comportar com a corpuscles o com a ones depenent de la situació. L'èter queda refutat com a medi i com a sistema de referència absolut. La llum té una velocitat constant de 300.000 Km/s en el buit i és una constant natural ja que no depèn de qui la mesuri ni com la mesuri. Més endavant veurem que aquesta constant exerceix de límit natural.

3. Relativitat Especial

La Teoria de la Relativitat Especial (TRE), o també anomenada Teoria de la Relativitat Restringida, va ser publicada l'any 1905 per **Albert Einstein** en un article a la revista de física: "*Annalen der Physik*". L'article es titulava "*Sobre l'electrodinàmica de cossos en moviment*". Aquesta teoria explica el moviment dels cossos però sense tenir en compte les forces de la gravetat. Més endavant Einstein va generalitzar la seva teoria incloent els efectes de la gravetat i les forces d'atracció entre planetes en la seva Teoria de la Relativitat General. En la TRE descriu com varien l'espai i el temps en sistemes de referència que es moguin a velocitats properes a la de la llum. Einstein tracta l'espai i el temps com un continu de quatre dimensions: l'espai-temps. La TRE es basa en dos postulats fonamentals:



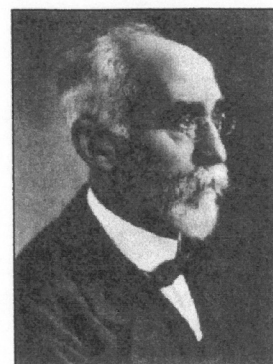
1. Les lleis físiques són iguals en tots els sistemes de referència (Principi de Relativitat de Galileu).
2. La velocitat de la llum en el buit és constant, és a dir, independent del sistema de referència en el que es mesuri.

Aquests dos postulats en part eren contradictoris ja que la llum és una excepció del principi de relativitat, és l'única que és igual en tots els sistemes de referència, sempre té una velocitat constant, es miri des d'on es miri. Einstein va aconseguir unir aquests dos postulats en la seva teoria i com a conseqüència, també va haver de redefinir el concepte de simultaneïtat. El primer postulat és el Principi de Relativitat de Galileu però Einstein no es limita a aplicar-lo només a la mecànica, sinó que l'aplica a tots els camps de la física, com ara la termodinàmica, l'electromagnetisme,... és a dir, té com a objectiu unificar tota la física. Aquest postulat també es pot anunciar dient: un SR no pot ser afavorit respecte d'un altre mitjançant cap experiència. El segon postulat el va deduir Einstein a partir d'acceptar els resultats de l'experiment de Michelson i Morley. Com a conseqüència d'acceptar aquest postulat, va haver de modificar tota la física anterior.

Abans de que Einstein formulés la seva teoria, els físics creien que les lleis de Newton podien explicar tots els fenòmens físics



aplicant el Principi de Relativitat de Galileu quan es tractava de diferents sistemes de referència. Però quan van estudiar les equacions de Maxwell, les que expliquen els fenòmens electromagnètics, es van adonar de



que no es podien aplicar en sistemes de referència diferents que es moguessin a gran velocitat. La percepció dels fenòmens electromagnètics pot diferir en persones que estiguin movent-se a velocitats pròximes a la de la llum. Llavors **Hendrik. A. Lorentz** (fotografia de la dreta), un físic holandès de finals del segle XIX, es va dedicar a estudiar com s'haurien de modificar aquestes equacions per a poder-les aplicar a qualsevol sistema de referència. Les transformacions de Lorentz van ser utilitzades després per Einstein per calcular espais i temps quan intervenien els fenòmens de la relativitat. Einstein va comprovar que a grans velocitats, les transformacions de Galileu no servien, sinó que s'havien d'aplicar les transformacions de Lorentz. **Henri Poincaré** (fotografia de l'esquerra), matemàtic francès de finals del segle XVIII – principis del XIX, també va contribuir amb varies de les seves idees en la TRE. Va ser el 1898 quan Poincaré ja va dir que la simultaneïtat era relativa. També va estudiar els espais i temps relatius i va contribuir a estudiar com modificar les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme com Lorentz. Lorentz i Poincaré es consideren originadors de la Teoria de la Relativitat ja que van aportar una bona part dels coneixements de la TRE que després Einstein va unificar i ampliar. Tot i que les fórmules de la TRE ja les havia descobert Lorentz abans que Einstein, els camins que els van portar a les fórmules van ser molt diferents. Lorentz buscava unes fórmules per a justificar l'experiment de Michelson i Morley i reconciliar-lo amb la teoria de l'èter, mentre que Einstein estava convençut de que no existia cap èter i va utilitzar les fórmules per a crear una base matemàtica per a una nova teoria que modifiqués tota la física, els seus objectius eren completament diferents.

La Teoria de la Relativitat va ser una teoria revolucionaria ja que va modificar tota la física, va canviar la manera d'entendre l'espai, el temps, la massa, l'energia, etc. Per aquest motiu, en un principi no va gaudir d'una gran acceptació. Aquesta teoria va provocar una revolució científica, que va dividir la comunitat científica fins que al final, la Teoria de la Relativitat es va establir com a nou paradigma. Avui en dia, la Teoria de la Relativitat és tan

acceptada per la comunitat científica com la mecànica clàssica de Newton o l'electromagnetisme de Maxwell.

3.1. Espai i temps

Des de sempre s'han considerat l'espai i el temps per separat. **Herman Minkowski**, físic rus de finals del segle XIX, va unir les tres dimensions espacials amb una dimensió temporal conformant així el continu espai i temps de quatre dimensions. Cada punt de l'espai i temps és un **success** (o esdeveniment) i es caracteritza per quatre números: tres que n'indiquen la posició i el quart que determina el moment en que succeeix (x, y, z, t). Minkowski va estudiar les propietats geomètriques de l'espai i temps i fins i tot va permetre calcular la distància entre dos successos, o interval espai i temps. L'**interval espai i temps** (s) entre un esdeveniment origen E_0 de coordenades $(0, 0, 0, 0)$ i un esdeveniment E_1 de coordenades (x, y, z, t) és una quantitat que es pot calcular utilitzant la següent fórmula:



$$s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Com veurem més endavant, per estudiar la relativitat especial s'utilitzen moviments rectilinis al llarg de l'eix de les x per tal de simplificar-ne l'estudi dels efectes que es produeixen, per tant la fórmula anterior per a moviments rectilinis on y i z són zero queda de la següent manera:

$$s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2$$

La Teoria de la Relativitat postula que l'espai i el temps són diferents per a observadors que es moguin a velocitat altes, però quan estudiem les situacions utilitzant l'espai i temps, es pot demostrar que els intervals espai i temps són invariants, tenen el mateix valor sigui quin sigui l'observador que estudiï el success.

$$s^2 = s'^2$$

En l'espai i temps s'utilitza la geometria no euclidiana, que com hem dit abans fonamenta matemàticament aquesta teoria. La Teoria de la Relativitat utilitza l'espai i temps en comptes de l'espai tridimensional, tot i que en la Relativitat Especial, per explicar les paradoxes distingirem espai i temps com fins ara.

3.2. Espai Relatiu

L'espai és relatiu al sistema de referència que utilitzem per a mesurar-lo. Per exemple, dues persones que viatgin assentades en un tren diran que no s'han mogut, que durant tot el viatge han estat en la mateixa posició però per a la gent que estava a l'andana, aquestes dues persones s'hauran estat movent durant tot el viatge, juntament amb el tren. Si els dos passatgers van a donar una volta pel tren, quan tornen, ells entenen que s'asseuen en el mateix lloc que estaven abans, però per als de fora del tren, ja no és el mateix lloc ja que el tren haurà recorregut un espai i no serà la mateixa posició. Es corrobora que dos fets que succeeixin en un mateix lloc per a un sistema de referència poden succeir en diferents llocs en un altre sistema de referència.

3.3. Temps Relatiu

El temps absolut de Newton va quedar relegat a uns casos particulars mentre que per a successos que ocorrien en dos sistemes de referència que es movien a velocitat constant i propera a la de la llum l'un de l'altre, es va establir el fenomen del temps relatiu descrit per Einstein. La TRE demostra que el temps no passa igual per a tothom, depenent del sistema de referència, el temps passa més ràpid o més lent. Una conseqüència d'aquest fet és que la simultaneïtat ja no té sentit.

La **simultaneïtat**, és a dir, que dos esdeveniments succeeixin al mateix instant, perd el seu sentit en el moment que el temps es considera relatiu ja que dos esdeveniments simultanis per a una persona situada en un sistema de referència pot ser que no ho siguin per a una altra persona situada en un altra sistema de referència que es mogui respecte el primer. Einstein deia “*Hem de tenir en compte que totes les afirmacions que fem en relació al temps són sempre afirmacions sobre successos simultanis*”. Per exemple, quan diem que un tren arribarà a les cinc, en realitat volem dir que l'arribada del tren coincidirà amb el fet que l'agulla llarga del rellotge marcarà el dotze i la curta el cinc. L'arribada del tren i la posició de les agulles marcant les cinc són dos successos simultanis.

Per aclarir una mica tot això vegem una paradoxa que serveix d'exemple. Imaginem un tren de 3.000.000 Km de longitud que es mou a una velocitat de 200.000 Km/s.

Col·loquem una bombeta al mig del tren i a les portes de davant i darrere hi posem uns sensors de la llum de manera que quan els arribi la llum s'obrin les portes. Hem de distingir dos sistemes de referència: el tren, amb els passatgers com a observadors i l'andana on hi ha altres observadors. Aquests sistemes de referència es mouen a una velocitat de 200.000 Km/s (velocitat del tren) l'un de l'altre. Quan encenem la bombeta, els passatgers veuen que les portes dels extrems del tren s'obren simultàniament al cap de 10 segons:

$$\Delta t = \text{llargada de mig tren} / c = 1.500.000 / 300.000 = 5 \text{ s}$$

Podríem pensar que això no és així a causa del moviment del tren, però com hem vist abans, el Principi de Relativitat de Galileu diu que un experiment és igual fer-lo a terra, en repòs, que en un sistema de referència que es mogui a velocitat constant (MRU). Per tant, els passatgers del tren veuen que les portes s'obren alhora (*Fig. 8.1*).

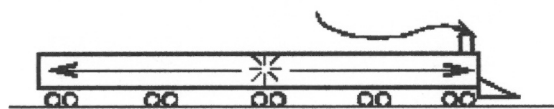


Fig. 8.1

La gent que està a la andana veu la situació una mica diferent. Per a ells, la porta de darrera del tren s'apropa a la llum a 200.000 Km/s i la porta de davant se n'allunya a 200.000 Km/s. La velocitat de la llum és constant en tots els sistemes de referència. Per tant, la gent que està a terra veurà que la porta de darrera del tren s'obre abans ja que la porta va en busca de la llum i aquesta ha de recórrer menys espai; en canvi, la porta de davant s'allunya del raig de llum, aquest ha de recórrer més espai i la porta s'obre després (*Fig. 8.2*).

Porta de darrera del tren:

$$\Delta t_1 = \text{llargada de mig tren} / (c + \text{velocitat tren}) = 1.500.000 / (300.000 + 200.000) = 3 \text{ s}$$

Porta de davant del tren:

$$\Delta t_2 = \text{llargada de mig tren} / (c - \text{velocitat tren}) = 1.500.000 / (300.000 - 200.000) = 15 \text{ s}$$

Les persones de l'andana veuran que la porta de davant del tren s'obre 12 s després que la de darrera. Aquest experiment demostra que ja no té sentit parlar de simultaneïtat en el temps relatiu ja que el moment en que succeeixen els fets depèn del sistema de referència del qual es miri i el que és simultani per a un, pot no ser-ho per un altre, la simultaneïtat és relativa.

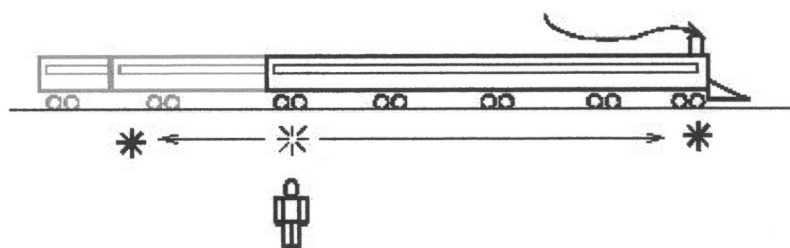


Fig. 8.2

3.4. Transformacions de Lorentz

Les transformacions de Galileu s'utilitzaven per a calcular la posició en un sistema de referència inercial. En la Teoria de la Relativitat, però, aquestes queden invalidades per a casos en que la velocitat sigui molt gran ja que succeeixen uns fenòmens relativistes. En la nostra vida quotidiana, com que les velocitats a les que estem acostumats són molt petites en comparació a la velocitat de la llum, no podem apreciar aquestes variacions ja que són molt petites. Per mesurar aquests canvis en l'espai i el transcurs del temps, s'utilitzen les transformacions de Lorentz. Com ja hem dit abans, Lorentz era un físic que estudiava com variaven les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme segons el sistema de referència utilitzat. Es va adonar de que les transformacions de Galileu no eren vàlides i va crear el **Factor de Lorentz** per a modificar-les:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El factor de Lorentz es simbolitza amb la lletra grega gamma: γ . El valor del factor de Lorentz sempre és un número més gran o igual que 1 i només $\gamma = 1$ si $v = 0$. Quan la velocitat tendeix a 0, γ tendeix a 1, mentre que quan tendeix a c , γ tendeix a l'infinit.

Lorentz estava motivat pels resultats negatius de l'experiment de Michelson i Morley i va suggerir una teoria en que els objectes a causa del seu moviment per l'èter podrien sofrir una disminució en la seva longitud i el transcurs del temps podria variar. Va ser el primer que va suggerir la **contracció de l'espai** i la **dilatació del temps**, tot i que estava equivocat en quant a l'existència de l'èter.

Les transformacions de Lorentz s'utilitzen per a calcular la posició x' i el temps t' en un sistema de referència S' que es mogui amb moviment rectilini uniforme a velocitat v respecte un altre sistema de referència S que estigui en repòs (Fig. 3) a partir de les magnituds x i t que mesura l'observador de S del sistema S' . Per a simplificar estudiem moviments rectilinis, al llarg de l'eix de les x , perquè les variables y i z siguin **constants**. Només queden les **variables** x i t .

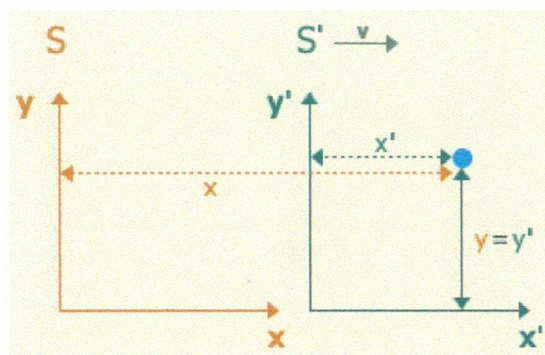


Fig. 3

El que es calcula és la posició i el temps en S' a partir del que mesura un observador situat en S ja que el temps, la posició i la longitud no sofreixen cap canvi per a l'observador que està en S' , veu les longituds iguals i pot calcular la posició dins el seu sistema de referència simplement amb les transformacions de Galileu i el seu temps transcorre normal per a ell.

Per a calcular les variables que mesurarà l'observador situat en S quan observi un succés a S' (a partir de les variables mesurades a S' (en repòs), calcular les que es mesuraran des de S), les **transformacions de Galileu** són:

$$x = x' - v \cdot t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

Mentre que aplicant les **transformacions de Lorentz**:

$$x = \gamma (x' + v \cdot t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma (t' + x' \cdot v / c^2)$$

D'altra banda, aquestes transformacions es poden invertir per a dur a terme el procés invers, és a dir, a partir de les variables que mesurem a S, calcular les que es mesuraran a S' en repòs. Per a calcular-les el que fem és substituir la v per $-v$ ja que per a l'observador de S', el sistema de referència S s'allunya d'ell en sentit contrari a velocitat v . Aquestes noves transformacions s'anomenen **transformacions de Lorentz inverses**:

$$x' = \gamma (x - v \cdot t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma (t - x \cdot v / c^2)$$

Tot seguit veurem un exemple per comparar el tractament d'una situació amb utilitzant unes transformacions o les altres. Imaginem dos sistemes S i S' que es mouen a velocitat constant l'un de l'altre. Situem un emissor en l'origen de coordenades i un detector a la posició d'un metre en el sentit positiu de l'eix de les x del sistema S. Segons l'observador que hi ha a S, el raig de llum arriba al detector al cap de $10/3$ ns ($t = 1\text{m}/c$). Ara fixem-nos en l'observador de l'altre SR, suposem que S' es distancia de S a una $v = 1/3 c = 1/10 \text{ m/ns}$. Estudiarem la situació primer utilitzant les transformacions de Galileu i després les de Lorentz. Segons les de Galileu, per l'observador de S' el raig arriba al detector en la posició:

$$x' = x - vt = 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}$$

Com que el sistema S' s'ha estat movent i la posició inicial de sortida era 0 per els dos sistemes, per a S' que portava una certa velocitat, la velocitat de la llum ha sigut menor, comprovem-ho:

$$u' = \frac{\frac{2}{3} \text{ m}}{\frac{10}{3} \text{ ns}} = \frac{2}{3} c$$

En canvi, ara analitzem la situació aplicant les transformacions de Lorentz. Primer calculem el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Ara calculem el la posició x' que correspon a $x = 1$ i també el temps t' que correspon a $t = 10/3$ ns:

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

$$t' = \gamma \left(t - x \frac{v}{c^2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{10}{3} - 1 \frac{c/3}{c^2} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{3} ns$$

Una vegada tenim x' i t' , trobem u' , que en aquest cas sí que es correspon amb c , ja que les transformacions de Lorentz són la conseqüència de considerar que c és constant per a tots els SR.

$$u' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{10} ns = c$$

3.4.1. Deducció del Factor de Lorentz

El Factor de Lorentz es pot deduir i demostrar fàcilment. Per a fer això utilitzarem un experiment imaginari. Imaginem un coet que viatja per l'espai a una velocitat v . Dins aquest coet situem dos miralls oposats, un al terra i un altre al sostre, i emetem un raig de llum de forma que rebot d'un mirall a l'altre de forma indefinida (*Fig. 9.1*). A bord del coet hi situem un observador i en situem un altre a la Terra, en repòs relatiu respecte el coet.

