Annex 4: Exponents de Lyapunov

Hem mostrat que els sistemes caòtics tenen una gran sensibilitat a les condicions inicials. Per quantificar com trajectòries molt properes se separen en l'espai de fases, el matemàtic rus Alexander Lyapunov (1857-1918) va formular uns exponents que mostraven com les òrbites se separaven.

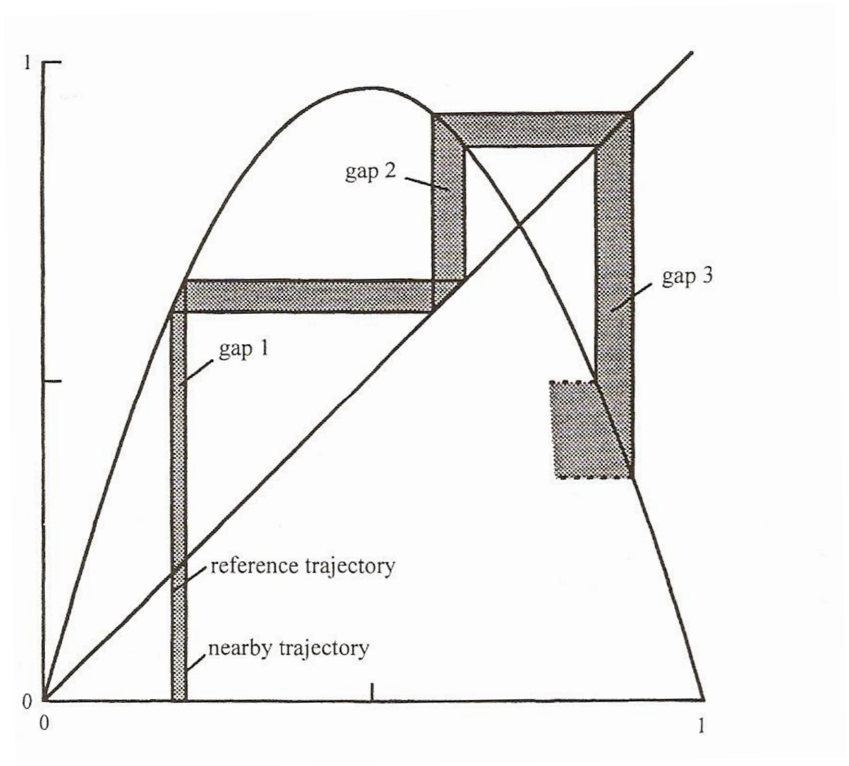

Figura 69

En la gràfica de la figura 69 es pot veure com en la funció logística dos punts inicials molt propers van allunyant les seves òrbites.

En aquest apartat amb δ ens referirem a la diferència que hi ha entre dos punts a l'espai de fases en el mateix temps.

Lyapunov va suggerir que la diferència entre les òrbites hauria de venir donada per:

$$\delta_n = \delta_a e^{bn}$$

On n es el nombre d'iteracions, a el temps inicial.

Anem a la funció logística i mostrem δ per diferents k per exemple k=1,2 k=3,3

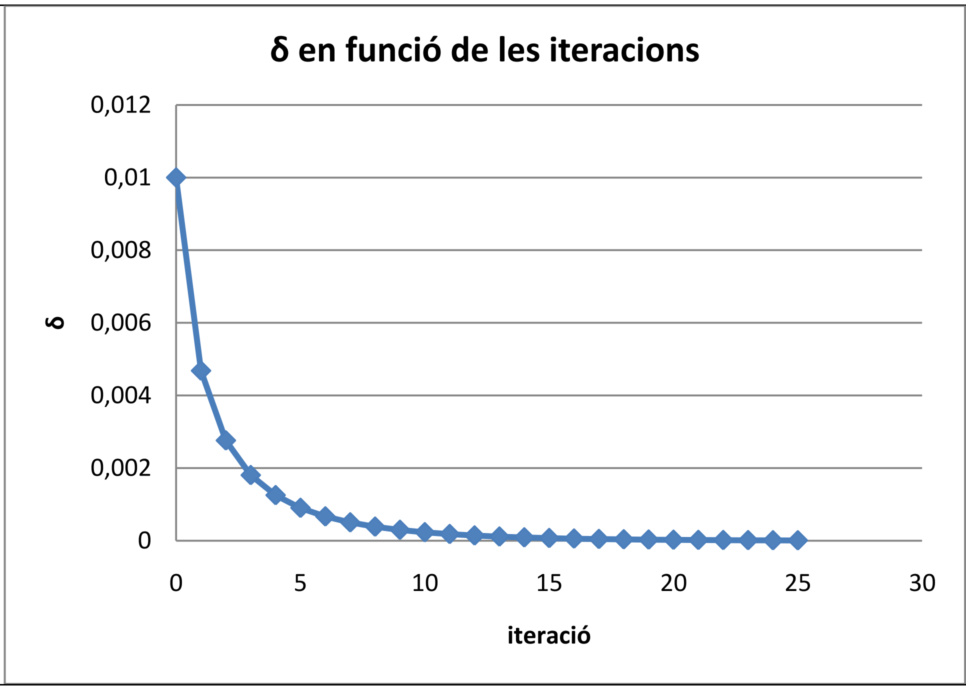

Figura 70

K=1,2 es veu clarament que les dues trajectòries convergeixen exponencialment. Hi ha un atractor. $(x_0 = 0{,}3 \quad x'_0 = 0{,}31)$

