Annex 1: Caos en el mètode de Newton

El mètode de Newton Raphson és un algoritme per trobar aproximacions a les arrels d'una funció. Veurem que en aquest mètode podem arribar al caos i de nou apareixeran els fractals.

Sigui f una funció contínua i derivable que pren valors de signe oposat en els extrems de l'interval tancat $[a, b]$, llavors existirà un punt α tal que $f(\alpha)$=0. No sempre és fàcil trobar aquesta arrel α. El mètode de Newton és un mètode iteratiu que permet una aproximació tant fina com es vulgui a l'arrel α **sempre i quan es parteixi d'un punt *a* suficientment proper a l'arrel**. S'aproxima la funció f utilitzant la recta tangent al punt d'inici a i es troba el punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses que en diem a_1. Aquest punt a_1 (si s'ha escollit un bon punt d'inici) hauria de ser una aproximació a l'arrel α millor que el punt d'inici a. Seguidament a partir d'aquest punt a_1 aproximem de nou la funció utilitzant la tangent de f en el punt a_1 i trobem de nou el punt de tall de la recta tangent amb l'eix d'abscisses a_2 i així successivament. Veiem-ne la fórmula:

Equació recta tangent a f en el punt a_0: $y = f'(a_0)x + m$, com ha de passar pel punt (a_0, $f(a_0)$)tindrem que $f(a_0) = f'(a_0)a_0 + m$; $m = f(a_0) - f'(a_0)a_0$ i per tant l'equació de la recta serà:

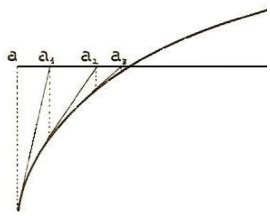
$$y = f'(a_0)x + f(a_0) - f'(a_0)a_0 \; ; \; y = f(a_0) + f'(a_0)(x - a_0)$$

Aquesta recta tallarà l'eix d'abscisses en el punt a_1

$$0 = f(a_0) + f'(a_0)(a_1 - a_0), \text{ llavors } a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

En general, la fórmula iterativa serà:

- $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$. En diem **funció de Newton** a $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



Si s'ha escollit un punt d'inici a adequat, passarà que la successió a, a_1, a_2,… a_n convergirà a l'arrel α.

Cal agafar un punt d'inici suficientment proper a l'arrel de manera que no ens trobem amb cap punt que anul·li el denominador f' , ja que per valors de f'propers a zero Nes dispara i si f' val zero, llavors no es pot continuar iterant, ja que no està definit.

Però què pot passar si el punt d'inici no reuneix les condicions adequades?

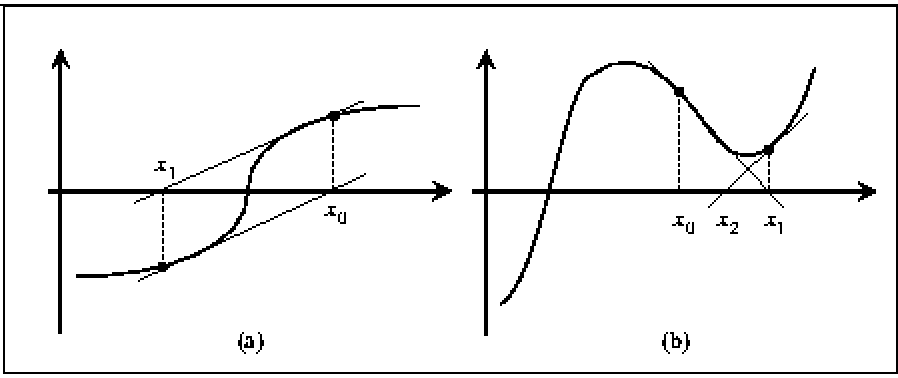


Figura 59

Poden passar coses curioses. Pot ser que la successió entri en un cicle (figura 59a) o que convergeixi a un punt que no sigui una arrel (figura 59b). Però també podria passar que tingués un comportament erràtic de manera que se "salti" d'un interval (veure més endavant) a un altre sense quedar-se mai en un d'ells.