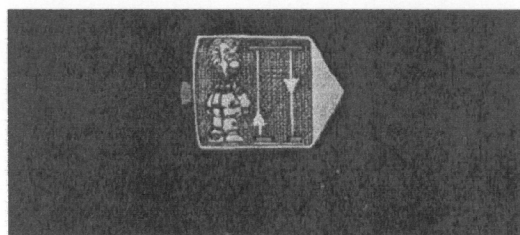


Fig. 9.1

L'observador del coet veu que el raig rebot d'un mirall a l'altre a la velocitat c en una trajectòria vertical. En canvi, l'observador situat a la Terra veu que la trajectòria del raig de llum és obliqua a causa de que el coet es mou (*Fig. 9.2*).

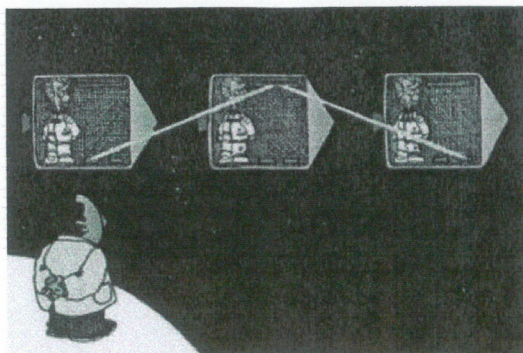


Fig. 9.2

Podem establir un símil entre el raig de llum que rebota entre els dos miralls i un rellotge ja que els períodes de temps marcats per cada rebot del raig de llum són constants, igual que els segons mesurats per un rellotge. Al temps entre un rebot i l'altre mesurat per l'observador de la nau l'anomenarem Δt_{Coet} mentre que al temps entre els dos rebots mesurat per l'observador situat a la terra l'anomenarem Δt_{Terra} . Recordem que $\Delta x = v \cdot \Delta t$, sent Δx la distància, v la velocitat i t el temps transcorregut. A partir d'això, podem deduir el Factor de Lorentz utilitzant el Teorema de Pitàgores. Segons aquest, $h^2 = c_1^2 + c_2^2$. Considerem el triangle rectangle format per la trajectòria vertical d'un rebot observat per l'observador de la nau, la trajectòria obliqua d'un rebot observat per l'observador de la Terra i la distància horitzontal que recorre la nau en aquell temps. (Fig. 9.3)

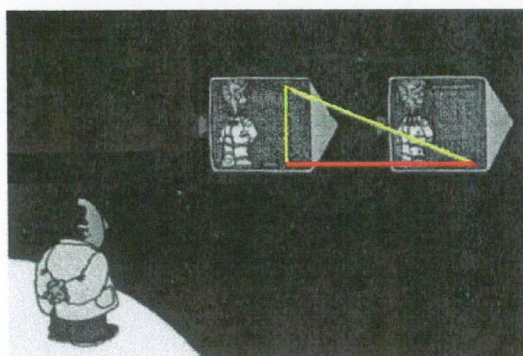


Fig. 9.3

Llavors substituïm les tres distàncies (Δx) pel seu equivalent expressat en forma de " $v \cdot t$ " i apliquem el Teorema de Pitàgores. El càlcul és el següent:

$$(c \cdot \Delta t_{\text{Terra}})^2 = (c \cdot \Delta t_{\text{Coet}})^2 + (v \cdot \Delta t_{\text{Terra}})^2$$

Després aïllem " $(c \cdot \Delta t_{\text{Coet}})^2$ ":

$$(c \cdot \Delta t_{\text{Coet}})^2 = (c \cdot \Delta t_{\text{Terra}})^2 - (v \cdot \Delta t_{\text{Terra}})^2$$

Ara dividim cada terme per c^2 i ens queda:

$$\Delta t_{\text{Coet}}^2 = \Delta t_{\text{Terra}}^2 - (v^2/c^2) \cdot \Delta t_{\text{Terra}}^2 = (1 - v^2/c^2) \cdot \Delta t_{\text{Terra}}^2$$

Després apliquem arrels quadrades a les dues bandes de l'expressió, resultant:

$$\Delta t_{\text{Coet}} = \Delta t_{\text{Terra}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t_{\text{Terra}} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Aquesta és l'expressió per a calcular la dilatació del temps, però normalment s'expressa aïllant t_{Terra} :

$$\Delta t_{\text{Terra}} = \frac{\Delta t_{\text{Coet}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{ó} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Si observem la relació entre el temps mesurat a la Terra i el temps mesurat al coet veurem que el resultat no és res més que el Factor de Lorentz.

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Aquest factor apareix en la Teoria de la Relativitat com a conseqüència d'haver considerat que la velocitat de la llum és constant. Einstein va acceptar que la velocitat de la llum era constant (com havia demostrat l'experiment de Michelson i Morley) i va intentar reconciliar-lo amb el Principi de Relativitat de Galileu. Acceptant aquests dos postulats va desenvolupar tota una nova teoria i va veure que a causa d'això es produïa una modificació en diverses magnituds com l'espai o el temps quan eren observades des d'altres sistemes de referència en moviment. Aquestes transformacions responien a les transformacions a les quals ja havia arribat Lorentz abans, però amb un altre propòsit: Lorentz volia justificar l'existència de l'èter, mentre que Einstein sabia que l'experiment de Michelson i Morley no estava equivocat i que s'havia de modificar tota la física amb una altra teoria: la Teoria de la Relativitat.

3.4.2. Dilatació del temps

En la TRE, el temps mesurat des d'un sistema de referència S' que es mogui respecte una altre, S , transcorre diferent. L'instant t mesurat des del sistema de referència S , correspon a l'instant t' mesurat des de S' .

La relació és la següent:

$$t = \frac{t' + x' \left(\frac{v}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}$$

El terme $x'(v / c^2)$ apareix com a conseqüència d'aplicar la transformació de Lorentz a l'espai. D'aquesta relació entre els instants d'un sistema S' mesurats des de S i S' se n'extreu la fórmula per a comparar diferents períodes de temps segons el SR. Si comparem els intervals de temps veurem que es produeix una dilatació temporal, el temps transcorregut entre dos successos difereix depenent del sistema de referència utilitzat segons el factor de Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es diu que quan un sistema de referència es mou a gran velocitat respecte un altre es produeix una dilatació del temps, és a dir, el temps passa més lentament. Per exemple, si existís una nau que viatgés a una velocitat de $0.95c$ (95% de la velocitat de la llum), en cada dia mesurat a la nau espacial transcorrien 3 dies 4 hores 51 minuts i 41 segons a la Terra. El temps es dilata, tarda més en passar. Això es pot calcular amb la fórmula $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$. $\Delta t'$ indica un període de temps transcorregut a S' mesurat en repòs, des del mateix sistema de referència S' i Δt és el temps que mesura un observador situat a S' , pel qual S està en moviment respecte ell. És a dir, en l'exemple d'abans, $\Delta t' = 1$ dia (86.400 s) i $\Delta t = 3$ dies, 4 h, 51 min, 41 s (276701,5 s aprox.).

Per a poder entendre la resta del treball, és molt important assimilar com funcionen les transformacions, en especial la dilatació del temps. En la taula següent es poden veure els efectes de la dilatació del temps segons la velocitat. El “temps transcorregut” és el temps que tarden en transcórrer 60 s en el sistema de referència en moviment mesurat des del SR en repòs. O sigui, 60 s en el SR en moviment corresponen a X s del SR en repòs. Per exemple, en el cas de la nau imaginària que viatja a $0.8c$, en la nau transcorren 60 s mentre que en el sistema en repòs en transcorren 100 s, pels observadors del repòs, el temps a la nau passa més lentament.

Sistema de referència	Velocitat	Temps transcorregut	Error relatiu
Repòs	0 Km/h	60 s	0 %
Persona caminant	6 Km/h	60,000000000000009259 s	$1,54 \cdot 10^{-14}$ %
Persona corrent	40 Km/h	60,0000000000000411523 s	$6,89 \cdot 10^{-14}$ %
Cotxe	120 Km/h	60,0000000000003703704 s	$6,17 \cdot 10^{-13}$ %
Avió de passatgers	900 Km/h	60,0000000000208333333 s	$3,47 \cdot 10^{-11}$ %
La Terra	105.000 Km/h	60,0000002835648168250 s	$4,73 \cdot 10^{-7}$ %
Coet	250.000 Km/h	60,0000016075103526681 s	$2,68 \cdot 10^{-6}$ %
Nau imaginària	0'8c Km/s	100 s	66,666667 %
Nau imaginària	0'999c Km/s	1341,97632252775330263 s	2136,627 %

En un viatge per l'espai, si poguéssim observar la nau a través d'una càmera des de la Terra, ho veuríem a càmera lenta, ja que el temps allí tarda més en transcórrer, tot i que la persona que estigués a la nau no notaria cap diferència. Això es deu a que al relentitzar-se tot, els seus processos cerebrals i els seus pensaments també serien més lents. Al mirar al seu voltant amb un cervell lent, no s'adonaria que tot succeeix a càmera lenta, ho veuria tot normal. De la mateixa manera, aquesta persona ens veuria a càmera ràpida ja que aquí passa més temps que allí. Aquest cas succeeix en la paradoxa dels germans bessons que veurem més endavant.

Si portem el factor de Lorentz a les últimes conseqüències i fem que $v = c$, llavors $\gamma = 1 / 0$ i $\Delta t = \Delta t' / 0 = \infty$. Per tant, l'observador de S mesuraria un temps infinit, és a dir, una minúscula fracció de segon del sistema S' se li faria infinita, per tant, per a ell el temps s'hauria aturat a S'. Si encara exagerem més i suposem que v pugui ser més gran que c , la teoria diu que per a l'observador de S, el temps transcorreria a l'inrevés en S', en S' es viatjaria al passat, et retrocediria en el temps. Això ho ampliarem més en l'apartat 3.9 (els viatges en el temps). Pel que sabem avui en dia, no hi pot haver velocitats majors o iguals que c ($v < c$).

3.4.3. Contracció de l'espai

En la TRE, la posició final d'un cos que tingui un moviment rectilini ja no és igual a posició inicial més velocitat pel temps transcorregut, sinó que ara és:

$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En la taula següent es poden veure les diferències en la posició segons si la calculem amb la clàssica transformació de Galileu i si la calculem amb la transformació de Lorentz. Els següents cossos han estat en moviment **1 h** a les velocitats que s'especifiquen i després s'ha calculat la posició respecte el punt de partida, x_0 .

Sistema de referència	Velocitat	Posició Tran. Galileu	Posició Trans. Lorentz	Error relatiu
Repòs	0 Km/h	0 m	0 m	0 %
Persona caminant	6 Km/h	6.000 m	6.000,0000000000 m	$1,5 \cdot 10^{-15} \%$
Persona corrent	40 Km/h	40.000 m	40.000,0000000000 m	$6,86 \cdot 10^{-14} \%$
Cotxe	120 Km/h	120.000 m	120.000,0000000000 m	$3,17 \cdot 10^{-13} \%$
Avió	900 Km/h	900.000 m	900.000,000000031 m	$3,4 \cdot 10^{-11} \%$
La Terra	105.000 Km/h	$105 \cdot 10^6$ m	105.000.000,49624 m	$4,7 \cdot 10^{-7} \%$
Coet	250.000 Km/h	$250 \cdot 10^6$ m	250.000.006,69796 m	$2,7 \cdot 10^{-6} \%$
Nau imaginària	$0,8c$ Km/s	$864 \cdot 10^9$ m	$1.440 \cdot 10^9$ m	66,66 %
Nau imaginària	$0,999c$ Km/s	$1.079 \cdot 10^9$ m	$24.133 \cdot 10^9$ m	2.136,6 %

Un efecte d'aquesta distorsió en l'espai és la **contracció de l'espai**. Quan un cos viatja a gran velocitat, aquest es contrau en la direcció del moviment, o sigui, s'escurça. Aquest efecte és l'anomenat contracció de l'espai i s'aplica a cossos en moviment els quals veuen disminuïda la seva longitud. La contracció de l'espai és l'efecte contrari de la dilatació del temps. Entre dos sistemes de referència en moviment, quan per un esdevé un dilatació del temps, l'altre interpreta una contracció de l'espai.

Quan un sistema de referència S' s'allunya d'un altre S a velocitat v , el sistema S també s'allunya del S' a la mateixa velocitat v . La velocitat és l'únic que comparteixen dos sistemes de referència en moviment ja que l'espai i el temps els perceben de manera diferent. Per l'observador que està a S l'espai que recorre S' no pot haver variat ja que ell el veu sempre igual, d'aquí dedueix que el que ha succeït és una dilatació temporal. En canvi, per a l'observador situat a S' , el temps no pot variar ja que ell el percep com sempre, no nota cap diferència i, per tant, dedueix que l'espai que ha recorregut era menor, que l'espai s'ha contret. Això es veu més clar analitzant les fórmules:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Per tant, $\Delta x' = \Delta x \cdot (\Delta t / \Delta t')$ que desenvolupant i simplificant queda:

$$\Delta x' = \Delta x \frac{\Delta t'}{\Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta x \frac{\Delta t'}{\Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Quan la contracció de l'espai s'aplica a cossos i no a distàncies, es fa servir el terme longitud, és a dir, L i L' . La relació entre les longituds torna a ser el factor de Lorentz:

$$\frac{L'}{L} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Llavors, la longitud disminueix segons el factor de Lorentz: $L' = L / \gamma$ on L' és la longitud de l'objecte mesurada des de S' (en repòs) i L és la longitud de l'objecte mesurada des de S (en moviment). La fórmula desenvolupada és la que hem deduït abans:

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En la següent taula es mostra com es veurà afectada la longitud del cos tot comparant l'estat de repòs i movent-se a una alta velocitat. Fixem una mida per l'objecte en repòs (10m) i mirem com varia quan viatja a les velocitats següents:

Sistema de referència	Velocitat	Longitud	Error relatiu
Repòs	0 Km/h	10 m	0 %
Persona caminant	6 Km/h	9,9999999999999984567 m	$1,5433 \cdot 10^{-15} \%$
Persona corrent	40 Km/h	9,99999999999999314128 m	$6,85872 \cdot 10^{-14} \%$
Cotxe	120 Km/h	9,999999999999993827160 m	$6,17284 \cdot 10^{-13} \%$
Avió de passatgers	900 Km/h	9,99999999999999652777777 m	$3,47222 \cdot 10^{-11} \%$
La Terra	105.000 Km/h	9,99999995273919741918 m	$4,72608 \cdot 10^{-7} \%$
Coet	250.000 Km/h	9,99999973208161506667 m	$2,67918 \cdot 10^{-6} \%$
Nau imaginària	0'8c Km/s	6 m	40 %
Nau imaginària	0'999c Km/s	0,44710177812216314199 m	95,528982 %

S'ha de distingir entre l'efecte de la contracció de l'espai i l'efecte òptic d'un cos en moviment. És a dir, en la vida normal, quan veiem un objecte que es mou ràpid, es produeix un efecte òptic ja que el que veiem no és la imatge actual de l'objecte, sinó la llum que ens arriba d'ell i com que la llum no es propaga instantàniament veiem la llum que ens arriba de diferents parts de l'objecte. Però aquest efecte òptic no té res a veure amb la contracció relativista de la longitud de l'objecte, que no és una il·lusió, sinó que l'objecte es fa realment més curt.

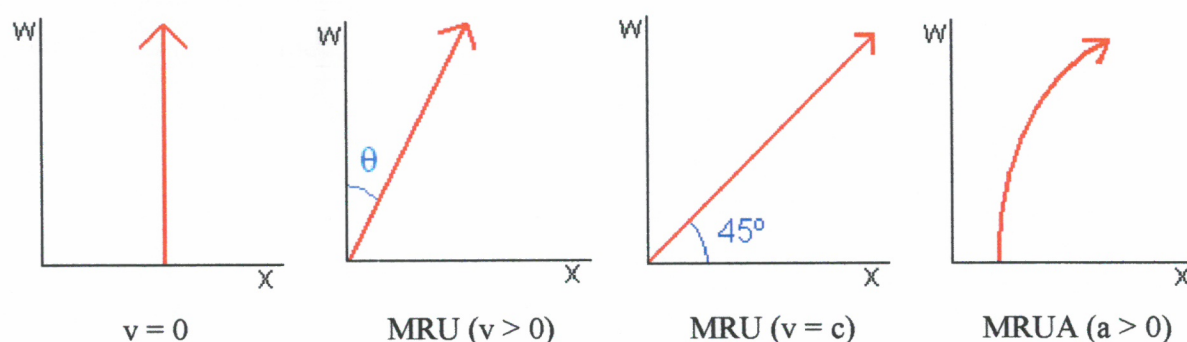
Una persona que estigués viatjant en una nau a gran velocitat que sofrís l'efecte de la contracció de l'espai no notaria absolutament res. Tot i que es contragués fins a ser més prim que un full de paper no ho notaria ja que la seva retina també es contrauria i per tant, les imatges que veu ocuparien la mateixa fracció a la seva retina i ho continuaria veient tot normal.

3.4.4. Els diagrames espai-temps

Els diagrames espai-temps són una eina molt útil per a estudiar els fenòmens de la relativitat especial d'una forma gràfica. Són uns gràfics on es pot veure com es relacionen el temps i l'espai en l'espai-temps tetradimensional de Minkowski. Estudiar un sistema de quatre dimensions és molt complex, per això, tal com fèiem en les transformacions de Lorentz,

estudiarem moviments rectilinis, on les components y i z són constants. Llavors només quedem dues dimensions variables, x i t .