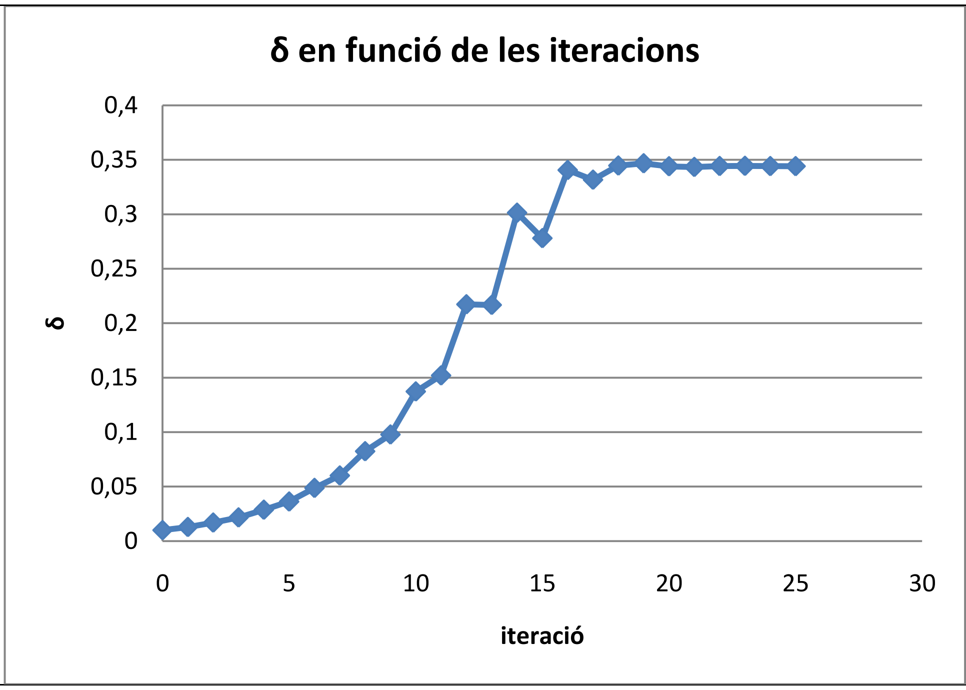

Figura 71

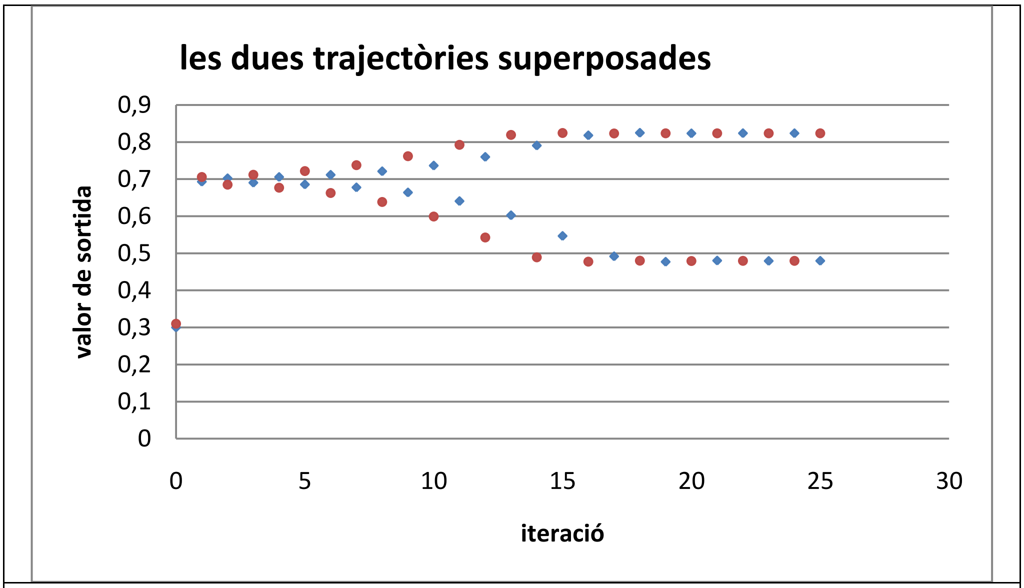

Figura 72

Pels mateixos puts d'inici veiem que la diferència va creixent fins a estabilitzar-se en la diferència que hi ha entre els dos atractors. Si canviem els puns inicials ara des de 0,1 i 0,75 veiem:

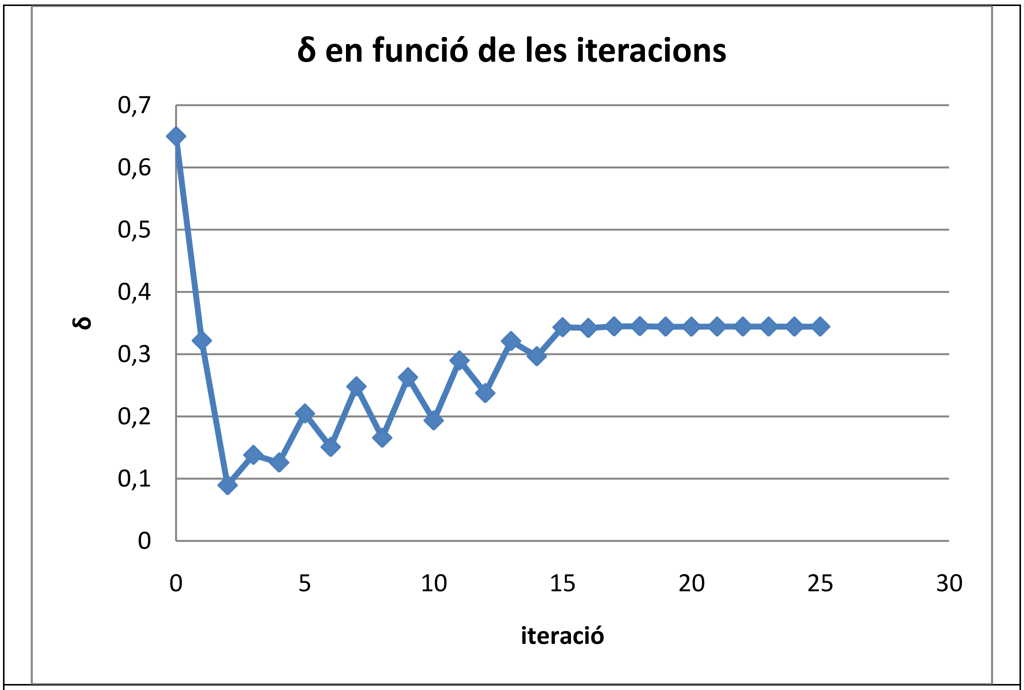

Figura 73

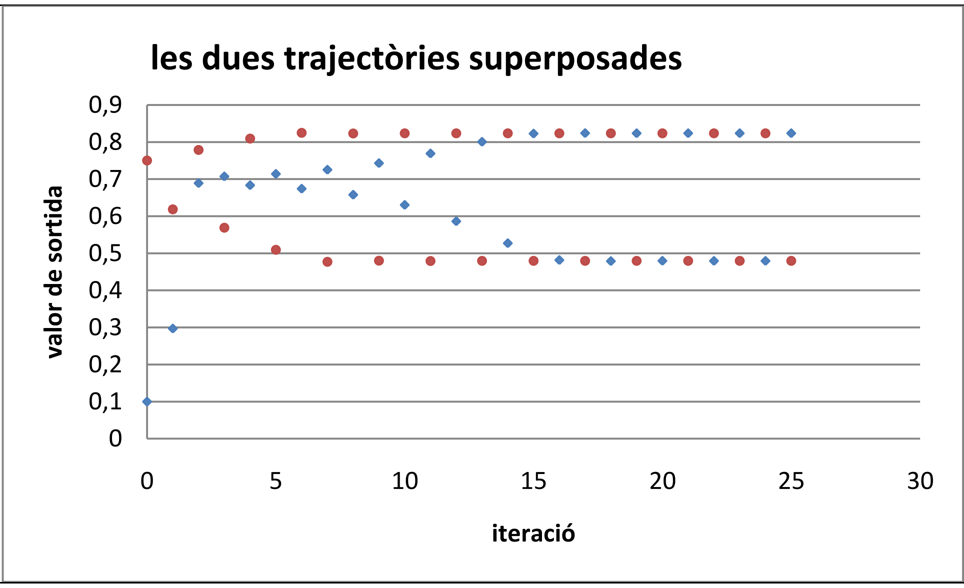

Figura 73

Al haver-hi dos atractors per k=3,3 les òrbites tendiran a mantenir una distància la que hi ha entre els dos atracotrs en aquest cas aproximadament 0,35. En aquest últim cas la diferència ha disminuït fins a ser la diferència entre els dos atractors.

Per una k en règim caòtic

k=3,92

per k=3,92 obtenim el següent gràfic valors inicials de 0,3 i 0,31

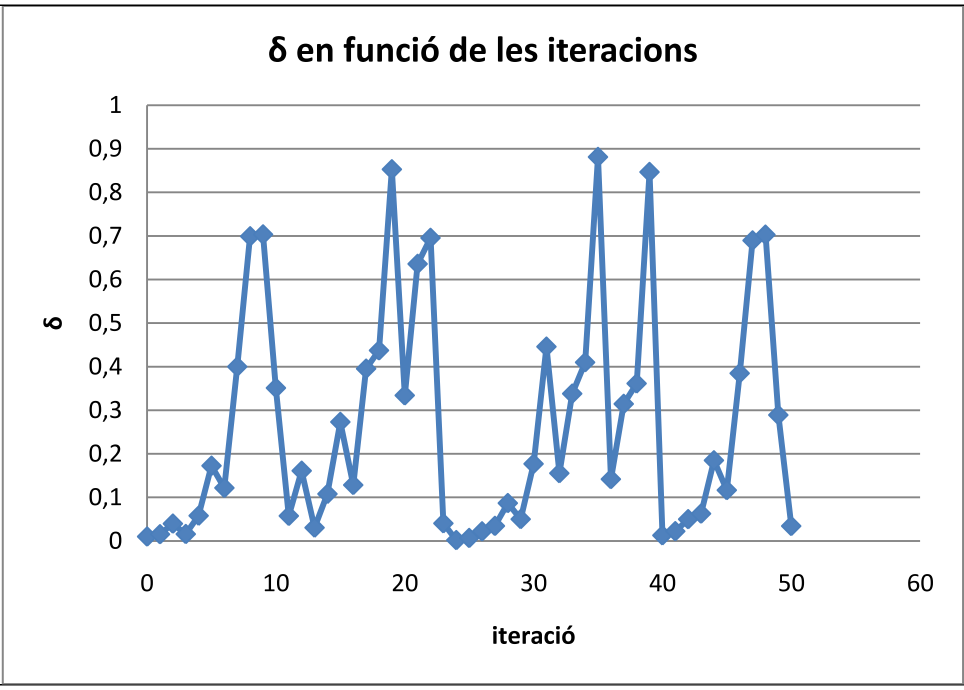

Figura 74

I si ara escollim dos punts de partida diferents i separats amb menys distància per exemple 0,44 i 0,439

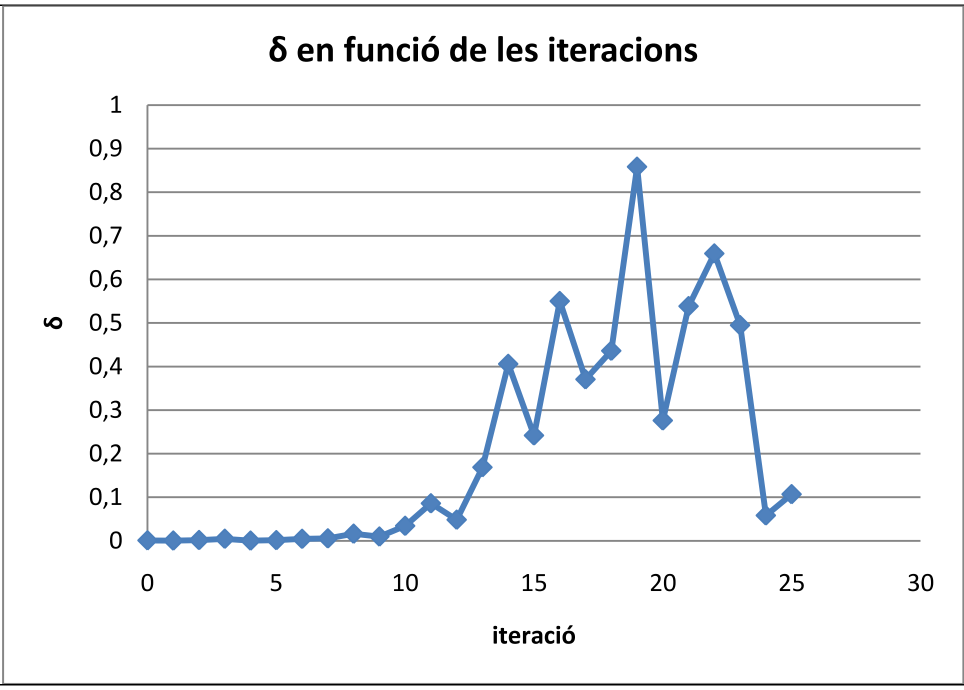

Figura 75

En les figures 74 i 75 es veu que la diferència va variant en funció de la iteració i no s'hi troba cap regularitat, és evident, no hi ha punts atractors. En aquest últim cas la diferència entre les òrbites era molt petita i ha anat creixent ràpidament. Aquí anem:

de l'expressió :