Si pintéssim cada punt de la recta real convergent a una arrel, d'un determinat color segons l'arrel, podríem dibuixar un mapa sobre les abscisses que per a la funció del l'exemple següent es veuria:

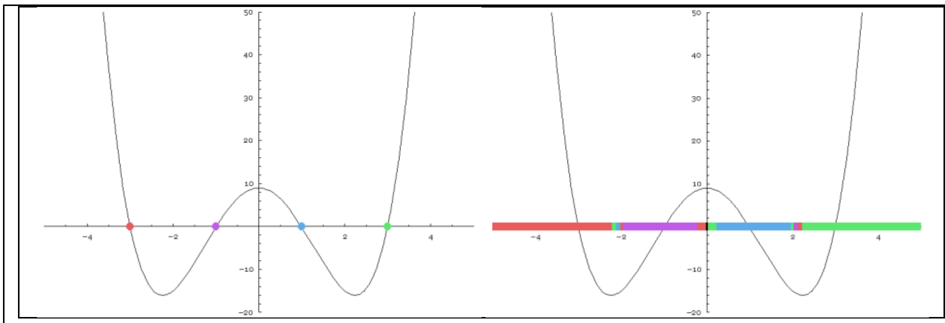


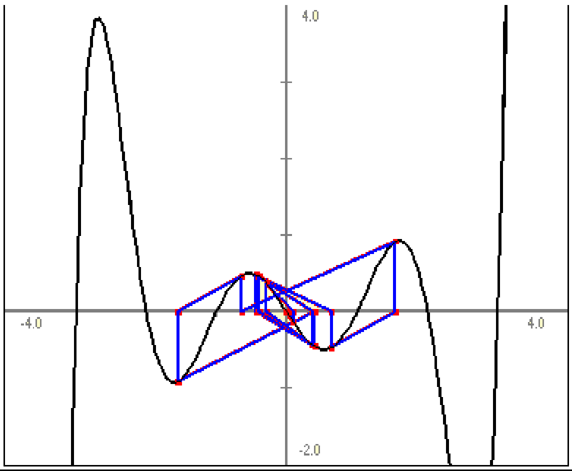
Figura 60

A la figura 60 podem observar com en les zones frontereres els intervals d'atracció principals "salten" a arrels distants. Quan es parteix d'un punt no adequat (no suficientment proper a l'arrel), el mètode de Newton es pot tornar sensible a les condicions inicials, la qual cosa és una de les característiques del caos, de tal manera que petitíssimes diferències en el punt d'inici, originen resultats completament diferents. Veiem-ho en un altre exemple:

Si apliquem el mètode de Newton a la següent funció:

$$f(x) = \frac{x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x}{25}$$

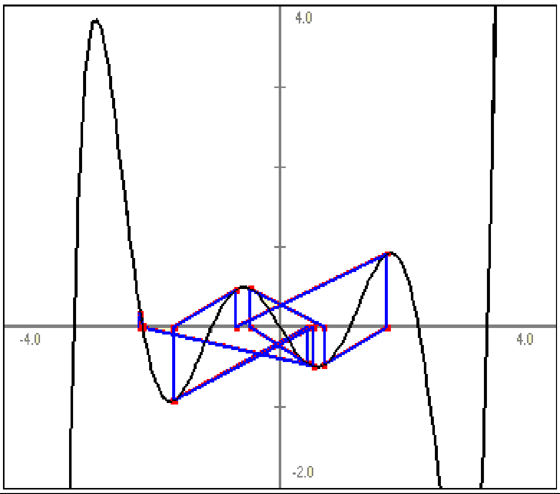
Partint d’un determinat punt, després de saltar d’un interval a un altre, convergeix a una arrel:



0	1.548740046328	.9159421173050580
1	-.6396802617650193	.4663334408665568
2	-1.542723748479058	-.9132723556964509
3	.4051941610509631	-.4591339781913297
4	-.4313513845492291	.4720899196058500
5	.6389641779394653	-.4667020047157552
6	1.548740533563537	.9159423212317717
7	-.6397017211867241	.4663223580802571
8	-1.542544748459601	-.9131882994172385
9	.3990429887632562	-.4556817902096918
10	-.3954334750004430	.4535855164340729
11	.3760358945949751	-.4414413709410157
12	-.2890416594941434	.3700129209647406
13	.0931497785225548	-.1325554368175911
14	-.0022694104576316	.0032679281505984
15	.0000000318178320	-.0000000458176780
16	.0000000000000001	-.0000000000000001

Figura 61

Pero si s’agafa un punt inicial que difereix només 10^{-11} ens trobem que salta a una altra arrel:



0	1.548740046327	.9159421173046397
1	-.6396802617209786	.4663334408892996
2	-1.542723748846494	-.9132723558687216
3	.4051941737209626	-.4591339851451975
4	-.4313514625357960	.4720899540037974
5	.6389649725467741	-.4667015970922857
6	1.548733809651252	.9159395068406143
7	-.6394056182773218	.4664750873696492
8	-1.545021340235321	-.9143276230153355
9	.4880736341641844	-.4901891305871097
10	-2.033518471735947	.1677283534761809
11	-2.001296976379053	.0062358443574615
12	-2.000002149812540	.0000103191286616
13	-2.000000000005931	.0000000000284697
14	-2.000000000000000	.0000000000000004
15	-2.000000000000000	.0000000000000004

Figura 62

Tal com hem dit, els punts no convergents poden saltar indefinidament d’un interval a un altre definint una seqüència altament erràtica. Observem en els exemples anteriors que passa quan el punt d’inici està prop d’un màxim o d’un mínim...