En l'eix horitzontal hi situem l'espai (x) en metres. A l'eix vertical hi situem el temps, però en unes unitats una mica especials. Expressarem el temps com un quocient entre l'espai i la velocitat de la llum, a aquesta nova variable l'anomenarem w . Una unitat de l'eix vertical serà igual a una unitat de l'eix horitzontal, és a dir, si l'espai està en metres, cada unitat del l'eix temporal serà igual a 1 m/c ($3,33 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, $3,33 \text{ ns}$), l'interval de temps que es tarda a recorre 1 m a la velocitat de la llum. En els diagrames espai-temps un esdeveniment (o succés), E_1 , es representa per les coordenades (x_1, w_1) . La trajectòria es defineix com el conjunt de successos d'un cos, les respectives posicions en els diferents instants temporals. La línia contínua que dibuixa la trajectòria del cos s'anomena **línia de món**. La línia de món d'una partícula de llum que es mou a $v = c$ forma la bisectriu del primer quadrant dels diagrames espai-temps. Al igual que en els diagrames x - t normals, si es tracta d'un MRU, la seva línia de món serà una recta, en canvi, si és un MRUA, llavors serà parabòlica. Vegem alguns exemples de diagrames espai-temps:



Una propietat que tenen aquests diagrames és que la tangent de l'angle que formen la tangent en un punt i la vertical (angle que es simbolitza per la lletra grega theta: θ) és igual al quocient de la velocitat en aquell instant dividit per c . Com que sempre es compleix que $v < c$, també es compleix que sempre $\theta < 45^\circ$. Aquest quocient de la velocitat en funció de c es sol simbolitzar per la lletra grega beta: β . És a dir:

$$\operatorname{tg} \theta = \beta = \frac{v}{c}$$

El que realment ens importa a nosaltres d'aquests diagrames és utilitzar-los per a comparar dos sistemes de referència inercials: S i S' . Per a fer això utilitzarem un diagrama que presenta quatre eixos: els dos habituals i dos més que són w' i x' . Per a dibuixar aquests eixos es parteix de les equacions de les transformacions de Lorentz inverses de t' i x' que ja hem vist abans, només que ara en comptes de t modifiquem l'equació perquè la variable sigui w . Com que $t = w / c$, substituïm t per w / c i arreglem les equacions. Les equacions resultants són:

$$x' = \gamma (x - \beta \cdot w)$$

$$w' = \gamma (w - \beta \cdot x)$$

Ara, sabent que els esdeveniments situats en l'eix w' seran aquells que tinguin $x' = 0$, és a dir, que vistos des del sistema de referència S no variïn la seva posició al transcórrer el temps, substituïm x' per 0 en la primera equació de manera que:

$$0 = \gamma (x - \beta \cdot w)$$

Com ja sabem, per a que un producte sigui igual a 0 un dels seus factors ha de ser igual a 0, i γ no pot ser mai 0 ja que la velocitat no serà mai igual a c , llavors en queda que:

$$0 = x - \beta \cdot w$$

Ara reordenem l'equació per a que tingui la forma de l'equació d'una recta ($y = mx + b$) i trobem l'equació de l'eix w' :

$$w = \frac{1}{\beta} x$$

Aquesta és l'equació d'una recta on el pendent és $1 / \beta$, o el que és el mateix, $m = c / v$. El procés per a trobar l'eix x' és similar, la diferència és que ara els punts situats sobre l'eix x' tenen de segona coordenada $w' = 0$ i per tant:

$$0 = \gamma (w - \beta \cdot x)$$

$$0 = w - \beta \cdot x$$

$$w = \beta x$$

El pendent d'aquest eix és $m = \beta$ i, per tant, $m = v / c$. Els eixos w' i x' presenten simetria respecte la bisectriu del primer quadrant. Tot seguit demostrarem perquè són simètrics.

$$m_{w'} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}(90 - \theta)}} = \operatorname{tg}(90 - \theta)$$

Sabem que $\operatorname{tg} \theta = 1 / \operatorname{tg}(90 - \theta)$ ja que existeix les raons trigonomètriques dels angles complementaris del primer quadrant són inverses. Com hem dit abans:

$$m_{x'} = \beta = \operatorname{tg} \theta$$

Com podem veure, els eixos formen angles complementaris i, per tant, són simètrics respecte la bisectriu del primer quadrant, és a dir, simètrics respecte la línia de món d'un raig de llum que porta $v = c$. Això demostra gràficament el postulat de la constància de la velocitat de la llum ja que tant per a S com per a S' , un raig de llum sempre té $v = c$, és a dir, escollim el sistema de referència que escollim, la línia de món d'aquest sempre serà la bisectriu dels eixos (x, w) o (x', w') .

Ara només falta aprendre a determinar les unitats dels eixos w' i x' per a poder representar gràfics espai-temps. Per a determinar aquestes unitats necessitem recuperar la fórmula que ens permetia calcular intervals espai-temps:

$$s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2$$

Tot seguit, modifiquem la fórmula per tal que hi aparegui la nova variable w :

$$s^2 = w^2 - x^2 \quad \text{o} \quad s'^2 = w'^2 - x'^2$$

El que necessitem trobar són dos punts que determinen una unitat en cadascun dels nous eixos. La unitat de l'eix w' serà punt que tingui de coordenades $x' = 0$ i $w' = 1$, per tant, $s' = 1$. Tot seguit considerarem un sistema d'equacions que tingui com a solució el punt que busquem:

$$\begin{cases} w'^2 - x'^2 = 1 \\ x' = 0 \end{cases}$$

La representació gràfica de la segona equació és l'eix w' ja que són tots els punts que tenen com a primera coordenada $x' = 0$. El podem representar tal com hem fet abans, saben que és una recta de pendent $1/\beta$:

$$x' = x - \beta w \quad ; \quad 0 = x - \beta w \quad ; \quad w = \frac{1}{\beta} x$$

Per altra banda, la representació gràfica de la primera equació és una hipèrbola. La invariància de s en diversos sistemes de referència ens assegura que $w^2 - x^2 = 1$ i seria 1 en qualsevol altra sistema de referència. Aquesta hipèrbola dibuixa la unitat en qualsevol SR, per això se l'anomena **hipèrbola de calibració** (Fig. 10.1). La solució gràfica del sistema és el punt on la hipèrbola talla l'eix w' .

Per a trobar la unitat de l'eix x' , el procés és similar, la diferència és que ara cal considerar el següent sistema:

$$\begin{cases} w'^2 - x'^2 = -1 \\ w' = 0 \end{cases}$$

Aquesta vegada la solució és el punt de coordenades $x' = 1$ i $w' = 0$.

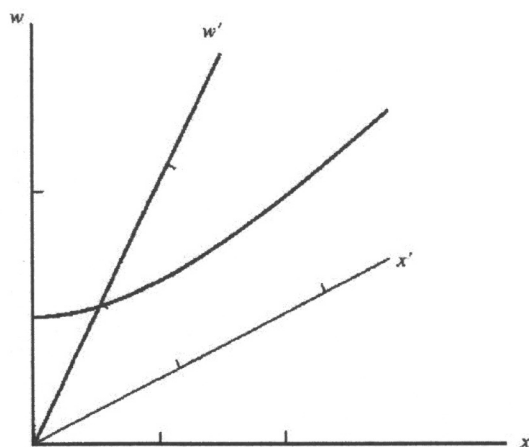


Fig. 10.1

A continuació comentarem uns quants diagrames espai-temps per entendre els diferents fenòmens de la TRE:

1. La simultaneïtat

En el següent diagrama es pot observar com dos esdeveniments P_1 i P_2 que són simultanis per a S , no ho són per a S' i al revés, dos esdeveniments E_1 i E_2 simultanis per a S' , succeeixen en instants diferents per a S . Per a l'observador situat en S , primer succeeix E_1 , després E_2 i més endavant succeeixen simultàniament P_1 i P_2 . En canvi, per a l'observador del sistema S' , primer succeeixen simultàniament E_1 i E_2 , després P_2 i finalment P_1 .

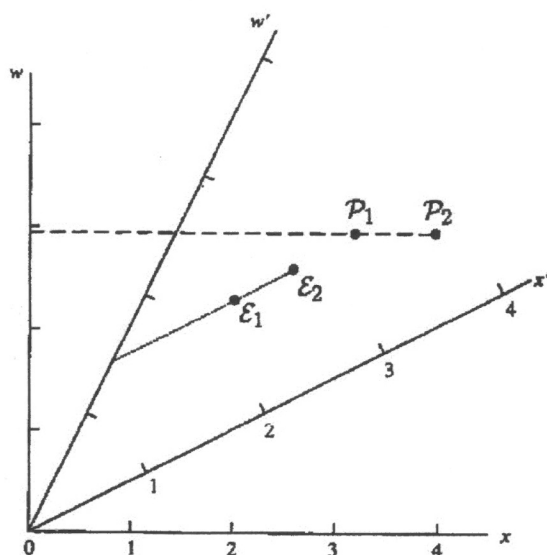


Fig. 10.2

2. La contracció de l'espai

Per a mesurar la longitud d'un cos, un observador ha d'utilitzar dos successos simultanis per al seu sistema de referència, és a dir, ell veu la posició de cada extrem del cos en el mateix instant. En el cas següent per a l'observador de S , el cos mesura una unitat ja que utilitza els successos E_1 i E_2 per a mesurar-ho que són simultanis per a ell i succeeixen a una unitat de distància l'un de l'altre. Per a l'observador de S' , E_1 i E_2 no són simultanis, ell utilitza E_1 i E_3 i a partir d'aquí determina que la longitud del cos és menor d'una unitat, és l'anomenada contracció de l'espai. Per a l'observador de S' primer succeeix E_3 i després E_1 i E_2 simultàniament. De la mateixa manera, per l'observador de S , E_3 succeeix més tard que E_1 i E_2 .

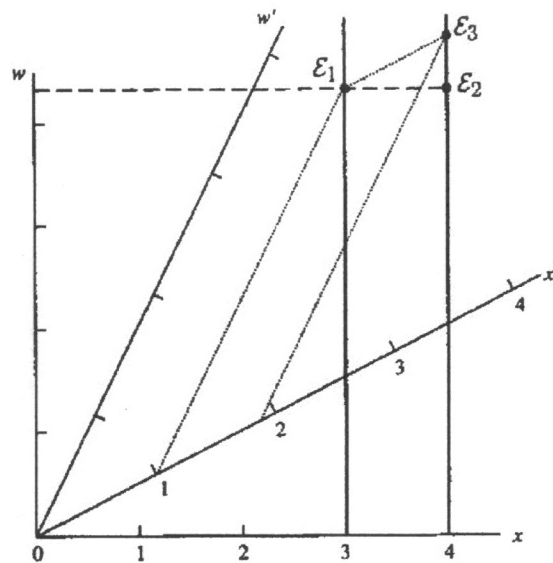


Fig. 10.3

3. La dilatació del temps

Mesurem un període de temps en S utilitzant dos esdeveniments que tenen les mateixes coordenades espacials però que succeeixen en diferents instants que delimitin el delimitin. Ara comparem els dos esdeveniments vistos des de S' . Mentre que en S el període era d'una unitat, des del punt de vista de S' , aquest és de més d'una unitat. Aquí es veu la com el temps es dilata per observadors d'altres SR en moviment.

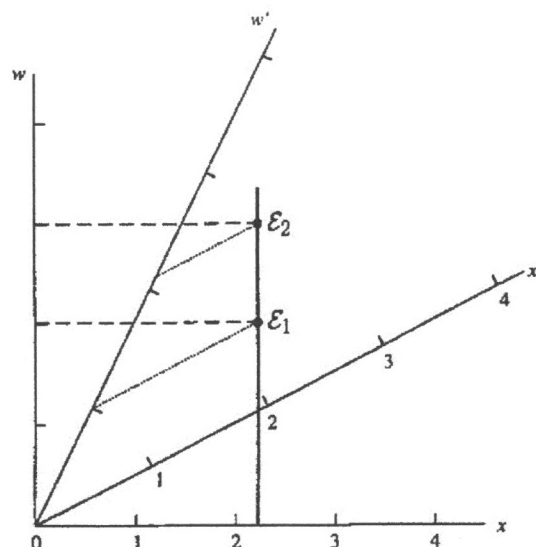


Fig. 10.4

3.5. Els experiments amb els muons

Des del punt de vista teòric, podem diferenciar bé entre la dilatació del temps i la contracció de l'espai però quan ens posem a analitzar alguns casos, podem observar com els dos són complementaris, són les dues cares d'un mateix fenomen. Això es veu més clar en el cas dels muons. Els muons són unes partícules que es generen a causa de la interacció dels raigs còsmics amb l'atmosfera. Aquests són molt més pesats que els electrons i tenen una vida mitjana de $2 \mu\text{s}$ ($0,000002 \text{ s}$), és a dir, la meitat d'aquestes partícules es desintegra transcorregut aquest temps. Teòricament, aquestes partícules no tenen suficient temps de vida com per a travessar l'atmosfera i arribar a la superfície de la Terra, s'haurien de desintegrar després de recórrer tan sols 600 m. Però a la pràctica, alguns d'aquests muons arriben a la superfície de la Terra i els podem detectar. Els muons van ser descoberts l'any 1938 per C. Anderson. L'any 1941 B. Rossi i D. Hall van realitzar un experiment per a calcular el nombre de muons que arribaven a la superfície terrestre. Van fer dues mesures, una a dalt d'una muntanya i l'altra al nivell del mar. A la muntanya van mesurar 568 muons per hora i tenint en compte la vida mitjana d'aquestes partícules van calcular que a nivell del mar haurien d'haver arribat tan sols 27 muons per hora, però, en canvi, en van registrar 412. Era com si els muons haguessin tingut més temps per arribar a la superfície, com si se'ls hagués allargat la vida. Aquest experiment demostra la TRE. El fenomen dels muons té dues explicacions

possibles segons el punt de vista des del qual s'estudiï tot i que en realitat formen part del mateix fenomen.

1. Si estudiem aquest fenomen des del punt de vista d'un observador situat a la Terra, veiem que la vida mitjana dels muons s'ha d'allargar per a possibilitar que arribin a la Terra, per tant, comprovem que es produeix una dilatació del temps (*Fig. 11.1*).
2. Si, en canvi, ens ho mirem des del punt de vista dels muons, el seu temps per a ells transcorre igual (al cap de $2\ \mu\text{s}$ es desintegren), en canvi, per a ells el que canvia és l'espai recorregut. Per a un observador hipotètic situat en un muó, el muó estaria en repòs i l'atmosfera terrestre seria la que es mouria a gran velocitat respecte ell, llavors, des del punt de vista dels muons, el que es produeix és una contracció de l'atmosfera a causa de que es mou a una gran velocitat respecte ell (*Fig. 11.2*).

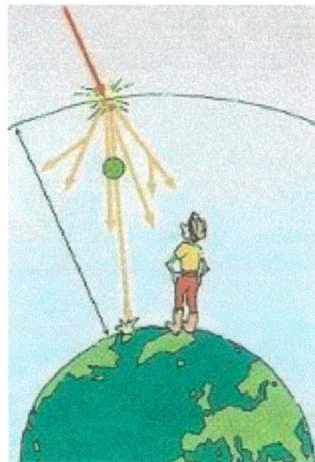


Fig. 11.1



Fig. 11.2

La dilatació del temps i la contracció de l'espai de vegades són fenòmens complementaris, depenent del sistema de referència que consideris que està en estat de repòs ja que en principi, pots agafar qualsevol sistema en estat de repòs i dir que és l'altre el que es mou respecte aquest.

3.6 Paradoxes espai-temps

Les paradoxes són experiments mentals que utilitzava Einstein per imaginar el què succeiria en casos hipotètics que no es podien experimentar per manca de mitjans ja que per experimentar amb la relativitat especial s'ha d'aconseguir crear sistemes de referència que es moguin a velocitats properes a la de la llum i serien molt costós de realitzar, o impossibles en

alguns casos. Gràcies a aquests “experiments mentals”, Einstein va deduir la seva teoria sense la necessitat de fer grans experiments.

3.6.1. La paradoxa del tren i el túnel

Una bona paradoxa on es veu on poden arribar els efectes de la relativitat és la paradoxa del tren i el túnel. Hem d’imaginar un tren que mesuri 100 m de longitud i un túnel de 50 m. Aquest tren suposem que viatgi a una velocitat de $0,866c$ (259.800 Km/s). Si no tenim en compte els efectes de la relativitat a causa de la gran velocitat a la qual circula el tren, veuríem el tren i el túnel com estem acostumats en la nostra vida quotidiana, és a dir, exactament igual com els veiem quan estan en repòs. (*Fig. 12.1*)

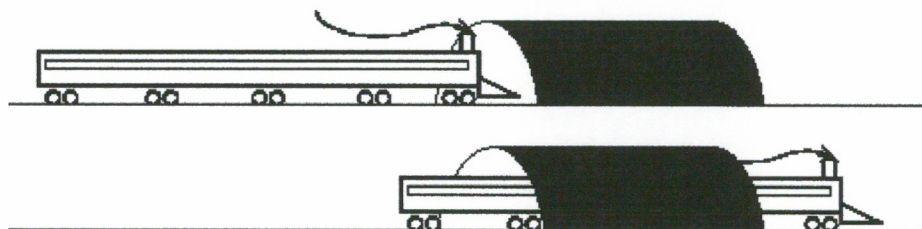


Fig.12.1

En canvi, com ja sabem, a la velocitat a que circula aquest tren, es poden apreciar els efectes relativistes de la contracció de l’espai i la dilatació del temps. En aquest cas, ens fixarem en la contracció de l’espai. Podem observar la situació en que el tren passa pel túnel des de diversos sistemes de referència però n’estudiarem dos en concret: un en el que el túnel estigui en repòs i l’altre en que el tren estigui en repòs.