$$\delta_n = \delta_a e^{bn}$$

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$

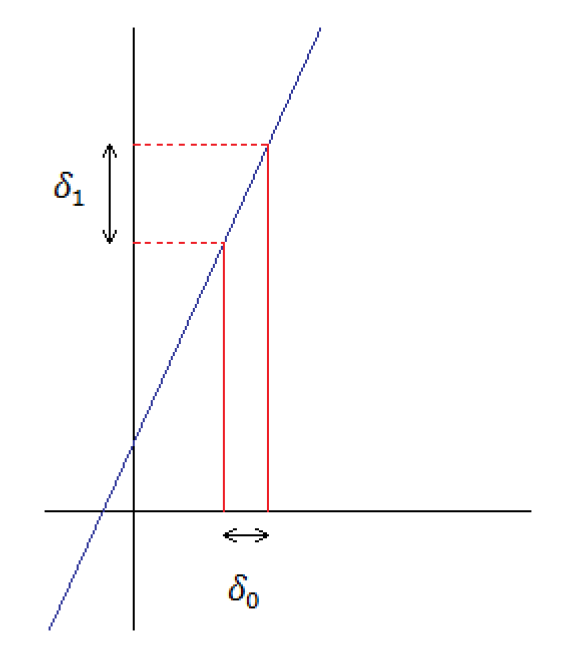

Figura 76

Iterant gràficament (figura 76) es veu que $\delta_1$és la distancia a l'ordenada respecte δ_0. I si la diferència entre els dos punts la fem tendir a zero obtenim:

$$\lim_{\delta_0 \to 0} \frac{\delta_1}{\delta_0} = f'(x_0)$$

Això seria el grau en que canvia en el primer punt.

El grau en que divergeix en el següent punt seria la derivada en el aquest punt.

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\delta_2}{\delta_1} = f'(x_1)$$

En la iteració 0 tenim x_0

En la iteració primera tenim $f(x_0) = x_1$

En la iteració segona tenim $f\big(f(x_0)\big) = x_2$

En la iteració tercera tenim $f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) = x_3$

En general a la n iteració tenim $f^n(x_0) = x_n$

Si volem conèixer el grau de divergència en la primera iteració farem:

$$\frac{d\big(f(x_0)\big)}{dx} = f'(x_0)$$

En la segona iteració:

$$\frac{d\left(f^2(x_0)\right)}{dx} = f^{'}\left(f(x_0)\right) \cdot f^{'}(x_0) = f^{'}(x_1) \cdot f^{'}(x_0)$$

En la tercera iteració:

$$\frac{d\left(f^3(x_0)\right)}{dx} = f^{'}\left(f\left(f(x_0)\right)\right) \cdot f^{'}\left(f(x_0)\right) \cdot f^{'}(x_0) = f^{'}(x_2) \cdot f^{'}(x_1) \cdot f^{'}(x_0)$$

Podríem dir que:

$$\frac{d\left(f^n(x_0)\right)}{dx} = f^{'}(x_{n-1}) \cdot \frac{d\left(f^{n-1}(x_0)\right)}{dx}$$

$$\frac{d\left(f^3(x_0)\right)}{dx} = \lim_{\delta_2,\delta_1,\delta_0 \to 0} \frac{\delta_3}{\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta_1}\frac{\delta_1}{\delta_0} = \lim_{\delta_2,\delta_1,\delta_0 \to 0} \frac{\delta_3}{\delta_0}$$

Generalitzant i considerant δ infinitèsim:

$$\frac{d\left(f^n(x_0)\right)}{dx} = \frac{\delta_n}{\delta_0}$$

Tornant a l'expressió inicial, prenent logaritmes i aïllant b:

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$

$$\ln\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \ln e^{bn} = bn$$

$$b = \frac{\ln\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right|}{n}$$

Seguim considerant δ infinitèsim, per tant:

$$b = \frac{\ln\left|\frac{d\left(f^n(x_0)\right)}{dx}\right|}{n}$$

Al realitzar la derivada ens trobarem amb expressions de l'estil $f^{'}(x_2) \cdot f^{'}(x_1) \cdot f^{'}(x_0)$ i com que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ arribarem a una expressió com aquesta

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} ln\left|f^{'}(x_i)\right|}{n}$$

Cal recordar que hem de sumar des del zero fins a n-1 en lloc de n.

I si n tendís a infinit tindríem

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} ln\left|f^{'}(x_i)\right|}{n}$$

Ara fem una reflexió: si lambda és positiu implica que les trajectòries divergeixen, per contra si lambda és negatiu les trajectòries convergeixen això mateix es podia veure ja en la definició inicial.

$$\delta_n = \delta_a e^{bn}$$

La lambda trobada per l'expressió de més amunt és l'exponent de Lyapunov si i només si la funció en qüestió només té una variable. Perquè si té més d'una variable en l'espai de fases la funció té més d'una dimensió i llavors pots derivar respecte altres eixos, fins i tot derivar respecte altres direccions. Els exponents de Lyapunov s'expressen ordenats de major a menor.

$$\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$$

Aquest conjunt se'n diu espectre de Lyapunov. Existeixen tants exponents com dimensions té l'espai de fases.

L'anomenat eix principal és l'eix pel qual en cada iteració la divergència és major, això implica que per més de 1 dimensió l'eix principal pot no coincidir en cap eix x,y,z i fins i tot anar variant la direcció. El major exponent de Lyapunov utilitza el sumatori dels valors més grans de divergència en cada iteració.

En un espai de fases n-dimensional, si considerem com a valors inicials un conjunt de punts que constitueixen una esfera (n-dimensional) infinitesimal i realitzéssim la primera iteració per tots aquests valors, observaríem com evoluciona aquesta n-esfera a per exemple un n-el·lipsoide degut a que pot haver un pendent més gran en una certa direcció respecte les altres. En les següents iteracions, l'n-el·lipsoide pot canviar l'orientació majoritària de creixement contínuament . Per això no es pot parlar d'una direcció definida associada a un determinat exponent de Lyapunov.

Hem vist que els exponents poden ser positius negatius però també poden ser zero, en aquest cas parlem d'estabilitat marginal on les diferències entre trajectòries veïnes (infinitesimalment separades) es mantenen constants.

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{0}$$

$$\delta_n = \delta_0$$

Els signes dels exponents de Lyapunov donen una idea del sistema, per exemple en un espai de fases de 3 dimensions, els tres exponents de Lyapunov negatius $(-,-,-)$ indiquen un punt fix atractor. Una combinació de $(0,-,-)$ indica un cicle, $(+,0,-)$ ens indica un atractor estrany.