Un sistema de referència en el qual el túnel estigui en repòs respecte el tren, podria ser l’andana, on hi hagi un observador. Per aquest observador, el tren es mouria a gran velocitat i, per tant, es produiria una contracció en la seva longitud. El factor de Lorentz per a aquesta velocitat és dos, per tant, la longitud del tren es redueix a la meitat. Llavors succeeix el cas més curiós d’aquesta paradoxa, que és que hi ha un instant en que el tren queda completament dins del túnel, no sobresurt per cap dels costats tot i ser el doble de llarg que el túnel! Sense tenir en comte l’efecte òptic que causen els objectes que es mouen a gran velocitat, el que veuria l’observador de l’andana seria el següent:

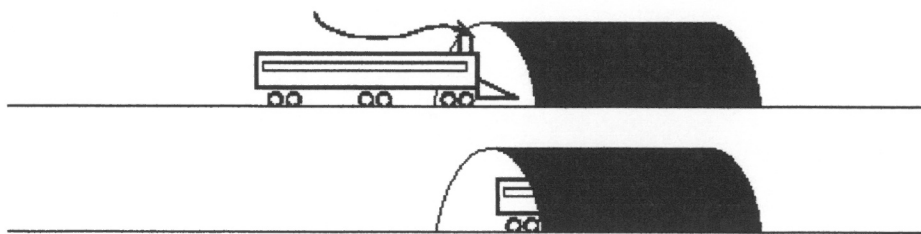


Fig. 12.2

Una altra forma d'observar aquest succés és situant l'observador en un sistema de referència des del qual vegi el tren en repòs i el túnel en moviment. Això es pot aconseguir situant-lo en un tren paral·lel que passés pel costat a la mateixa velocitat que l'altre tren. Per aquest observador, seria el túnel el que es mou a la velocitat de $0,866c$ i per tant, seria aquest el que sofrís els efectes de la contracció de l'espai. La longitud del túnel es reduiria a la meitat mentre que la del tren no es veuria afectada. En aquest cas, el tren seria quatre vegades més llarg que el túnel com es veu en la següent imatge:

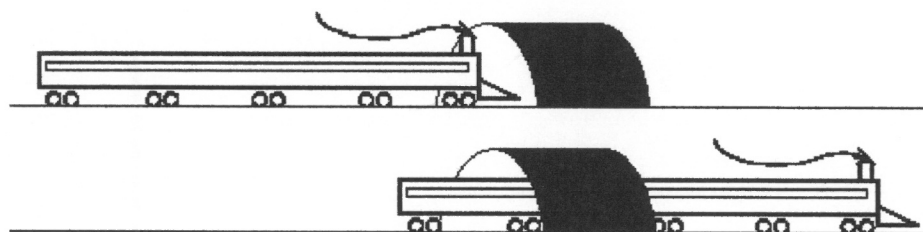


Fig. 12.3

3.6.2. La paradoxa dels Germans Bessons

La Paradoxa dels Germans Bessons és la paradoxa sobre la relativitat més famosa i més criticada que hi ha. Aquesta consisteix en enviar un dels germans bessons a fer un viatge interestel·lar imaginari i deixar l'altre aquí a la Terra. El germà que viatja, quan arriba a una certa distància, s'atura i torna cap a la Terra. Al arribar torna a veure el seu germà bessó però, qui serà més jove? S'ha comprovat que seria més jove el germà que va de viatge. Això es deu a la dilatació del temps que sofreix el germà viatger. Si envies els teus pares en un viatge com aquest, quan tornin pot ser que tu siguis més vell que ells!

Existeix un cas similar a aquest, un experiment que s'ha dut a terme aquí a la Terra i s'han pogut observar els resultats. S'agafen dos rellotges bessons extremadament precisos i un d'ells es deixa a la torre de l'aeroport i l'altre es posa en un avió. Després, l'avió s'enlaira i al aterrar es comparen els rellotges. La velocitat de l'avió no és gaire gran i, per tant, els canvis no seran gaire grans. El resultat sempre es el mateix: el rellotge que es retarda és el de l'avió, o sigui, el del sistema de referència en moviment, com en el cas de la paradoxa dels germans bessons.

La paradoxa dels bessons ha sigut la part més criticada de la teoria de la relativitat durant molts anys. Molts científics utilitzaven aquesta paradoxa per tirar per terra la teoria d'Einstein. Deien que, tal i com el germà que es quedava a la Terra afirmava que ell estava en repòs i que l'altre germà es movia a una velocitat v respecte ell, l'altre germà també tenia dret a afirmar que era ell el que estava en repòs i que eren el germà de la Terra i la Terra sencera que es movien respecte ell. Segons deien, no hi ha cap diferència entre aquests dos casos i no es poden fer experiments físics per demostrar qui té raó, però llavors el problema era el següent: si els dos casos són idèntics, cadascun dels dos germans al ajuntar-se hauria de comprovar que el rellotge de l'altre germà està més retardat. Això és completament il·lògic, impossible. Només un dels dos rellotges s'haurà retardat, com hem dit abans, el que s'haurà retardat serà el del germà viatger, que és més jove que l'altre. Llavors, tota la teoria està equivocada? Per què no succeeix el mateix per als dos germans si els casos són iguals? Estan equivocats els crítics o és la teoria la que està malament? En realitat, els que estan equivocats són els crítics ja que aquest argument té un punt dèbil. Les dues situacions no són completament simètriques. El germà viatger, per iniciar el seu viatge, tot i que viatgi amb MRU, necessita accelerar i també per frenar i girar a la meitat del recorregut i frenar per aterrar. El fet que necessiti accelerar fa que les dues situacions siguin diferents ja que, per exemple, si la nau del germà viatger accelerés molt bruscament aquest i fins i tot la seva nau podrien quedar destruïts mentre que el germà terrestre no sofriria el menor dany. Igualment passa amb els rellotges de l'avió, les situacions tot i semblar simètriques no ho són, queda definit quin és el SR que es mou i quin està en repòs.

3.7. La constància de la velocitat de la llum

La velocitat de la llum, com ja hem vist, és una constant natural, sempre és de 300.000 Km/s. Aquesta actua com a límit natural ja que cap cos que tingui massa pot assolir la velocitat de la llum. Només els fotons, les partícules que formen la llum, poden assolir aquesta velocitat ja que no tenen massa, són energia pura. Quan accelerem un cos constantment, es creia que podíem augmentar la seva velocitat indefinidament, però quan aquesta s'acosta a la velocitat de la llum, es va apropant cada vegada més però mai arriba a assolir-la.

3.8. Els viatges per l'univers

Com hem vist abans amb la paradoxa dels bessons, els viatges interestelars són més factibles gràcies a l'efecte de la dilatació del temps que es produeix en aquest tipus de viatges. Per exemple, si féssim un viatge a Alfa Centauri, que es troba a 4,5 anys llum de la Terra (1 any llum = $9'46 \cdot 10^{15}$ m, l'espai recorregut per la llum en un any), passarien més d'onze anys a la Terra però per als tripulants de la nau només en passarien set. Si exagerem una mica, en un hipotètic viatge al centre de la nostra galàxia, la Via Làctea, que es troba a 30.000 anys llum de la Terra, passarien 60.000 anys a la Terra i només 40 per als de la nau. El problema és l'energia necessària per a fer un viatge d'aquestes dimensions, es necessita posar tot el combustible a la nau, per exemple, combustible per a set anys. Des del punt de vista energètic és inviable però potser en el futur es descobreix una energia que produeixi més energia consumint menys. Un altre problema és la comunicació en l'espai. La velocitat de la llum és molt ràpida per a nosaltres i ens facilita les comunicacions terrestres, però en l'espai les comunicacions tarden més a causa de les grans distàncies i seria impossible teledirigir una missió espacial que estigués lluny.

Hi ha un mètode gràfic per a estudiar els viatges per l'univers sense tenir que fer gaires càlculs. Es dibuixen dos eixos: l'horitzontal és el temps que estem viatjant (t), que mesurem nosaltres, en anys i l'eix vertical és la distància del destí (Δx), en anys llum. Llavors ens plantegem un viatge, per exemple, podem agafar el mateix que abans, un viatge a Alfa Centauri a quatre anys llum de la Terra i definim els temps que volem trigar a fer el viatge,

per exemple un any. Ara agafem el gràfic i tracem un segment entre els dos anys de l'eix horitzontal i els quatre anys llum de l'eix vertical (Fig. 13).

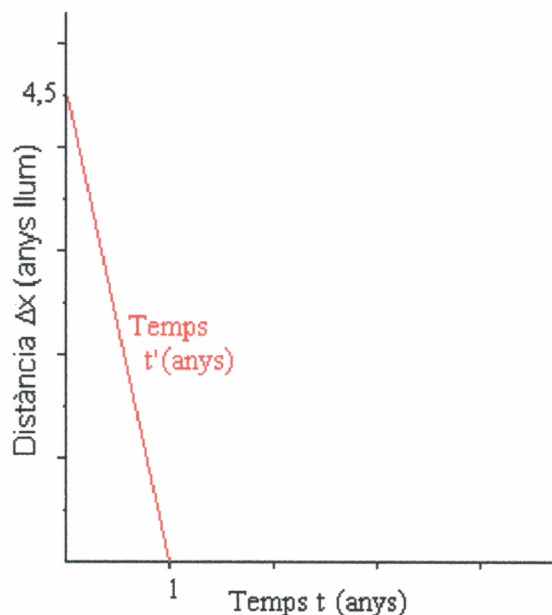


Fig. 13

Per obtenir el temps que transcorre a la Terra (t') en anys només cal mesurar la longitud del sement aplicant el Teorema de Pitàgores per a triangles rectangles. La fórmula és:

$$t'^2 = t^2 + \Delta x^2$$

En aquest cas, $t' = \sqrt{4,5^2 + 1^2} \approx 4,61$ anys o, el que és el mateix, 4 anys, 7 mesos, 12 dies, 17 h, 15' i 48''.

Aquest mètode permet calcular la velocitat necessària per a arribar a una distància determinada tenint en compte el fenomen de la dilatació del temps que es produeixi al viatjar a aquesta velocitat. Per a calcular la velocitat, hem de dividir la distància pel temps mesurat des del sistema de referència en repòs ja que la velocitat és respecte aquest. En aquest exemple la velocitat seria:

$$v = \frac{\Delta x}{t'} = \frac{4,5}{4,61} = 0,976c$$

Aquesta fórmula és molt més senzilla que la transformació de Lorentz per a la dilatació del temps. En un primer moment sembla que sigui impossible que el resultat sigui el mateix. Però, en realitat, les dues fórmules són iguals ja que aquesta prové de la de Lorentz. El procés per passar de la transformació de Lorentz a aquesta altra fórmula és el següent: Primer aïllem v a la transformació de Lorentz:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad ; \quad 1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad ; \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2}$$

Després substituïm v per $(\Delta x / t')$, utilitzem t' en comptes de t perquè la velocitat es mesura respecte el sistema de referència en repòs i per aquest, el temps és t' , i arreglem l'equació per evitar que hi hagin arrels quadrades:

$$\frac{\Delta x}{t'} = c \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2} \quad ; \quad \left(\frac{\Delta x}{ct'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

Llavors multipliquem cada banda de l'equació per t'^2 per treure el terme t' dels denominadors i ordenem els termes:

$$t'^2 \left[\left(\frac{\Delta x}{ct'}\right)^2 \right] = t'^2 \left[1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2 \right] \quad ; \quad \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 = t'^2 - t^2 \quad ; \quad t'^2 = t^2 + \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

Per acabar multipliquem tota l'equació per 31.557.600 (l'equivalent d'un any en segons). D'aquesta manera, les unitats de t i t' passen a ser anys i $(\Delta x / c)^2$ passa a ser Δx^2 en anys-llum. La fórmula queda:

$$t'^2 = t^2 + \Delta x^2$$

3.9. Els viatges en el temps

Podríem retrocedir en el temps? I viatjar al futur? Què passaria si canviéssim el passat? Si un fill matés el seu pare en el passat abans de que nasqués ell, què li succeiria a ell? Aquestes són algunes de les qüestions que s'han plantejat en moltes pel·lícules de ciència-ficció.

Per a que els viatges en el temps siguessin possibles, haurien d'existir unes partícules que poguessin sobrepassar la velocitat de la llum. A aquestes partícules, que en realitat són hipotètiques ja que no s'han detectat mai, se les va anomenar **taquions**. Per raons lògiques, no seria possible veure un efecte i més tard la seva causa, la relació causa efecte no es pot trencar, però si poguéssim superar la velocitat de la llum podríem retrocedir en el temps ja que viatjar en l'espai a una velocitat superior a la de la llum equival a un viatge enrere en el temps, tot i que es contradigui amb el principi de causalitat. Però com que de moment, els

taquions són només un plantejament hipotètic, avui dia és impossible retrocedir en el temps. En quant a viatjar al futur, ja hem vist que amb la dilatació del temps, es pot fer que el temps passi més ràpid pels altres i així seria possible avançar en el temps. Tot i així no seria instantani com a les pel·lícules de ciència ficció sinó que hauríem de viatjar a una velocitat propera a la de la llum durant un cert temps, llavors, com en la paradoxa dels germans bessons, pels altres hauria transcorregut més temps que per a nosaltres. Qui sap si en el futur els viatges en el temps formaran part de la nostra vida quotidiana.

3.10. Relació massa-energia: $E = mc^2$

$E = mc^2$ és probablement la fórmula més famosa de la història, la que ens ve al cap quan sentim a parlar de la Teoria de la Relativitat. E és energia, m és massa i c és la velocitat de la llum. Aquesta fórmula expressa la relació entre la massa i l'energia que conté un cos. Einstein va revelar que l'energia i la massa són dues formes de la mateixa cosa. En realitat, la massa és energia emmagatzemada, "congelada". Segons la fórmula, un sol quilogram de massa pot alliberar grans quantitats d'energia, ara bé, aquesta energia no es pot alliberar així com així. Si es pogués transformar l'energia en massa i viceversa com es volgués, quedaria resolt un dels problemes més importants del nostre planeta: trobar energies que no s'esgotin mai, energies renovables. Per desgràcia, només hi ha dues formes d'alliberar aquesta energia: la **fusió** i la **fissió**. La fusió consisteix en fusionar els nuclis dels àtoms i la fissió en dividir-los. Els dos processos generen una gran quantitat d'energia i cada vegada s'elimina una mica de massa segons l'equació d'Einstein. Segons la teoria del Big-Bang, abans tot l'univers era una gran bola d'energia pura, no existia la massa, per tant, per a evolucionar fins a tal com el coneixem nosaltres, amb els planetes, les galàxies, les estrelles... és inevitable que en algun moment tota aquella energia es transformés en massa. La massa i l'energia sempre van lligades. Aquesta fórmula també es pot aplicar a cossos que es moguin a una velocitat relativa alta però s'ha de modificar amb el factor de Lorentz: $E = \gamma mc^2$. Llavors, l'energia d'un cos que es mogui a velocitat v és:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aquesta modificació no és res més que substituir la massa del cos (mesurada en repòs) per la **massa relativa**. Quan un cos es mou a grans velocitats experimenta un increment de massa

gradual que fa que cada vegada costi més accelerar-lo, fins que arriba un moment que no pot anar més ràpid, aquesta barrera és 300.000 Km/s, la velocitat de la llum, la qual només pot ser assolida per partícules que no tinguin massa com les que formen la llum. Quan una partícula sobrepassa la velocitat de $0,9c$ la seva massa es dispara, té un creixement infinit. L'energia que no utilitza el cos per a augmentar de velocitat l'acumula en forma de massa. Quan el cos s'atura, automàticament perd aquest excés de massa que ha obtingut a causa de la velocitat. Per a calcular la massa relativa d'un cos que es mou a una velocitat elevada es pot utilitzar la fórmula següent:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En la mecànica clàssica de Newton, un cos en moviment tenia una energia cinètica de $\frac{1}{2}mv^2$. En la relativitat, ni que la velocitat sigui nul·la, tal com es veu a la fórmula, el cos segueix tenint una energia de mc^2 . Segons Einstein, aquesta energia estava emmagatzemada en el cos en forma de massa.

Per a estudiar els comportament dels cossos que es mouen a velocitats properes a la llum s'utilitzen els acceleradors de partícules. El més important està al CERN a Ginebra (*Fig. 14*). Aquests aparells són uns cilindres allargats o cargolats en forma de “rosquilla” que acceleren partícules molt petites gràcies a grans camps electromagnètics.

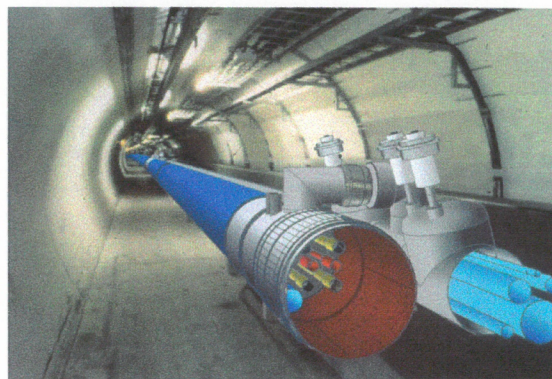


Fig. 14

Els científics utilitzen els acceleradors de partícules per a accelerar partícules a velocitats molt elevades (a causa d'això són molt pesades), les fan xocar entre elles i analitzen les partícules subatòmiques que es desprenen de la col·lisió.

Bloc II

Relativitat General

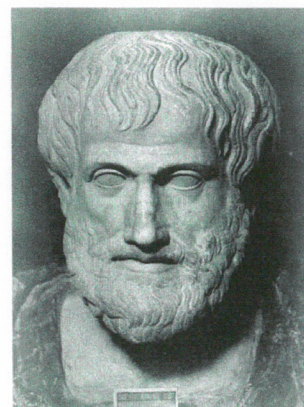
4. Evolució històrica de l'astronomia

La curiositat per mirar al cel i saber què hi passa ja existia a la prehistòria. Probablement primer comencessin per entendre el comportament del Sol i la Lluna i més tard les estrelles i els planetes. Van descobrir que estudiar el cel els podia ser molt útil perquè podien preveure els cicles de les estacions i per tant, preveure el comportament de la meteorologia segons l'època de l'any en que estaven. Aviat van començar a crear uns calendaris molt senzills basats en les fases lunars. Després els van anar modificant fins arribar al que tenim ara. Un assumpte que també els preocupava era la forma de la Terra. Els primers que es van interessar per resoldre aquesta qüestió eren els egipcis, que se la imaginaven plana i flotant sobre aigua. Més endavant, els grecs, se la imaginaven com un disc pla i rodó que es sostenia sobre columnes. El primer que va afirmar que la Terra era esfèrica va ser Aristòtil al voltant de l'any 340 a.C. argumentant que hi havia estrelles que es veien des d'un punt del planeta i des d'un altre no. Si la Terra era plana, s'havien de veure les mateixes estrelles des de tot arreu. A més a més, va observar la silueta de la Terra sobre la Lluna en un eclipsis lunar.



4.1. El Model Geocèntric

Aristòtil va ser el primer en proposar un model de com s'estructurava l'univers. Deia que la Terra era rodona i que el Sol, la Lluna i la resta de planetes giraven al seu voltant en òrbites circulars i amb velocitat constant. Les òrbites dels planetes havien de ser circulars ja que la circumferència sempre ha tingut connotacions de perfecció i, per tant, l'univers havia de ser perfecte. Aristòtil va deduir que la Terra havia de ser el centre de l'univers al observar el fenomen de la gravetat. Havia observat que tots els cossos eren atrets cap al centre de la Terra i, per



tant, tot havia de girar al seu voltant. Aristòtil també va raonar que la Terra estava en repòs i que eren la resta d'astres els que es movien ja que si la Terra es moguéss, al llençar un objecte verticalment aquest no cauria al mateix punt des del qual havia sigut llençat, cosa que es podia comprovar fàcilment. (Com hem vist ja en l'apartat 2, segons el principi de relativitat de Galileu, tot i que la Terra es mou, l'objecte cau al mateix lloc perquè els experiments duts a terme dins uns sistema de referència en moviment tindran el mateix resultat que realitzats en repòs per als observadors del mateix sistema de referència).

Posteriorment, en el segle II d.C., **Ptolomeu**, matemàtic i va recollir les idees d'Aristòtil i les va ampliar afegint també la base matemàtica, elaborant així l'anomenat **Model Geocèntric** (Fig. 15) que va quedar recollit dins l'obra *Almagesto*. Ptolomeu segueix les idees d'Aristòtil respecte a la situació dels planetes: la Terra en el centre i al seu voltant la Lluna, el Sol i els cinc planetes que es coneixien en aquella època (Mercuri, Venus, Mart, Júpiter i Saturn) situats en vuit òrbites circulars. En la part exterior, un última òrbita on es situaven la resta d'estrelles i planetes llunyans, anomenada "esfera de les estrelles fixes", on giraven totes alhora. Més enllà d'aquesta última esfera no se sabia què hi havia, però es considerava que estava fora de l'abast de l'ésser humà.

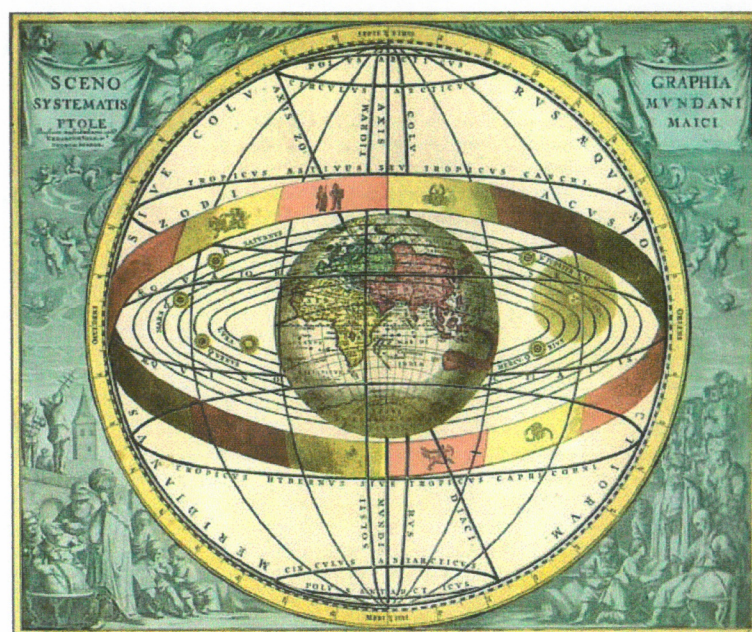


Fig. 15

L'objectiu de Ptolomeu era predir les posicions dels planetes i per això va idear un sistema d'epícles (unes subòrbites circulars més petites dins la seva òrbita original) que traçaven unes trajectòries molt complexes i ho va combinar amb unes diferències de velocitat dels planetes segons en la part del cicle que estiguessin. Tot aquest complex sistema per a poder fer concordar el Model Geocèntric amb les observacions i tot i així encara i havia diverses anomalies.

4.2. El Model Heliocèntric

Nicolau Copèrnic, un astrònom polonès de final segle XIV – mitjans del XVI, va estar estudiant els moviments dels planetes i del Sol i va arribar a la conclusió de què la Terra no era el centre de l'univers, sinó que tots aquells planetes giraven al voltant del Sol. A aquest nou model li va donar el nom de **Model Heliocèntric** (*Fig. 16*) ja que postulava que el Sol restava immòbil en el centre de l'univers mentre que mantenia la idea d'un univers finit i esfèric regit per òrbites circulars tal com havia descrit Ptolomeu.

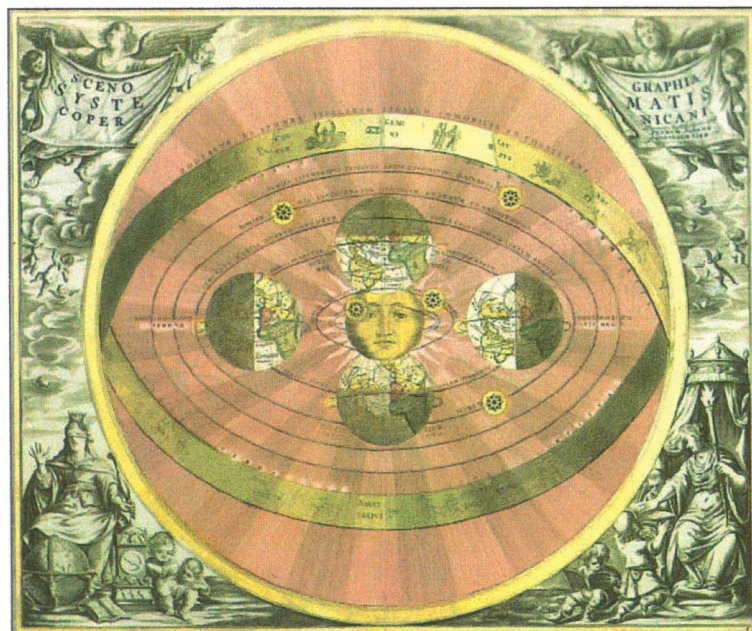
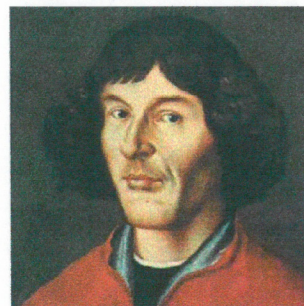


Fig. 16

El problema de Copèrnic era que el seu model tenia grans implicacions filosòfiques i religioses ja que si l'ésser humà era la creació més perfecta de Déu, aquest li hauria concedit una posició privilegiada dins l'univers, en el seu centre. Però segons Copèrnic, al centre de l'univers i havia el Sol, no la Terra, que girava com un planeta més. A més a més, Copèrnic pertany a l'Edat Mitjana i era una època teocèntrica, de gran religiositat. Això va fer que Copèrnic fos reticent a publicar el seu model i el va fer circular de forma anònima per evitar problemes amb l'Església. El Model Heliocèntric no va ser publicat fins unes setmanes abans de la mort de Copèrnic, l'any 1543. En un primer moment aquesta teoria no va ser acceptada com succeeix amb totes les revolucions científiques, però poc a poc va anar guanyant adeptes. Galileu i Kepler van ser dos grans defensors d'aquesta teoria. La prova definitiva de que aquesta teoria era certa no va ser descoberta fins l'any 1609 mentre Galileu observava el cel amb el telescopi que ell mateix havia dissenyat i va descobrir les llunes de Júpiter. Aquest descobriment va revelar que no tot té perquè girar respecte un mateix punt, ja que aquestes giraven al voltant de Júpiter. D'aquesta manera va quedar descartada la idea de que la Terra era el centre de l'univers i tot girava respecte ella.

4.3. Les lleis del moviment planetari

Les lleis del moviment planetari van ser formulades per **Johannes Kepler**, un astrònom, matemàtic i físic alemany que va viure des de finals de segle XVI fins a principis del XVII, i són les següents:

1. Tots els planetes es desplacen al voltant del Sol descrivint òrbites el·líptiques, estant el Sol situat en un dels focus de l'el·lipse.
2. El radivector (la línia que uneix un planeta amb el Sol) escombra àrees iguals en temps iguals. El planeta es desplaça més ràpidament quan està en el periheli (més a prop del Sol) que quan està en el afeli (*Fig. 17*).



3. Per a qualsevol planeta, el quadrat del seu període orbital o temps que tarda a recórrer tot la òrbita al voltant del Sol, és directament proporcional al cub de la distància mitjana amb el Sol ($T^2 = cR^3$).

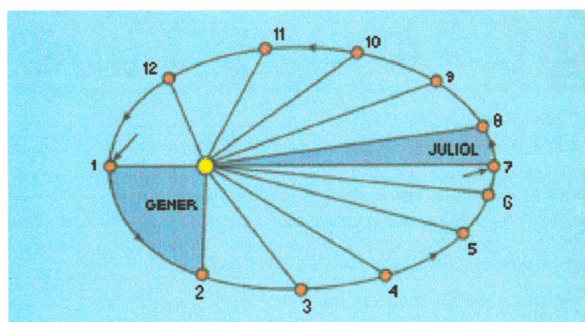


Fig. 17

Les dues primeres lleis les va formular el 1609 mentre que la tercera és de l'any 1618. El descobriment més important de Kepler va ser que les òrbites dels planetes no són circumferències sinó el·lipses ja que les el·lipses eren considerades molt menys perfectes que les circumferències i això xocava amb la idea del cosmos, on tot havia de tenir un ordre perfecte. Fins i tot al mateix Kepler li va costar assimilar el seu descobriment. Més endavant, la llei de la gravitació universal de Newton donava una explicació matemàtica a les dues primeres lleis de Kepler.

4.4. La Llei de la Gravitació Universal

Aquesta llei va ser formulada per Isaac Newton per a explicar el fenomen de la gravetat. Es diu que Newton estava descansant sota una pomera quan de sobte li va caure una poma al cap que li va inspirar la teoria. Tot i que casi segur que aquesta història és tan sols una llegenda, il·lustra molt bé els efectes de la gravetat. Aquesta teoria explica com dos cossos que tinguin massa experimenten una força d'atracció recíproca. Aquesta força és directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa. En la llei apareix una constant (G) que s'anomena constant de la gravitació universal i és igual a $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$. La fórmula és la següent:



$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Aquesta llei demostra que les òrbites dels planetes són el·líptiques i permet calcular la posició de qualsevol planeta amb precisió. Gràcies a aquesta llei, finalment les observacions s'ajustaven plenament a la teoria.

Fins a aquella època es pensava que l'univers era finit, tenia un tamany determinat, però llavors a Newton se li va plantejar un problema: si tots els cossos se senten atrets per altres cossos, llavors tots els planetes tendrien a aglutinar-se al centre de l'univers. Llavors Newton va raonar que això només podria succeir en un univers finit que tingués un nombre finit d'astres, en canvi, si l'espai era infinit i tenia un nombre infinit d'astres, aquests no es podrien aglutinar al centre de l'univers perquè no existiria tal centre.

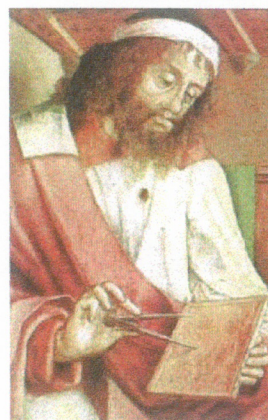
Les lleis de Newton de l'astronomia van utilitzar-se fins que Einstein va formular la Teoria de la Relativitat General, que va canviar completament el concepte de la gravetat i l'estructura de l'univers.

5. Evolució de la geometria

Des de l'antiguitat s'havia usat la **geometria euclidiana** per a estudiar els fenòmens físics. Aquesta, però, presentava una anomalia que ningú aconseguia resoldre. Fins el segle XIX no es creia possible que dos sistemes matemàtics diferents poguessin coexistir, però el fet de no poder resoldre l'anomalia de la geometria euclidiana va fer que comencessin a produir-se geometries alternatives anomenades **geometries no euclidianes**. Una d'aquestes va ser la utilitzada per Einstein per a descriure l'estructura de l'espai-temps en la Teoria de la Relativitat General.

5.1. Geometria Euclidiana

Euclides era un matemàtic grec que va viure entre els segles IV i III aC. Es pensa que probablement va estudiar a Atenes amb deixebles de Plató, això explicaria el seu bon coneixement de la geometria elaborada a l'escola de Plató, tot i que sembla que no estava familiaritzat amb les obres d'Aristòtil. Va exercir de mestre a Alexandria on va adquirir un gran reconeixement. La seva obra principal és "*Els Elements*" on recull tota la geometria de l'època organitzada en una sèrie de postulats repartits per temes en tretze llibres. Es tracta d'un recull d'obres d'autors anteriors les quals Euclides va sintetitzar i ampliar. Dels tretze volums, els sis primers tracten de geometria elemental, inclouen les tècniques geomètriques utilitzades pels pitagòrics per resoldre equacions de primer i segon grau. També inclouen la teoria general de la proporció, que s'atribueix a Eudoxe.



Euclides va establir el que hauria de ser una **proposició matemàtica**: un enunciat deduït lògicament a partir d'uns principis prèviament acceptats. En el cas de la seva obra, els fonaments bàsics eren vint-i-tres definicions, cinc postulats i cinc axiomes. Un **axioma** és una proposició evident en sí mateixa i que, per tant, no necessita demostració. Un **postulat**, en canvi, és una proposició que s'admet sense demostració, encara que no tingui l'evidència de l'axioma. Totes aquestes proposicions

que fonamenten l'obra estaven incloses dins el seu primer llibre, a més de 48 proposicions més. Aquests principis han sigut causa de moltes discussions al llarg de la història, especialment els cinc postulats i concretament el cinquè.

Els cinc axiomes són:

1. Coses iguals a una tercera són iguals entre sí.
2. Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals seran iguals.
3. Si de coses iguals es resten coses iguals, les diferències seran iguals.
4. Si dues coses coincideixen amb una tercera, aleshores són iguals.
5. El tot és major que les parts.

Els cinc postulats són:

1. Per dos punts diferents hi passa una única recta.
2. Una recta sempre pot ser prolongada.
3. Sempre és possible dibuixar una circumferència amb centre i radi donats.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Si una secant talla dues línies rectes, de tal manera que la suma dels dos angles interiors del mateix costat sigui menor que dos angles rectes, les altres dues rectes es tallen, al prolongar-les, per aquest costat.

Una altra forma, més coneguda, d'expressar el cinquè postulat és: "Per un punt exterior a una recta només podem dibuixar una única paral·lela a ella" (*Fig. 1.1*).

El mateix Euclides es va replantejar si canviar el cinquè postulat o fins i tot excloure'l però se'n va adonar que no podia i finalment el va incloure tal com era. Durant molts anys, els millors matemàtics han intentat demostrar-lo a partir dels altres quatre però no han pogut. Per definició, dues rectes paral·leles són dues rectes que per més que les prolonguis mai no es tallen, o dit d'una altra manera, són dues rectes que es tallen en l'infinit. La idea d'infinit és el que fa que aquest enunciat sigui confús, mai no podem arribar a l'infinit. Com que no podem prolongar dues rectes paral·leles fins a l'infinit, no podem dir que són paral·leles. Els esforços per trobar-li una demostració van continuar fins al segle XIX, quan es va veure que era possible definir geometries consistents que no complissin aquest postulat i se les va anomenar geometries no euclidianes.

5.2. Geometries No Euclidianes

Durant el segle XIX, la impossibilitat de demostrar el cinquè postulat de la geometria euclidiana va provocar el sorgiment d'unes noves geometries que resolguessin aquest problema, anomenades geometries no euclidianes. El cinquè postulat deia que “per un punt exterior a una recta només s’hi podia traçar una altra recta paral·lela”. El problema d’aquest postulat, com hem vist abans, era la idea d’infinít, la impossibilitat de demostrar si dues rectes s’arriben a creuar o no.

5.2.1. Geometria Hiperbòlica

Nikolai Lobachevski, matemàtic rus, mentre tractava de demostrar el cinquè postulat va adonar-se que no podia deduir-se dels altres quatre i llavors va provar de substituir-lo per un altre de contrari que digués que “per un punt exterior a una recta es pot traçar més d’una línia paral·lela a ella”. Llavors Lobachevski va tractar de deduir-ne un sistema i no es va trobar amb cap contradicció lògica, comprovant així que el cinquè postulat és indemostrable matemàticament. Aquesta



geometria no va ser acceptada en un principi a causa dels prejudicis que tenien els matemàtics d’aquella època ja que des de sempre que s’havia utilitzat la geometria euclidiana i no es creia que poguessin coexistir dues geometries diferents, dos sistemes axiomàtic-deductius diferents. La geometria que va crear Lobachevski s’anomena **Geometria Hiperbòlica** i va quedar recollida en el llibre “*Sobre els principis de la Geometria*” que va publicar el 1830. Des de llavors, la geometria euclidiana va perdre el seu caràcter absolut i van anar apareixent diverses geometries alternatives. Per a àrees molt petites de l’espai, la geometria hiperbòlica (GH) és molt similar a la geometria euclidiana (GE). En part, la GH es pot considerar una generalització d’aquesta. Les estructures de la GH no es poden dibuixar sobre una superfície plana, sinó que per a representar-les s’ha de fer sobre una pseudoesfera. (Fig. 18.2) Les figures geomètriques i els teoremes matemàtics són diferents dels de la GE, per exemple, la suma dels angles d’un triangle en la GE sempre és igual a 180° , en canvi, en la GH, la suma d’angles d’un triangle sempre és inferior a 180° .