Ara calcularé una aproximació dels exponents de Lyapunov per diferents sistemes d'una variable.

$$x_{n+1} = -0{,}4x_n + 2$$

Al ser una recta la derivada sempre és –0,4 fent el valor absolut i fent-li el logaritme neperià:

$$\lambda = \ln(0{,}4) = -0{,}9163$$

Aquest resultat indica que el sistema convergeix en un punt tal i com podem veure en la figura següent on s'itera la recta anterior.

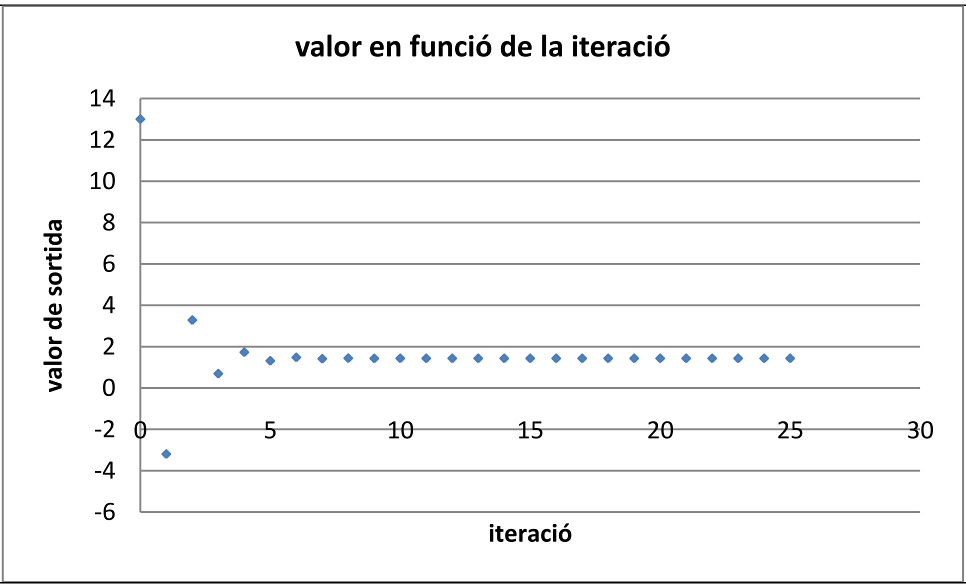

Figura 77

Ara calculem aproximadament l'exponent de Lyapunov per la funció logística per els casos anteriors és a dir k=1,2 i k=3,3

Aquí la derivada anirà variant segons el punt ja que en la funció derivada hi ha una x per tant el valor serà aproximat ja que òbviament no podré fer infinites iteracions fent-ne unes 2000 ja obtinc un resultat relativament precís.

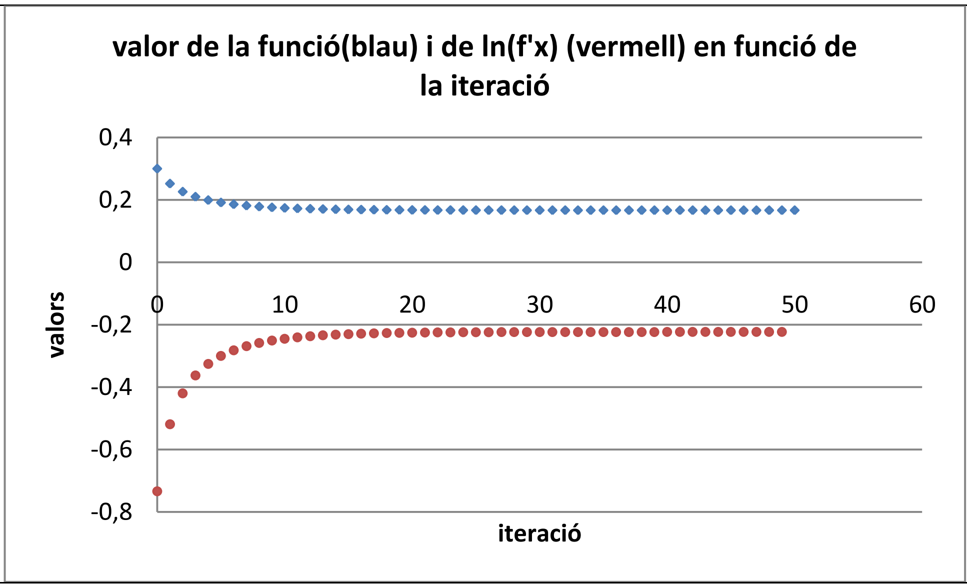

Figura 78

En aquest gràfic mostro en blau el valor de la funció en funció de la iteració i en vermell el valor del logaritme neperià del valor absolut de la derivada, que es veu clarament en aquest gràfic que el logaritme és sempre és negatiu. Estan mostrades només 50 iteracions.

Després de sumar tots els logaritmes neperians de les derivades i fer-ne la mitjana em dóna:

$$\lambda \approx -0{,}22394094$$

Per un altre punt d'inici em dóna:

$$\lambda \approx -0{,}2225252$$

Resultat esperat ja que les òrbites convergeixen en un punt fix. Les diferències són degudes a que òbviament no faig infinites iteracions.

(en el document d'excel A4_Determinació_exponents_lyapunov contingut al CD es pot veure l'exponent de Lyapunov aproximat per cada k)