5.2.2. Geometria El·líptica

L'any 1854, **Bernhard Riemann**, matemàtic alemany, va presentar una tesi anomenada “*Sobre les hipòtesis que serveixen de fonament a la geometria*” en la qual presentava una nova geometria no euclidiana que ell va anomenar **Geometria El·líptica**. Aquesta geometria està construïda sobre la superfície d'una esfera i les rectes són geodèsiques, és a dir, rectes que delimiten un pla de la esfera que té el diàmetre de l'esfera i que inclou el centre de la circumferència (Fig. 18.3). En aquesta geometria, “per un punt exterior a una recta no podem traçar cap paral·lela”. Això es deu a que totes les geodèsiques es tallen necessàriament per dos punts. També deia que una recta no pot ser prolongada indefinidament ja que si la prolonguem sempre torna a sí mateixa. En aquest cas, la suma d'angles d'un triangle és major que 180° .

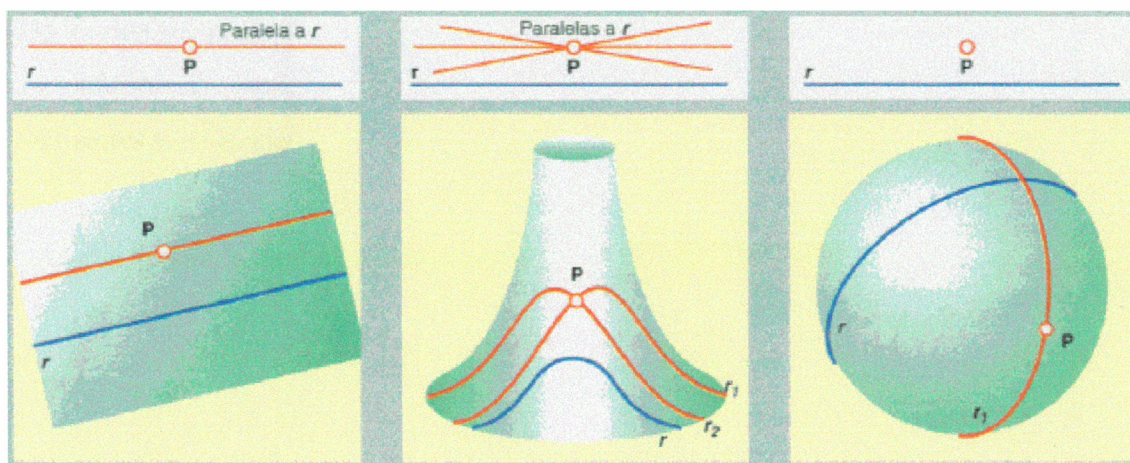


Fig. 18.1 (G. Euclidiana)

Fig. 18.2 (G. Hiperbòlica)

Fig. 18.3 (G. El·líptica)

Tot i que les geometries no euclidianes es van desenvolupar durant el segle XIX, no van ser conegudes fins que va ser publicada la Teoria de la Relativitat a principis del segle XX. Fins llavors no gaudien de gran acceptació per part de la comunitat científica, però la relativitat va suposar no només que aquestes geometries eren tant vàlides com les altres des del punt de vista formal, sinó que el cosmos es regia per una geometria no euclidiana.

6. Teoria de la Relativitat General

La Teoria de la Relativitat General (TRG) va ser publicada per **Albert Einstein** l'any 1915. Aquesta pretenia ampliar i generalitzar la Teoria de la Relativitat Especial (o Restringida) que només tractava els fenòmens en àrees locals de l'espai i sense tenir en compte els efectes de la gravetat. En la TRG es descriu l'estructura de l'espai-temps i es defineix la gravetat. A partir d'aquestes variacions es poden modificar les fórmules de la TRE per a poder-les aplicar correctament a la realitat. Amb la TRG es pot analitzar qualsevol sistema de referència inercial o accelerat, en absència o no d'un camp gravitatori. La finalitat segueix sent estudiar sistemes de referència diferents, tot i que redefineix tots els conceptes de la mecànica clàssica.

6.1. Principi d'Equivalència

El principi d'equivalència és la base de la Teoria de la Relativitat General, que està desenvolupada a partir d'aquest. Abans d'anunciar el principi, hem de diferenciar dos conceptes: la gravetat i l'acceleració. La gravetat és l'efecte d'un camp gravitatori sobre un cos, mentre que l'acceleració està relacionada amb el moviment, tot i així localment tenen els mateixos efectes, això és el que anuncia el **principi d'equivalència**: un sistema de referència accelerat i lliure de forces gravitadores és localment equivalent a un sistema de referència en repòs dins un camp gravitatori.

Per als que entenguin més de física, cal dir que aquest principi parteix de que la massa gravitacional i la massa inercial tot i referir-se a conceptes diferents tenen el mateix valor. Hi ha dos tipus de massa: la massa gravitacional i la massa inercial. La **massa gravitacional** és la que defineix el pes, que com sabem és igual a la massa del cos per la gravetat ($P = mg$). Aquesta massa també és la que fa que dos cossos se sentin atrets segons la llei de la gravitació universal. És la relació entre la força que experimenta un objecte per estar en un camp gravitatori i la intensitat d'un camp: a més massa, en el mateix camp, el cos experimentarà més força d'atracció. Per altra banda, la **massa inercial** és la que defineix la dificultat de moure o aturar un cos, és a dir, la

resistència a canviar el seu estat de moviment. És la que intervé en la segona llei de Newton per a la dinàmica que diu que la força aplicada a un cos és proporcional a l'acceleració que aquest experimenta ($F = ma$). El més sorprenent és que, sent dos conceptes ben diferents, els seus valors coincideixen. Per Einstein, si dos fenòmens de la naturalesa coincideixen sense tenir res a veure, això no pot ser una coincidència, s'ha de donar per alguna raó.

Per a estudiar aquest fenomen, Einstein va utilitzar un dels seus experiments imaginaris. Suposem que tenim dos ascensors, un de normal aquí a la Terra i un a l'espai. Tanquem un observador en cada ascensor. L'observador de la Terra restarà normal dins l'ascensor però el de l'espai hi flotarà ingràvit. Ara imaginem que l'ascensor situat a l'espai té uns propulsors que li permeten accelerar i desplaçar-se per l'univers. Si l'acceleració de l'ascensor fos igual a la gravetat de la Terra ($9,8\text{N}$) tindriem la sensació de ser aquí a la Terra (Fig. 19), l'observador es sentiria enganxat al terra de l'ascensor.

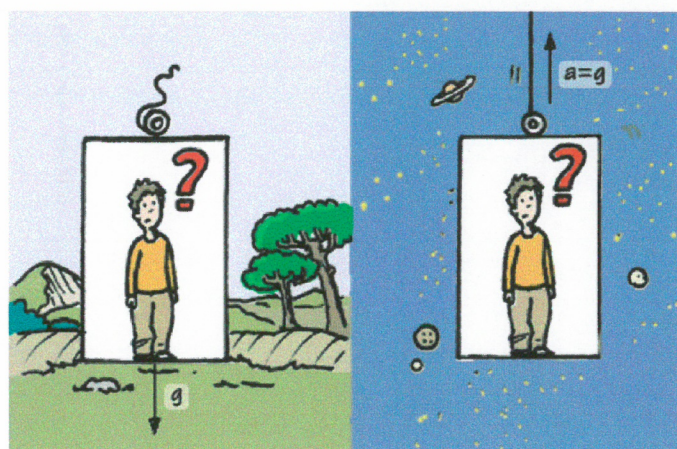


Fig. 19

Tot i així, no seríem atrets cap al terra de l'ascensor com passaria aquí a la Terra amb la gravetat, sinó que l'ascensor ens empenyeria a nosaltres a causa del seu moviment. De la mateixa manera, qualsevol objecte que ens caigués aniria cap al fons de l'ascensor ressagat a causa del moviment de l'ascensor, no atret per cap força. Aquesta és la diferència entre la gravetat, una atracció, i l'acceleració del moviment; la diferència entre massa gravitacional i massa inercial. Segons aquest experiment, no podríem diferenciar si ens trobem sota els efectes de l'acceleració o en un camp gravitatori, no existeixen experiments físics per a poder determinar-ho ja que les dues tenen els mateixos efectes.

Un altre experiment que preocupava a Einstein era què passaria al encendre una llanterna dins l'ascensor de l'espai. Si ho féssim quan aquest està en repòs, el raig de llum tindria una trajectòria recta, però si, en canvi, ho féssim quan està accelerant, el raig de llum seria corbat, el veuríem doblegat. (Per que es donés aquest fenomen l'acceleració de la nau hauria de ser considerable, ja que la velocitat de la llum és molt alta). Llavors, si l'efecte de l'acceleració pot corbar un raig de llum, i tal com hem dit abans, els efectes produïts per l'acceleració i per un camp gravitatori són els mateixos, arribem a la conclusió que els camps gravitatoris també poden corbar un raig de llum si són prou potents. A Einstein només li faltava una prova que demostrés la seva teoria era certa.

6.2. L'experiment d'Eddington

Aquest experiment va ser ideat per **sir Arthur Eddington** per a comprovar experimentalment que la llum es doblega al passar a prop del Sol. El dia 29 de Maig de 1919 va tenir lloc el primer eclipsi solar del mil·lenni i va ser la data escollida per a dur a terme aquest experiment. El que Eddington pretenia era fotografiar les estrelles properes al Sol aprofitant que aquest estava tapat per la lluna durant l'eclipsi



(Fig. 20.1). Segons la Teoria de la Relativitat General, aquestes estrelles haurien d'aparèixer en una posició lleugerament desviada quan estan a prop del Sol ja que aquest desviaria la seva llum. Així doncs, l'estrella que normalment apareixia en el punt E, mentre el Sol s'interposés entre ella i la Terra, aquesta semblaria que està en el punt E' (Fig. 20.2). Aquest experiment només es pot fer durant un eclipsi solar ja que sinó no es poden veure les estrelles properes al Sol, la llum del Sol les tapa.

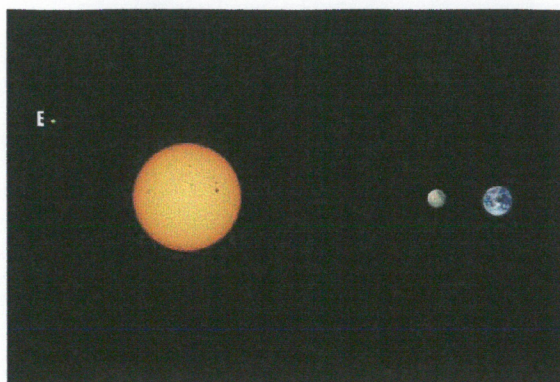


Fig. 20.1

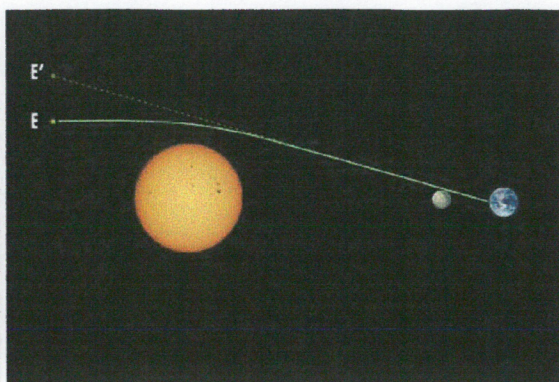


Fig. 20.2

L'expedició es va dividir en dos grups per a poder fotografiar el fenomen des de dos punts de vista diferents, el grup liderat per Eddington va anar a una illa de davant la costa de Guinea Equatorial mentre que l'altre va anar a la costa nord de Brasil. El grup d'Eddington va tenir més mala sort ja que la meteorologia no l'ajudava gens i va poder fer poques fotos degut a la mala visibilitat però l'altre grup va tenir millor sort. Les fotografies van ser comparades amb les de la mateixa regió del cel mig any abans o mig any després, quan el Sol estava a l'altra banda i no obstaculitzava els raigs de llum. En efecte, en les fotografies del dia de l'eclipsi (Fig. 20.3), les estrelles es veien més allunyades del Sol del que realment estan (Fig. 20.4).



Fig. 20.3: Observació real



Fig. 20.4: Predicció sense la TRG

Aquestes observacions van confirmar que la Teoria de la Relativitat General era correcta. El 6 de novembre del mateix any, després de ser analitzats acuradament, es van fer públics els resultats que van donar lloc a la revolució científica que va portar a establir la relativitat com a nou paradigma. Després s'ha repetit aquest experiment moltes vegades i els resultats cada vegada s'aproximaven més als predits per la

relativitat. L'explicació que dona la relativitat general a aquest fenomen era la curvatura de l'espai-temps.

6.3. El problema del periheli de Mercuri

Un dels problemes principals de la Llei de la Gravitació Universal era que no podia explicar l'anomalia de l'òrbita del planeta Mercuri. L'any 1859, Le Verrier ja va observar l'anomalia d'aquesta òrbita que es desplaçava (*Fig. 21*). Aquest desplaçament era inexplicable des del punt de vista de la llei de Newton ja que el moviment de Mercuri no podia veure's influenciat pels camps gravitatoris dels planetes veïns. Es va estudiar aquest desplaçament de l'òrbita de Mercuri i es va descobrir que aquest és de 43 segons d'arc per cada segle.

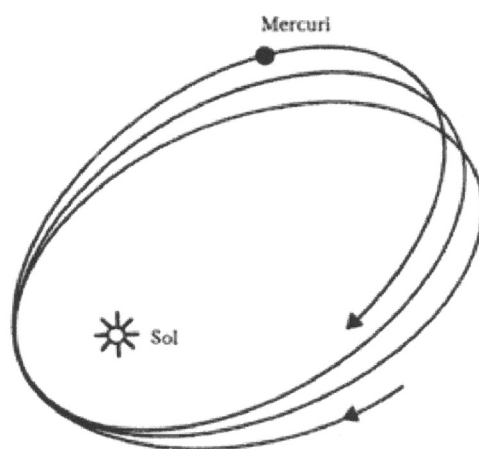


Fig. 21

Quan Einstein va acabar la TRG va calcular quina seria l'òrbita dels planetes tenint en compte els efectes relativistes i va descobrir que totes les òrbites dels planetes es desplacen lentament. Concretament en el cas de l'òrbita de Mercuri, la seva predicció s'ajustava perfectament amb les observacions fetes: 43 segons d'arc cada segle. Aquest resultat va ser la primera demostració experimental de que la TRG era millor que les lleis de Newton ja que aquesta podia explicar les anomalies que presentava l'altra. Aquesta comprovació va ser molt important perquè aquest fenomen portava de cap a tots els astrònoms d'aquella època.

6.4. L'estructura de l'espai-temps

La geometria que utilitza Einstein en la TRG per a descriure l'espai-temps és una variant de la geometria el·líptica de Riemann. Segons Einstein, l'espai-temps està corbat. La curvatura de l'espai-temps depèn del **tensor** d'energia que hi hagi en aquell punt. Els tensors són la mesura de la quantitat de massa i d'energia que hi ha en aquell punt. Quanta més massa o energia hi hagi en un punt, més gran serà la curvatura de l'espai-temps allí.

És impossible imaginar un model de l'espai-temps ja que no podem fer-nos a la idea de com és una estructura de quatre dimensions. Per això, per a representar l'espai-temps, sovint s'utilitzen uns diagrames on l'espai-temps està representat com una superfície bidimensional i els cossos hi estan situats al damunt tot produint-li deformacions (Fig. 22). És com si tinguéssim un llit amb els llençols ben allisats i llavors hi col·loquéssim boles de ferro al damunt. Aquestes, segons fos la seva massa, s'enfonsarien més o menys, produint deformacions al llençol.

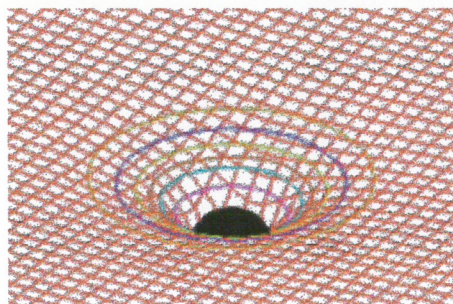


Fig. 22

6.5. La gravetat

Segons la TRG, els camps gravitatoris són una conseqüència de la geometria de l'espai-temps. La gravetat es deu a la curvatura que produeix la massa en l'espai-temps, deix de ser considerada com a una força, tal com es feia en la mecànica clàssica que se l'englobava en la segona llei de Newton ($F = ma$) com una força qualsevol. Quan més massa té un planeta, més gran és la curvatura produïda en l'espai-temps i, per tant, el camp gravitatori és més gran. Els planetes, quan s'acosten a un cos amb molta massa, cauen en el pendent produït per la massa en l'espai-temps i, si la seva velocitat no és

prou gran com per a seguir òrbites el·líptiques al seu voltant, es precipiten cap a ell fins que xoquen (*Fig. 23*). Aquesta és l'explicació de la TRG als camps gravitatoris. Quant més s'apropa el planeta a l'estrella, més atret es sent cap a ella ja que la curvatura va augmentant a prop seu.