Ara provem per k=3,3

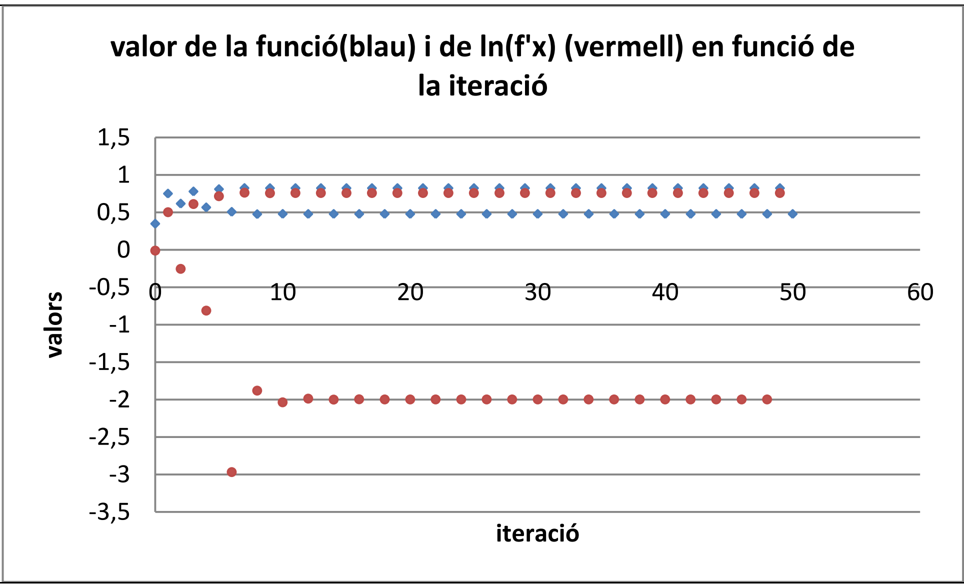

Figura 79

Es veu clarament el cicle i per dos valors inicials diferents amb 2000 iteracions em dóna:

$$\lambda \approx -0{,}61714306$$

$$\lambda \approx -0{,}61255123$$

El sistema va a parar a un parell d'atractors i l'exponent de Lyapunov corrobora que convergeix.

Ara per k=4 en règim caòtic, esperem un exponent positiu ja que les òrbites divergeixen presentant una gran sensibilitat a les condicions inicials.

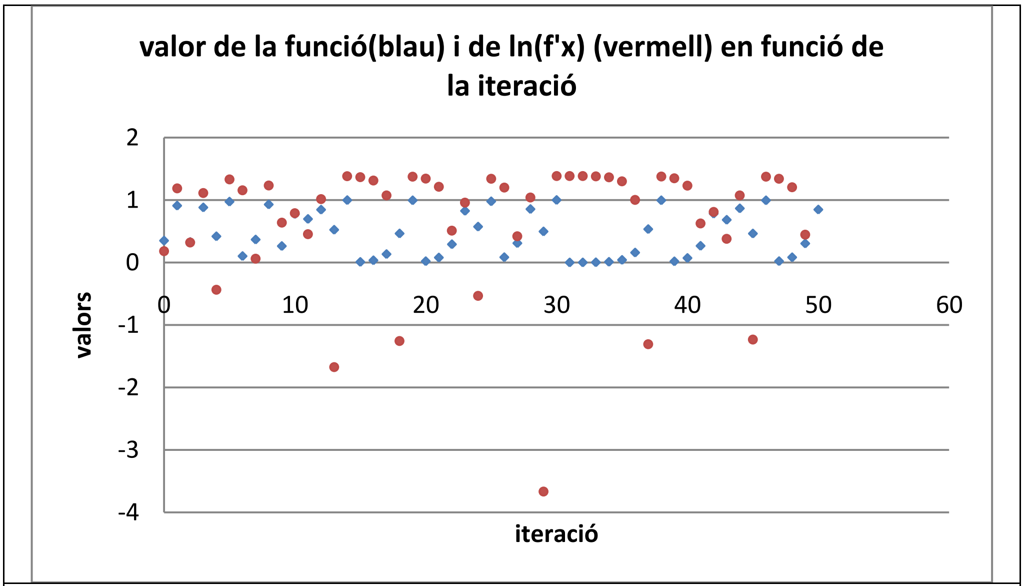

Figura 80

Es veu que no hi ha cap regularitat en les 50 primeres iteracions com estem acostumats a veure. Però en canvi si ens hi fixem els logaritmes de les derivades generalment són positius.

I ara per 10000 iteracions per dos valors d'inici diferents he trobat els següents valors de l'exponent per k=4

$$\lambda \approx 0{,}69313623$$

$$\lambda \approx 0{,}6931319$$

L'exponent és positiu tal i com esperàvem. En un atractor caòtic l'exponent no depèn del valor inicial sinó que és característic per cada atractor ja que un atractor estrany és un atractor de període infinit i comencem on comencem entrarem al atractor i obtindrem el mateix exponent.

Mostraré un últim exemple per una altre funció caòtica per exemple

$$f(x) = 3{,}5\sin(x)$$

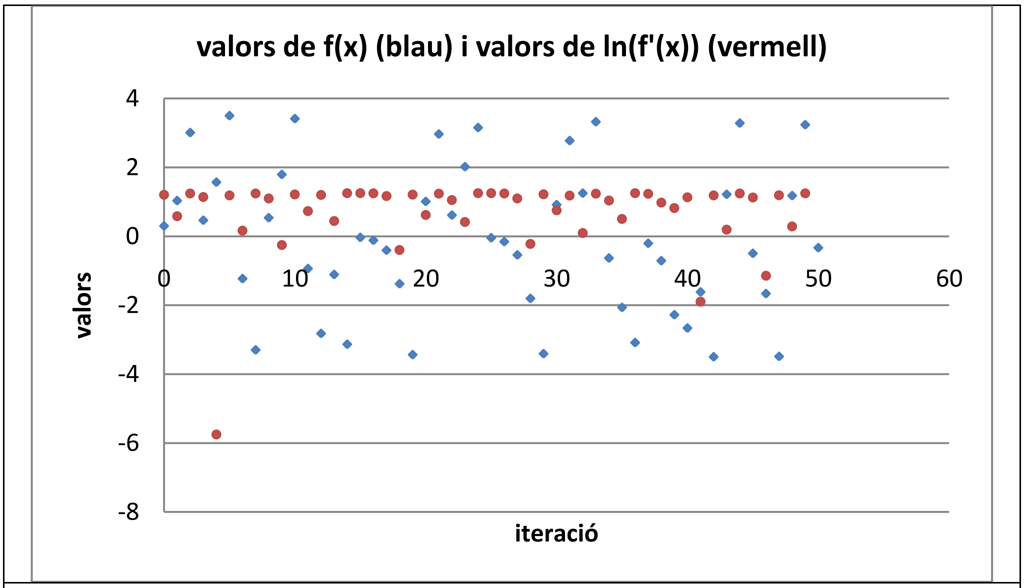

Figura 82

Es veu clarament que en general després de fer el logaritme del valor absolut de la derivada el resultat dóna positiu.

Per a les aproximacions dels exponents de Lyapunov he necessitat 300000 iteracions per tenir una miqueta de precisió i dos mostres d'aproximacions són:

$$\lambda \approx 0{,}77206264$$

$$\lambda \approx 0{,}77071747$$

L'exponent de Lyapunov et dóna una idea de com de ràpid el sistema convergeix o divergeix. Això és útil a l'hora de fer prediccions, com per exemple del temps, saber més o menys fins quan pots predir amb prou exactitud en relació als instruments de mesura que tens.

No s'ha acabat de trobar un bon mètode pel càlcul dels exponents de Lyapunov.

Ara calcularé una mena d'exponent de Lyapunov per l'atractor d'henon (dos variables) però per quantificar el caos no donaré un parell d'exponents sinó només un com a indicador. Recordo que és una idea basada en l'exponent de Lyapunov.

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} ln\left|f^{'}(x_i)\right|}{n}$$

D'aquesta expressió la derivada sorgeix de que la diferència entre els dos punts es pràcticament zero, doncs jo començaré per un parell de nombres x y i els hi realitzaré la primera iteració

$$x_{n+1} = y_n + 1 - 1{,}2x_n^2$$

$$y_{n+1} = 0{,}4x_n$$

$$y_0 = 0{,}01 \;\; x_0 = -0{,}1233$$

iteració	x	y
0	-0,1233	0,01
1	0,99175653	-0,04932
2	-0,22961722	0,39670261
3	1,33343373	-0,09184689
4	-1,2255015	0,53337349
5	-0,26885123	-0,4902006
6	0,42306222	-0,10754049
7	0,67768154	0,16922489
8	0,61812216	0,27107262
9	0,81258261	0,24724886
10	0,45490027	0,32503304

Taula 9

Ara realitzem la primera iteració igual però incrementem la x i la y un valor de l'ordre de 10^{-11}. I obtindrem un parell de nombres molt semblants. Al fer la nova iteració 2 agafarem els valors de la iteració 1 de la primera prova i incrementem altre vegada y i x el mateix valor petit (10^{-11}) i ens dóna un parell de valors més. Anem repetint la operació al mateix temps que la primera i ens dóna una taula com aquesta:

iteració	x	y	x'	y'
0	-0,1233	0,01		
1	0,99175653	-0,04932	0,98871595	-0,03699
2	-0,22961722	0,39670261	-0,42633343	0,29752696
3	1,33343373	-0,09184689	1,32288892	-0,06888517
4	-1,2255015	0,53337349	-1,58111061	0,40003012
5	-0,26885123	-0,4902006	-0,56922202	-0,36765045
6	0,42306222	-0,10754049	0,40860602	-0,08065537
7	0,67768154	0,16922489	0,64188521	0,12691866
8	0,61812216	0,27107262	0,52627171	0,20330446
9	0,81258261	0,24724886	0,73616761	0,18543665
10	0,45490027	0,32503304	0,32284217	0,24377478
11	1,07671193	0,18196011	1,03532508	0,13647008
12	-0,2092102	0,43068477	-0,44107192	0,32301358
13	1,37816208	-0,08368408	1,3694083	-0,06276306
14	-1,36288096	0,55126483	-1,74274711	0,41344863
15	-0,67766857	-0,54515238	-1,04915748	-0,40886429

Taula 10

Ara del que es basa es de mesurar la diferència inicial i final que hi ha a l'espai de fases entre les dues trajectòries i dividir la final entre la inicial

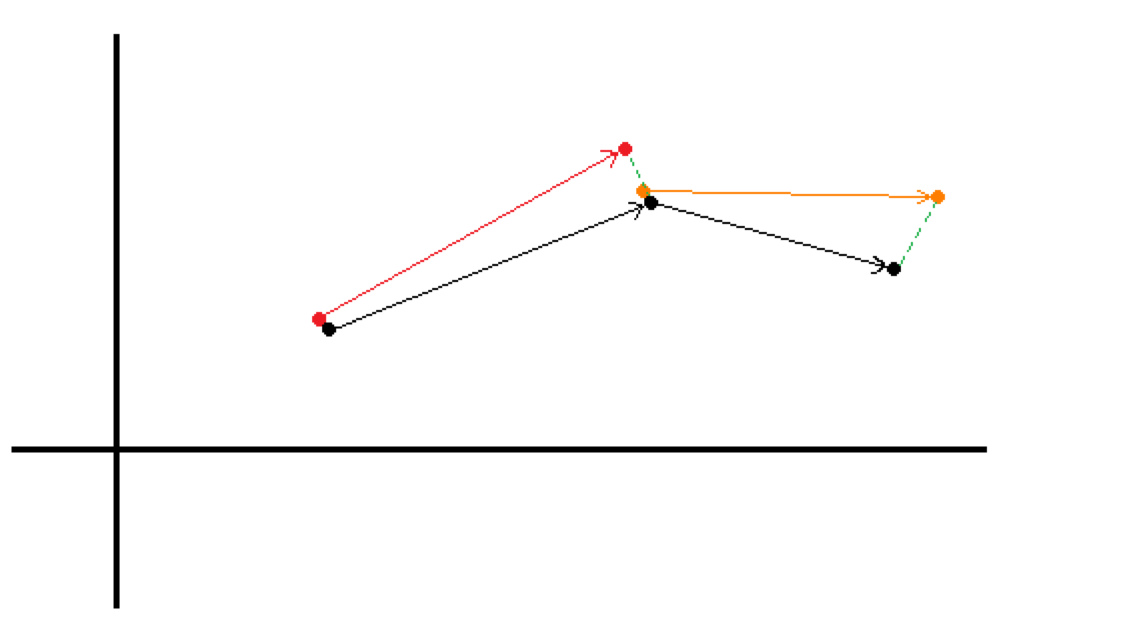

Figura 83

La figura 83 representa un exemple d'aquesta experiència. El pla representa l'espai de fases. Els punts amb negre són els de la iteració "normal", comencem per el de més a l'esquerra i seguint les fletxes. El punt vermell és un punt molt pròxim al primer punt negre. Aquest punt s'itera i origina el seguit per la fletxa que distancia més o menys que la distància inicial i això és el que intentaré quantificar. Després d'obtenir el segon punt negre creo un altre punt molt proper a aquest segon el taronja i l'itero i comparo de nou la distància inicial entre els dos punts abans i després de iterar.

La distància entre els punts no és més que res que el teorema de Pitàgores.

$$distància = \sqrt{(diferència\ de\ les\ x)^2 + (diferència\ de\ les\ y)^2}$$

Després faré el mateix que Lyapunov i faré el logaritme neperià dels valors obtinguts de les divisions i després el sumatori de tots ells.