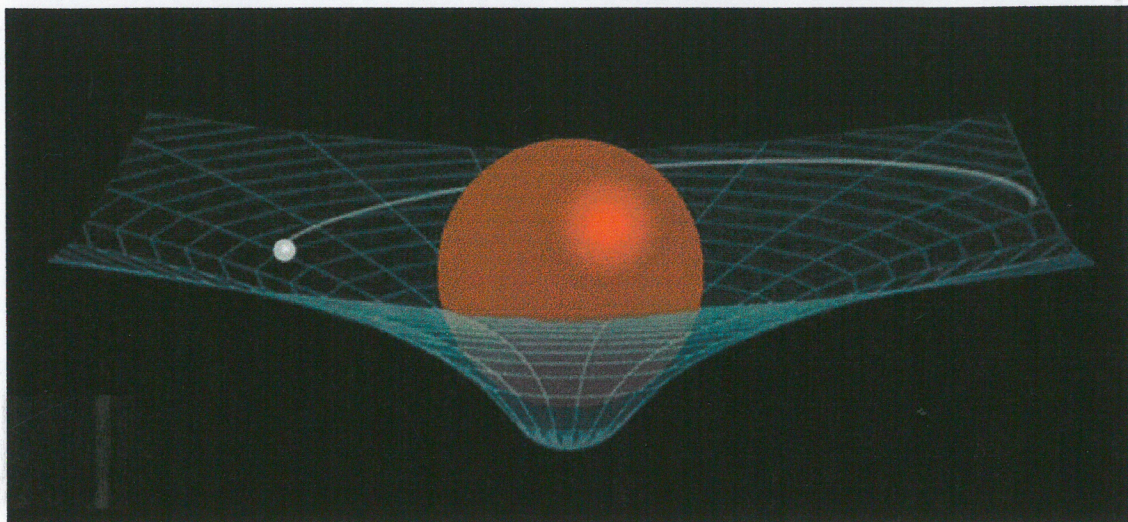


Fig. 23

Els camps gravitatoris, al ser una deformació en l'espai-temps, afecten a l'espai i al temps del seu voltant. En presència d'un camp gravitatori, el temps passa més lentament quan més potent és la curvatura de l'espai-temps allí. Per altra banda, l'espai s'estira en la direcció de la gravetat. Per exemple, si poguéssim comparar l'espai i el temps d'aquí a la superfície de la Terra i els de la de la Lluna, que té un camp gravitatori més feble, veuríem que aquí els objectes serien més allargats mentre que el temps passaria més lentament. Tot i així, aquestes diferències són molt petites.

6.6. Les lents gravitacionals

Les lents gravitacionals són un fenomen que fa que observem alguns astres reflectits, duplicats. Aquest fenomen també era predit per la TRG. És un cas especial de la desviació de la llum quan passa per un camp gravitatori potent. Quan des de la Terra observem una galàxia que amaga un astre lluminós amagat darrera seu, si aquests estan alineats, llavors la llum de l'astre lluminós es doblega al passar per la galàxia i nosaltres el veiem reflectit davant la galàxia varies vegades, però en realitat només és un sol cos (*Fig. 24*).

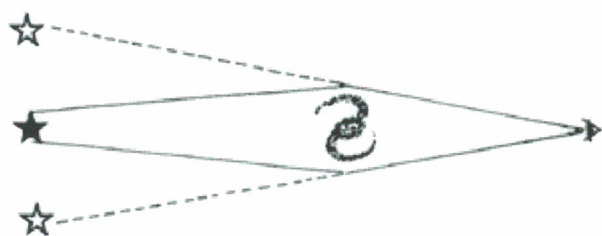


Fig. 24

L'exemple més famós de lent gravitacional és l'anomenada **Creu d'Einstein** (Fig. 25). Aquesta va ser descoberta l'any 1985 i és la imatge d'un quàsar llunyà reflectit fins a quatre vegades a causa d'una galàxia que s'interposa al mig i fa de lent.

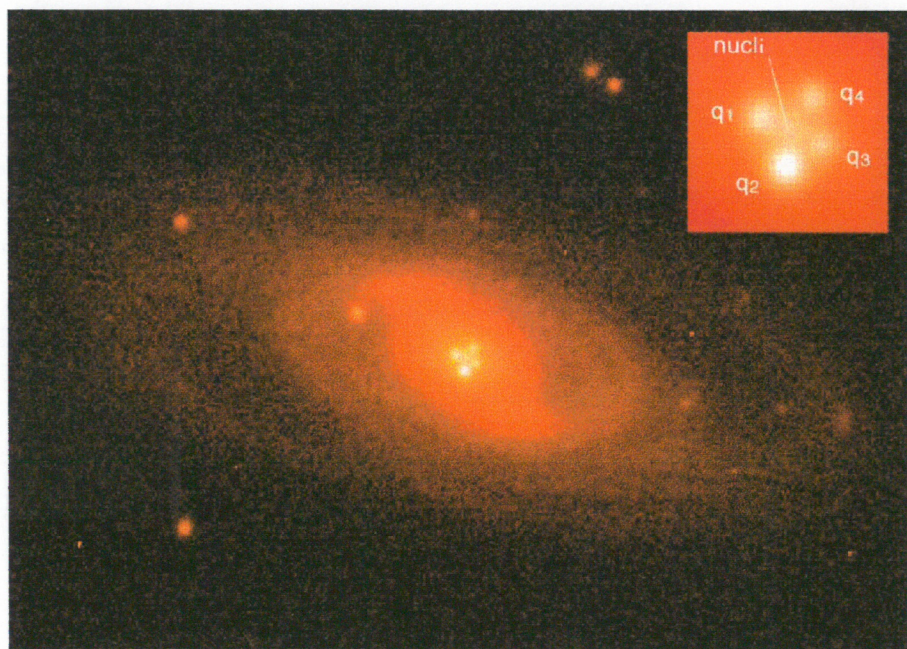


Fig. 25

En un principi es pensava que els quatre punts lluminosos eren el centre de la galàxia però xocava que la majoria de les galàxies només tenia un nucli i aquesta en tenia quatre. Al cap d'uns anys de fer observacions es va arribar a la conclusió que aquests punts lluminosos no eren el centre de la galàxia sinó que eren la imatge reflectida d'un quàsar que estava alineat darrera la galàxia. El nucli del quàsar es troba en el centre dels quatre punts lluminosos darrere la galàxia. El nucli de la galàxia no és visible ja que el tapen aquests reflexos.

6.7. Els forats negres

Un **forat negre** és un astre que té una gran densitat (molta massa concentrada en un espai molt petit) cosa que fa que l'espai estigui molt corbat, tant que ni la llum en pot escapar, per això es diu forat negre (*Fig. 26*). Això es deu a que la velocitat de la llum no supera la **velocitat d'escapament** del forat negre (velocitat necessària perquè un cos es pugui escapar d'un camp gravitatori i no retorni).

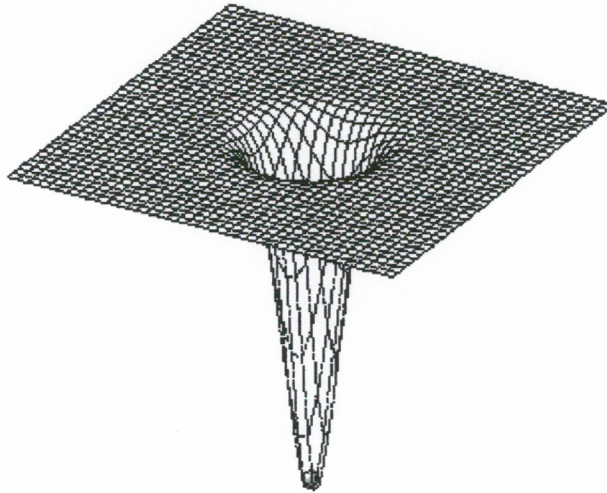


Fig. 26

Aquests cossos tenen una gran gravetat a causa de la seva massa i es van empassant altres cossos que es senten atrets cap a ells (*Fig. 27 i 28*). D'aquesta manera la seva massa augmenta cada vegada més i alhora el seu camp gravitatori es fa més potent, cosa que fa que puguin atreure més cossos i així successivament.

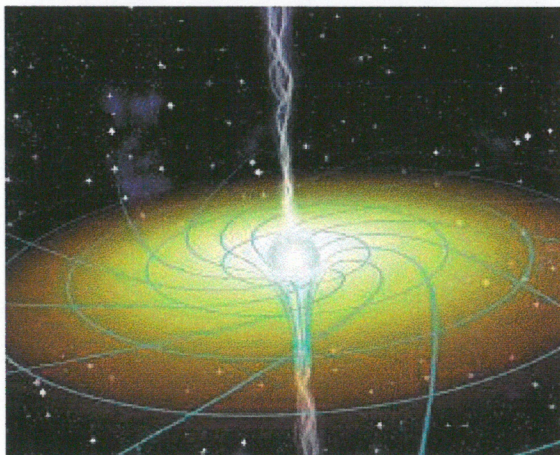


Fig. 27

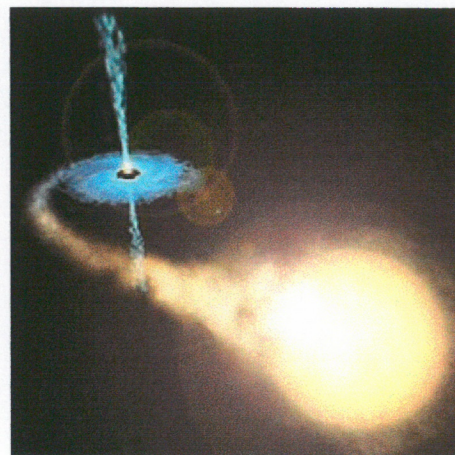


Fig. 28

Els forats negres es solen formar quan mor una estrella que tingui molta massa. Tard o d'hora, qualsevol estrella amb una massa superior a dues vegades la del Sol s'acabarà col·lapsant i explotant originant així un forat negre. El camp gravitatori d'un forat negre no sofreix cap canvi al passar de ser una estrella a ser un forat negre ja que la massa continua sent la mateixa, l'espai que ocupi és igual pel que fa al camp gravitatori més llunyà, el que és diferent és l'espai temps en la proximitat del forat negre. Allí al estar l'espai temps més corbat, la gravetat augmenta molt de sobte ja que on abans hi havia l'estrella, ara no hi ha res, és en aquell espai on el camp gravitatori és molt potent.

Llavors, si els forats negres no poden emetre llum, com els podem detectar en l'immensitat de l'univers? Es va descobrir que quan un cos quan un cos és suficientment a prop d'un forat negre i aquest se l'empassa a poc a poc, primer la matèria forma un remolí al voltant del forat negre girant a gran velocitat a causa de la gravetat i llavors aquesta va sent empassada pel forat (*Fig. 27*). Doncs bé, resulta que aquesta matèria que gira en espiral al voltant del forat, a causa de la seva gran velocitat, emet **raigs X**, cosa que podem detectar des de la Terra i és senyal inequívoca de que en aquell punt de l'univers hi ha un forat negre.

Aquests grans monstres de l'univers encara són un misteri per a la física actual. Els últims estudis revelen que tot i que la llum i les ones electromagnètiques no se'n poden escapar, algunes partícules atòmiques i subatòmiques sí que ho poden fer.

6.8. Els forats de cuc

Els **forats de cuc** (o ponts d'Einstein-Rosen) són una altra estructura de l'univers formada a causa del plegament de l'espai temps. Els forats de cuc són equiparables als forats fets per un cuc en una poma. A través d'aquests forats, el cuc pot viatjar d'un punt de la superfície de la poma a un altre sense tenir que desplaçar-se per la superfície. Els forats de cuc són unes dreceres de l'univers que permeten anar d'un punt de l'univers a un altre que estiguin connectats a través d'aquest. Estan formats per dues estructures similars a les dels forats negres unides pel seu coll (*Fig. 29*). Són estructures teòriques ja que no se sap si es poden crear a l'univers i que siguin estables.

Se suposa que haurien de ser forats negres supermassius capaços de corbar l'espai i temps per dos punts. Requereixen unes condicions molt especials que avui dia l'home no pot recrear, potser en el futur els podrem utilitzar per a poder explorar llocs llunyans de l'univers. No se sap si en el cas de que existissin els forats de cuc ens comunicarien amb altres punts del nostre univers o fins i tot amb altres universos diferents (*Fig. 30*).

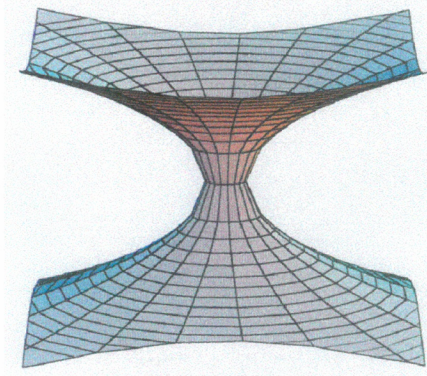


Fig. 29

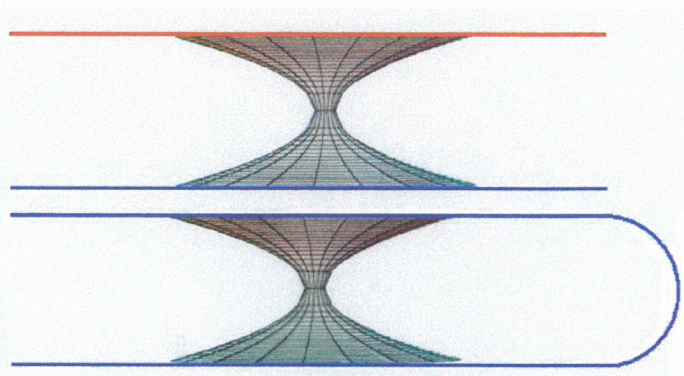


Fig. 30

Annex: Biografia d'Albert Einstein

He decidit d'incloure la biografia d'Albert Einstein com un annex al treball, a mode de curiositat, perquè crec que així es pot entendre millor la cronologia de la Teoria de la Relativitat i l'evolució d'Einstein com a científic. A més a més, durant la realització d'aquest treball he llegit diverses cites i pensaments seus que trobo que són genials. Admiro la seva actitud crítica sense límits i el seu esperit unificador.

Albert Einstein (Ulm, Alemanya 1879 – Princeton, Nova Jersey 1955)

Albert Einstein va néixer a Ulm (Alemanya) el 14 de Març de 1879. Va ser fill de Hermann Einstein i Pauline Koch, un matrimoni de jueu. Al cap d'un any es van traslladar a Munich. De petit ja mostrava interès per l'àlgebra que li ensenyava un oncle seu, Jacob. De petit, a l'escola era un estudiant distret que no prestava el mínim interès per les assignatures de lletres, tot i que era aplicat en les matemàtiques. El 1894, a causa de problemes econòmics a l'empresa de Hermann, la família es muda a Pavia (Itàlia) tot i que Einstein es queda a Munich per a finalitzar els seus estudis de batxillerat i reunir-se més endavant amb la seva família, però Einstein va abandonar el Gymnasium abans d'obtenir el títol de batxillerat. Això va fer que quan la família d'Einstein el volgués matricular a l'**Institut Politècnic de Zúric**, al no tenir el títol de batxiller, hagués de sotmetre's a una prova d'accés que va suspendre a causa d'una nota deficient en una assignatura de lletres. El director del Politècnic, sorprès per les altes puntuacions en les assignatures de ciències li va recomanar que es tragués el batxiller per poder entrar directament.



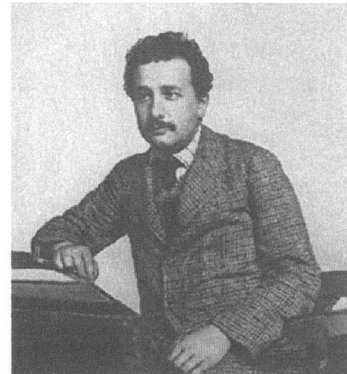
Einstein va aconseguir graduar-se l'any 1896, als 16 anys. Poc després va ingressar al Politècnic amb la intenció d'estudiar física. Allí va ser alumne del matemàtic **Hermann Minkowski**, que després l'ajudaria a formalitzar la seva Teoria de la Relativitat General gràcies als seus coneixements en la geometria de l'espai-temps. L'any 1898 Einstein coneix a **Mileva Maric**, una companya de classe de caràcter

feminista y radical, de la que es va enamorar. El 1900 Einstein es va graduar i el 1901



va obtenir la nacionalitat suïssa. Einstein i Mileva van tenir una filla el gener de 1902, a la qual van anomenar Liserl. El 6 de gener de 1903 es van casar (fotografia de l'esquerra). Tot i estar graduat, a Einstein li va costar molt trobar feina. Al Politècnic no li donaven feina a causa de les disputes que tenia amb

alguns professors. Al final, el pare d'un amic seu li va aconseguir una feina a l'**Oficina de Patents Suïssa de Berna** l'any 1902. La relació d'Albert amb Mileva era distant. En un principi, Albert discutia les seves teories amb Mileva i solia dir que entre els dos canviarien tota la física, ells dos contra el món, però, a mesura que passava el temps, Einstein s'anava aïllant en sí mateix, deixant de banda la seva esposa per a poder-se concentrar millor en les seves teories. D'aquest matrimoni en surten dos fills més: Hans Albert (1904) i Eduard (1910). L'any 1904 aconsegueix un treball fix a l'oficina de patents (fotografia de la dreta).



L'any 1905 és l'anomenat "annus mirabilis" d'Einstein (del llatí: "any meravellós") ja que va ser el seu any més prolífic. Al llarg de 1905, Einstein realitza cinc treballs claus per a la física:

1. **"Un punt de vista heurístic sobre la producció i transformació de la llum"** (títol original: "*Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*"). Article escrit el 18 de març de 1905 i publicat a *Annalen der Physik* el 9 de juny de 1905).

En aquest article Einstein explica l'efecte fotoelèctric utilitzant la teoria de Plank. Per aquest treball rep el **Premi Nobel de la Física el 1921** (aquest no menciona la Teoria de la Relativitat, se li concedeix pels seus descobriments en fotoelectricitat).

2. **"Una nova determinació de les dimensions moleculars"** (títol original: "*Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen*"). És una tesis doctoral que envia el 30 d'abril de 1905 a la Universitat de Zürich, que aprova unànimement el doctorat el dia 27 de juliol i li és atorgat formalment el 15 de gener de 1906).

Aquest article contenia una predicció del nombre i de la massa de les molècules contingudes en un determinat volum de líquid, així com de la seva mobilitat erràtica.