Itera-ció	x	y	x'	y'	increment x	increment y	diferència inicial	diferència final	rang de creixemet	ln del rang	exponent indicador
0	-0,1233	0,01					1,41421E-10				
1	0,99175653	-0,04932	0,98871595	-0,03699	0,00304058	-0,01233	1,41421E-10	0,012699371	89798110,9	18,3130745	20,3345421
2	-0,22961722	0,39670261	-0,42633343	0,29752696	0,1967162	0,09917565	1,41421E-10	0,220302236	1557772048	21,1665225	
3	1,33343373	-0,09184689	1,32288892	-0,06888517	0,01054481	-0,02296172	1,41421E-10	0,025267247	178666419	19,001031	
4	-1,2255015	0,53337349	-1,58111061	0,40003012	0,3556091	0,13334337	1,41421E-10	0,379787163	2685500783	21,7111331	
5	-0,26885123	-0,4902006	-0,56922202	-0,36765045	0,30037079	-0,12255015	1,41421E-10	0,324408923	2293917490	21,5535269	
6	0,42306222	-0,10754049	0,40860602	-0,08065537	0,0144562	-0,02688512	1,41421E-10	0,03052526	215846181	19,1900766	
7	0,67768154	0,16922489	0,64188521	0,12691866	0,03579633	0,04230622	1,41421E-10	0,05541835	391866908	19,7864328	
8	0,61812216	0,27107262	0,52627171	0,20330446	0,09185045	0,06776815	1,41421E-10	0,11414477	807125413	20,5089896	
9	0,81258261	0,24724886	0,73616761	0,18543665	0,076415	0,06181222	1,41421E-10	0,098285312	694982105	20,3593967	
10	0,45490027	0,32503304	0,32284217	0,24377478	0,1320581	0,08125826	1,41421E-10	0,155055624	1096408830	20,815306	
11	1,07671193	0,18196011	1,03532508	0,13647008	0,04138685	0,04549003	1,41421E-10	0,061499708	434868603	19,8905545	
12	-0,2092102	0,43068477	-0,44107192	0,32301358	0,23186172	0,10767119	1,41421E-10	0,255642215	1807663440	21,3153009	
13	1,37816208	-0,08368408	1,3694083	-0,06276306	0,00875378	-0,02092102	1,41421E-10	0,022678575	160361741	18,8929427	
14	-1,36288096	0,55126483	-1,74274711	0,41344863	0,37986615	0,13781621	1,41421E-10	0,40409355	2857372891	21,7731685	
15	-0,67766857	-0,54515238	-1,04915748	-0,40886429	0,3714889	-0,1362881	1,41421E-10	0,395699948	2798021163	21,7521783	
16	-0,09623402	-0,27106743	-0,18808096	-0,20330057	0,09184694	-0,06776686	1,41421E-10	0,114141172	807099968	20,5089581	
17	0,71781939	-0,03849361	0,71596719	-0,02887021	0,0018522	-0,0096234	1,41421E-10	0,009800025	69296644,7	18,053907	
18	0,34318879	0,28712775	0,24013585	0,21534582	0,10305293	0,07178194	1,41421E-10	0,125588829	888047128	20,6045354	
19	1,1457935	0,13727551	1,12223779	0,10295664	0,02355571	0,03431888	1,41421E-10	0,041625195	294334575	19,5002277	
20	-0,43813579	0,4583174	-0,70070434	0,34373805	0,26256855	0,11457935	1,41421E-10	0,286479792	2025718036	21,4291901	

Taula 11

L’exponent indicador de la taula no està fet sobre els 20 valors de la taula sinó per una mica més de 64000 valors, recordo que teòricament ho hauria de fer per infinits. I el resultat dóna 20,3345421. Provant per diferents punts d’inici només he apreciat canvis en la mil·lèsima.

L’atractor d’Hénon per els valors de a i b que he escollit és:

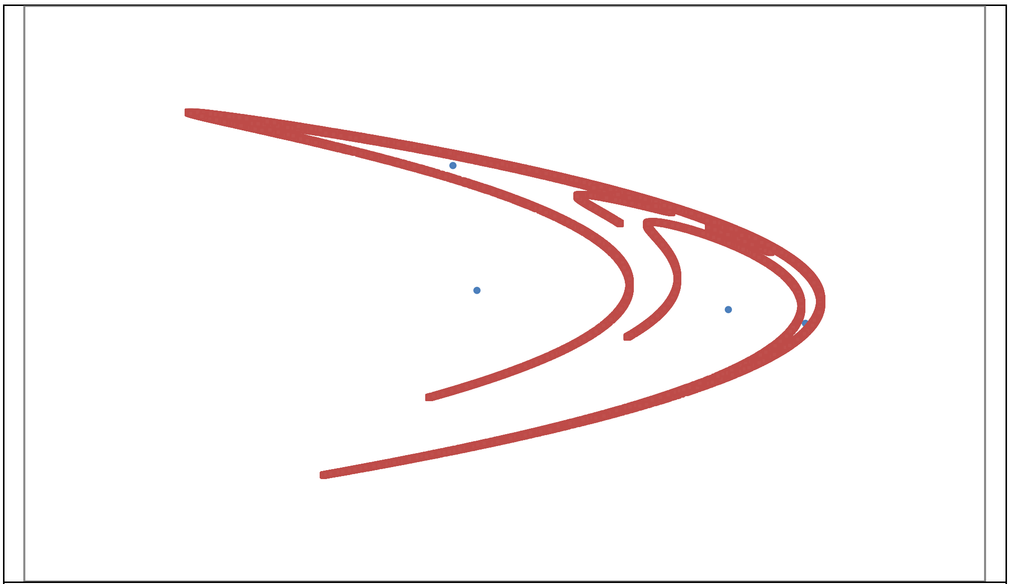

Figura 84: Atractor d’Henón per valors de $a = 1{,}2 \;\; i \;\; b = 0{,}4$

Cal dir que per valors de $a = 1{,}4 \; i \; b = 0{,}3$ esperava un indicador positiu, però en canvi la prova no em va resultar i em donà un exponent indicador de -0,05124499

No sé ben bé a què és degut aquest resultat. La possibilitat de que fos perquè no realitzo infinites iteracions l’he descartada ja que per tots els valors d’inici que he provat resultava un exponent del mateix ordre els canvis es veien a la mil·lèsima.

En el document d’excel A4_Experiment_indicador_Hénon és possible repetir l’experiència modulant els paràmetres de a i de b