3. **“Sobre el moviment requerit per la teoria cinètica molecular del calor de petites partícules suspeses en un líquid estacionari”** (títol original: “Über die von der molekularen kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”. Article escrit l’11 de maig de 1905 i publicat a *Annalen der Physik* el 18 juliol de 1905).

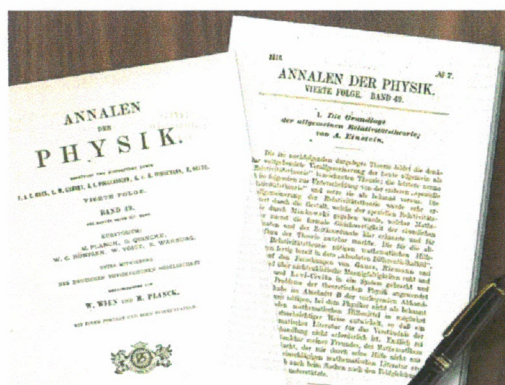
Aquest article tracta sobre el moviment brownià.

4. **“Sobre la electrodinàmica dels cossos en moviment”** (títol original: “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. Article escrit el 30 de juny de 1905 i publicat a *Annalen der Physik* el 26 de setembre de 1905).

És l’article que parla sobre la Teoria de la Relativitat Especial. En ell Einstein desenvolupa tota la seva teoria sobre com afecten les altes velocitats a les magnituds mesurades des de sistemes de referència diferents.

5. **“Depèn la inèrcia d’un cos del seu contingut en energia?”** (títol original: “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?”). Article escrit el 27 de setembre de 1905 i publicat a *Annalen der Physik* el 21 de novembre).

Aquest article amplia la Teoria de la Relativitat Especial amb la famosa equivalència massa-energia: $E = mc^2$.



L’any 1906 Einstein va ser contractat per la Universitat de Berna com a professor auxiliar. Un any més tard, el 1907, comença els seus estudis per a generalitzar la Relativitat Especial i incloure els efectes dels camps gravitatoris. Einstein demana ajuda a Hermann Minkowski per a que l’ajudi en la part formal de la seva Teoria de la Relativitat General. El 1909 es nomena professor de la Universitat de Zuric i el 1911 de la Universitat de Praga. Aquest mateix any participa en el primer Congrés Solvay on s’ha reunit el millor de la ciència occidental. El 1910, té el seu tercer fill amb Mileva,

Eduard. El 1913 Einstein i Grossmann presenten el primer esborrany de la Teoria General de la Relativitat. És acceptat com a membre de la Reial Acadèmia de Prússia i professor de la Universitat de Berlín. El 18 de novembre de 1915, Einstein presenta els resultats correctes sobre l'angle de desviació del raig lluminós i l'avanç del periheli de Mercuri davant l'Acadèmia de Ciències de Prússia i, el 25 del mateix mes, lliura l'article que conté les equacions de camp definitives. Aquest article es publicà el 2 de desembre de 1915. El març de 1916 es publica a *Annalen der Physik* la síntesi final de la Teoria General de la Relativitat. Tot i tenir un fill petit, el matrimoni d'Einstein i Mileva no anava bé. Einstein no presta atenció a Mileva que es troba sola i decideixen divorciar-se el 14 de febrer de 1919. Uns mesos més tard, el 2 de juny de 1919 es casa amb una cosina seva, **Elsa Loewenthal** (Elsa Einstein de naixement, Loewenthal era el cognom del seu primer marit, Max Loewenthal; fotografia de la dreta). El 1922



li és lliurat, després de vuit propostes, el premi Nobel de Física de 1921 “pels seus serveis a la física teòrica i, en especial, per haver descobert la llei de l'efecte fotoelèctric”. També és aquest l'any en què publica un primer assaig sobre la teoria unificada de camps. El seu pacifisme i les seves activitats polítiques, però especialment, els seus orígens jueus irritaven als nacionalistes alemanys. A mesura que Einstein s'anava fent popular, les seves teories van començar a sofrir una campanya organitzada de descrèdit i desprestigi. L'any 1932 es van haver d'exiliar ell i la seva esposa als Estats Units per por que Adolf Hitler pugés al poder, com va acabar succeint l'any 1933. Aquest mateix any va ser nomenat professor a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton. El 1940 obté la nacionalitat americana sense renunciar a la suïssa. El 1952 declina l'oferta per convertir-se en el segon president de l'estat d'Israel. L'any 1955 escriu una carta al seu amic Bertrand Russell en què accepta afegir el seu nom a un manifest que exigeix la renúncia per part de totes les nacions a l'armament nuclear.

Einstein dedica l'última etapa de la seva vida a la búsqueda d'una teoria que unifiqui tota la física ja que la Teoria de la Relativitat, que descriu el comportament de l'Univers, no és compatible amb la Mecànica Quàntica, que descriu el moviment de les partícules subatòmiques, estan basades en principis contradictoris. Einstein no aconsegueix trobar mai aquesta teoria tot i que ell sap que ha d'existir. Durant tota la

seva vida ell sempre va dir que “és impossible que Déu jugui als daus”, tot ha de tenir un perquè al darrera i ell creia en una teoria senzilla que pogués explicar tots els fenòmens físics, una teoria del tot. Ell veia la mà de Déu darrera cada teoria científica. Per això es negava a acceptar l'existència de l'atzar, tot i ser un home de ciència, per Einstein la religió era molt important.. El 18 d'abril de 1955 mor a l'hospital de Princeton com a conseqüència de l'aneurisma abdominal sofert el 13 d'abril.

Conclusions

Realitzant aquest treball he descobert una teoria que era totalment nova per mi, la Teoria de la Relativitat, d'Albert Einstein. Abans de començar el treball de recerca ni tan sols n'havia sentit a parlar però de seguida que me'n van parlar i vaig començar a buscar informació a internet ja no vaig poder parar. Cada vegada que trobava més informació s'em plantejaven més qüestions que no sabia resoldre. He de reconèixer que al principi em va costar una mica d'entendre la relativitat especial, concretament les paradoxes espai-temps, però a base de buscar informació les vaig acabar entenent. Doncs bé, aquest treball de recerca és la conseqüència d'aquestes ganes de satisfer la meua curiositat i alhora donar a conèixer aquesta teoria tan interessant i desconeguda a la vegada.

Durant el transcurs d'aquests mesos he estudiat la Teoria de la Relativitat tant des del punt de vista del contingut, com des del punt de vista històric. Pel que fa al contingut, he vist com a partir d'acceptar com a vàlids dos postulats aparentment contradictoris, es pot desenvolupar tota una teoria alternativa que fins i tot pot superar les capacitats de l'anterior. En la Teoria de la Relativitat, a l'acceptar que la velocitat de la llum és igual per a qualsevol observador i que, tot i així, el principi de relativitat que ja va formular Galileu continua sent vàlid s'arriba a la conclusió que l'espai i el temps no són absoluts. La TRE anuncia que l'espai i el temps difereixen per a observadors situats en diferents sistemes de referència que es mouen a velocitats properes a la llum. Les nostres concepcions familiars de l'espai i el temps, que ningú qüestionava fins a Einstein, deixen de ser vàlides. Només en el cas que les velocitats siguin petites podem seguir considerant l'espai i el temps com a absoluts ja que l'aberració és imperceptible. Aquest és el motiu pel qual en la nostra vida quotidiana nosaltres no notem cap canvi en el temps ni en l'espai, perquè les diferències són insignificants.

Pel que fa al punt de vista històric, ara tinc una visió global de tota la història de la física. Per a poder estudiar la relativitat, com que és una teoria que modifica tota la física anterior, abans he necessitat d'introduir l'evolució històrica abans de la relativitat. Per a poder entendre la TRE abans he col·locat dos apartats que parlen un de l'evolució històrica de l'estudi del moviment i un altre sobre la naturalesa de la llum, que són

justament els dos postulats en que es basa aquesta. Després, per a poder parlar de la TRG, primer tracto l'evolució de l'astronomia i de la geometria. Sinó no podria relacionar l'estructura de l'Univers amb la geometria de l'espai-temps. Amb tot això, ara conec, a grans trets, als grans genis de la història de la ciència, com són Galileu, Newton o Einstein. He estudiat el naixement de la Teoria de la Relativitat, des del principi quan Einstein publica aquell article a l'*Annalen der Physik* i primer és criticat per tothom fins que poc a poc la seva teoria va guanyant adeptes i fins avui en dia, en que és plenament acceptada per la comunitat científica i és la base per a poder fer física. La Teoria de la Relativitat s'ha establert com a nou paradigma substituïnt a la mecànica clàssica de Newton.

Una de les coses que ens va ensenyar Einstein és a evitar els prejudicis. Aquests són un obstacle per a l'avanç de la ciència. Ens ho hem de qüestionar tot, hem de tenir una actitud crítica tal com feia Einstein. Ell sempre deia que era un nen que no havia crescut mai. Sempre explicava que de petit ell sempre es feia preguntes sobre les coses més elementals com l'espai i el temps, coses en que els adults no es paren ni tan sols a pensar ja que troben que són evidents. Einstein va créixer però mai va deixar de formular-se aquelles preguntes que tant l'intrigaven. La resta de científics prenen la mecànica clàssica de Newton com a veritat absoluta. Això, en part, es deu al prestigi que va adquirir Newton amb els seus grans descobriments com la Teoria de la Gravitació Universal. No podia ser que Newton, que va crear una teoria que descriu quasi a la perfecció el moviment de tots els planetes, estigués equivocant-se en quant a coses tan aparentment senzilles com el temps o l'espai. L'objectiu final d'Einstein era trobar una teoria unificada que pogués explicar tots els fenòmens físics, reconciliant la seva teoria de la relativitat amb la mecànica quàntica, cosa que mai va arribar a aconseguir i que avui dia encara està per resoldre.

En resum, el fer aquest treball de recerca m'ha donat una visió més àmplia de la ciència i del món en general. Ara ja he resolt la meua curiositat de l'inici del treball sobre la relativitat i les paradoxes espai-temps, tot i que podria aprofundir molt més sobre la relativitat si tingués més temps.

Bibliografia

Llibres

- EINSTEIN, ALBERT. *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*. 1999. Grandes Obras del Pensamiento Contemporáneo, Vol. 2. Segona edició. España. Editorial Altaya.
- MASSÓ I SOLER, EDUARD. *Curs de relativitat especial*. 1998. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, Vol. 19. Primera edició. Universitat Autònoma de Barcelona. Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions.
- ALEMAÑ, RAFAEL. *Relatividad para todos*. 2004. Primera edició. Madrid. Equipo Sirius.
- EINSTEIN, ALBERT; J. STACHEL, JOHN. *Einstein 1905: un año milagroso, cinco artículos que cambiaron la física*. 2001. Primera edició. Barcelona. Crítica Cop.
- HAWKING, STEPHEN. *Historia del tiempo. Del Big Bang a los agujeros negros*. Biblioteca de Divulgación Científica. Capítol 1: “Nuestra imagen del universo” i Capítol 2: “Espacio y tiempo”.

Articles

- QUEVEDO, JACINTO. «Gedankenexperiment de una exposición». Suma, 49, Juny 2005, pàg. 81-94.
- ASOREY, MANUEL. «El reto del espacio-tiempo cuántico». GÓMEZ, CÉSAR. «¿Qué nos ha enseñado Albert Einstein?». LATORRE, JOSÉ IGNACIO. «Relatividad, innovación y GPS». La Vanguardia. Sección: Opinión, Temas de debate: “La Teoría de la Relatividad”. 3 Abril de 2005, pàg. 36-37.

Vídeos

- SAGAN, CARL. Sèrie de televisió: *Cosmos*. Capítols: *La vida dels estels* (títol original: *The Lives of the Stars*) i *Viatges a través de l'espai i del temps* (títol original: *Journeys in Space and Time*).
- DR. GOODSTEIN, DAVID L. Capítols: *Las ecuaciones de Maxwell* (títol original: *Maxwell's Equations*), *El experimento de Michelson-Morley* (títol original: *The Michelson-Morley Experiment*), *La transformación de Lorentz* (títol original:

The Lorentz Transformation) i *Velocidad i tiempo* (títol original: *Velocity and Time*).

- WGBH EDUCATIONAL FOUNDATION. *Einstein en la intimidad*. 1996.

Pàgines web

- 2005, *Any mundial de la física* [en línia]. <<http://www.amf2005.org/index.htm>> [consulta: maig de 2005].
- INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE CANARIAS. *Relatividad* [en línia]. <<http://www.iac.es/cosmoeduca/relatividad/index.html>> [consulta: juny de 2005].
- XTEC: AULANET. *Relativitat: paradoxes espai-temps* [en línia]. <<http://www.xtec.es/aulanet/seglexx/navegador/index.htm>> [consulta: maig de 2005].
- HACYAN, SHAHEN. *Relatividad para principiantes* [en línia]. <<http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/078/htm/relativ.htm>> [consulta: juny de 2005].
- FERNÁNDEZ-PEÑA ACUÑA, CARLOS. *La Naturaleza de la Luz* [en línia]. <<http://www.monografias.com/trabajos5/natlu/natlu.shtml>> [consulta: juny de 2005].
- *L'experiment de Michelson-Morley* [en línia] <<http://fisica.udea.edu.co/~mpaez/moderna/cap2/node3.html>> [consulta: juny de 2005].
- BOOTELLO ACEDO, GABRIEL. *Historia de la Astronomia* [en línia]. <<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Astronomia/03/index.html>> [consulta: setembre de 2005].
- ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES. *Año mundial de la física* [en línia]. <<http://www.accefyn.org.co/Einstein/AMF-2005.htm>> [consulta: desembre de 2005].
- *El Rincón de la Ciencia. 1905, Annus Mirabilis* [en línia]. <<http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/rc-85/p-3/1905.html>> [consulta: desembre de 2005].
- *Biografías y Vidas. Albert Einstein* [en línia]. <<http://www.biografiasyvidas.com/monografia/einstein/index.htm>> [consulta: novembre de 2005].

- *Wikipedia: La enciclopedia libre* [en línia]. Consultes: relativitat, relativitat especial, relativitat general, Albert Einstein, la llum, electromagnetisme, experiment de Michelson Morley, Galileu, Isaac Newton, etc.
<<http://es.wikipedia.org/wiki/>> [consulta: maig-desembre de 2005].
- *Relatividad, espacio y tiempo* [en línia].
<<http://www.fcaglp.unlp.edu.ar/~ostrov/ext2c.html>> [consulta: juliol de 2005].
- *Simultaneidad* [en línia].
<<http://fisica.udea.edu.co/~mpaez/moderna/cap2/node8.html>> [consulta: juny de 2005].
- *La relatividad de la simultaneidad* [en línia].
<http://www.udlap.mx/~is113696/IS446/La%20relatividad_files/frame.htm> [consulta: juny de 2005].
- ASTROCOSMO. *De la simultaneidad* [en línia].
<http://www.astrocosmo.cl/relativi/relativ-03_01.htm> [consulta: setembre de 2005].
- *El tiempo es relativo* [en línia].
<<http://www.educared.net/aprende/relatividad2/relativ25.htm>> [consulta: juliol de 2005].
- *Año internacional de la física. Los experimentos con muones* [en línia].
<<http://www.omerique.net/fisica2005/relatividad.html>> [consulta: juliol de 2005].
- ASTROCOSMO. *Comprobaciones experimentales de la Teoría de la Relatividad Especial o Restringida* [en línia]. <http://www.astrocosmo.cl/relativi/relativ-04_14.htm> [consulta: agost de 2005].
- *La geometría de la física* [en línia].
<<http://www.itcr.ac.cr/informatec/2005/Marzo/n22.htm>> [consulta: juny de 2005].
- *La paradoja del tren y el túnel* [en línia].
<<http://www.ugr.es/~jillana/applets/tren.html>> [consulta: agost de 2005].
- *La masa inercial, concepto expandido* [en línia].
<<http://www.arrakis.es/~dacosta/>> [consulta: octubre de 2005].
- $E=mc^2$ [en línia]. <<http://leo.worldonline.es/calambre/e=mc1.htm>> [consulta: juliol de 2005].

Agraïments

En primer lloc agraeixo tota l'ajuda que m'ha donat el Miquel Sánchez, el meu tutor del treball de recerca. M'ha ajudat molt, m'ha passat informació i sempre que he tingut un dubte o no acabava d'entendre alguna cosa s'ha ofert per quedar a l'hora del pati i explicar-m'ho. A més a més, el que és més important per mi és el suport moral ja que tot i que en un principi no estava gaire convençut del tema, per la seva dificultat i perquè ell és professor de matemàtiques i no de física, i tot i així va confiar en mi i en el transcurs del treball m'ha ajudat en tot el que ha pogut i sempre m'ha aconsellat bé.

També agraeixo la seva col·laboració a la Mercè de la Muela que, tot i no tenir-hi cap obligació, va accedir a llegir-se el meu treball i redactar-me el pròleg durant les vacances de Nadal. En un principi ella es va oferir per a revisar el treball i detectar si hi havia cap errada, ja que ella ha estudiat física, però després va decidir que ja que se l'havia de llegir per revisar-lo, també faria el pròleg.

He d'agrair també la paciència i el suport per part dels meus pares. Perquè si algun dia em quedava fent el treball fins tard a l'ordinador sé que no els deixava dormir i especialment per aguantar-me en aquells moments en que m'enfadava perquè no entenia alguna cosa. El seu suport i confiança en mi han estat fonamentals.

Dono les gràcies també a totes les persones que m'han ajudat passant-me informació sense ni tan sols demanar-los-ho. En són un exemple la Glòria Fusté (professora de biologia) que em va gravar en vídeo un programa que feien a TV3 sobre Einstein i la Relativitat o també la Meritxell Joanpere i la Noemí Hermoso, que em van donar un article que van trobar al diari que tractava aquest tema.

Finalment, em queda agrair a totes aquelles persones que m'han recolzat en el meu treball i s'han interessat per la meva feina, preguntant-me de què tractava això de la relativitat, tot animant-me.

A tots ells, moltes gràcies.