D’altra banda, analitzant la **funció de Newton** $N(x)$ veiem que té al denominador la funció derivada $f'(x_n)$, per tant tindrà tantes asímptotes com zeros tingui $f'(x)$. Aquestes asímptotes delimiten uns intervals (I). A continuació podem veure la representació de $N(x)$ per a la funció $(x+5)(x+3)(x-1)(x-4)(x-7)$.

$$N(x) = x - \frac{(x+5)(x+3)(x-1)(x-4)(x-7)}{\frac{d[(x+5)(x+3)(x-1)(x-4)(x-7)]}{dx}}$$

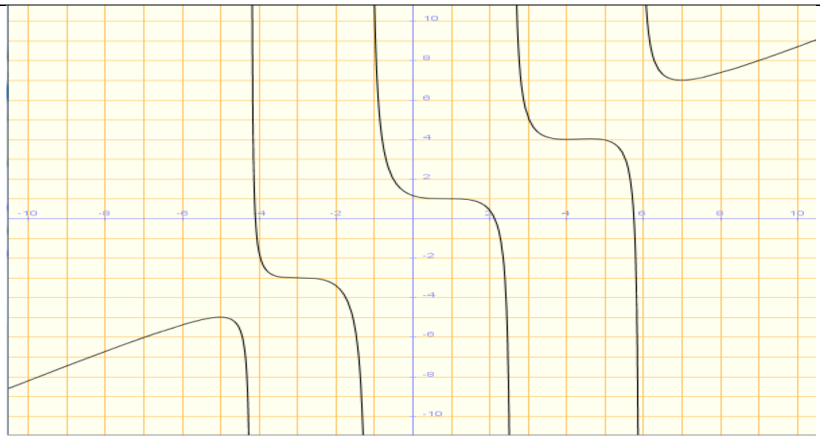


Figura 63

Si f és un polinomi de grau m que té m arrels reals **diferents**, llavors $N(x)$ tindrà $m-1$ assímptotes que delimitaran m intervals $I_1, I_2 \dots I_m$ (ja que si f és de grau m, la derivada serà de grau $m-1$, per tant, hi hauran $m-1$ punts on la derivada sigui 0). Considerem ara un dels intervals, per exemple I_2 on $N(x)$ té per imatge $(-\infty, +\infty)$, que és la totalitat de la recta real. Llavors, en la següent iteració $N(N(x))$, els valors corresponents a l'interval inicial I_2 , ara són $(-\infty, +\infty)$ és a dir, tota la recta real com a valors entrants(igual que en la primera iteració) i tindrà una gràfica anàloga amb $m-1$ assímptotes, delimitant per tant m intervals. Això es repetiria per a cada interval comprès entre asímptotes ($I_3, I_4 \dots$). El nombre d'intervals que tenen per imatge $(-\infty, +\infty)$ s'haurà elevat al quadrat . I així successivament per a les següents iteracions.(Podríem dir que anem "comprimint" la recta real en un interval a cada iteració, això donarà gran sensibilitat a les condicions inicials, s'ha de dir que no es fa de igual manera, sinó que al voltant de l'arrel es comprimeix molt menys que en les asímptotes, fet que provocarà que sigui a l'entorn d'aquestes on es produeixi el caos)

Hi hauran m punts fixos de $N(x)$ corresponents a les m arrels de f.

Els punts amb un cicle de període 2 són els que satisfaran que $N\big(N(x)\big) = x$ i no verifiquen $N(x) = x$ i per tant corresponen als nous punts d'intersecció de la gràfica de la segona iteració amb la recta $y = x$

A continuació he utilitzat el programa **Derive 6** per representar pel polinomi següent la funció de Newton.

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + x^2 + 6 \cdot x$$

L'expressió següent correspon a $N(x)$

$$x - \frac{x^4 - 4 \cdot x^3 + x^2 + 6 \cdot x}{4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 6}$$

A continuació tenim $N(N(x))$:

$$\frac{x^4 \cdot (3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1) \cdot (81 \cdot x^{10} - 936 \cdot x^9 + 4257 \cdot x^8 - 9376 \cdot x^7 + 9435 \cdot x^6 - 1832 \cdot x^5 - 3265 \cdot x^4 + 1944 \cdot x^3 - 272 \cdot x^2 - 264 \cdot x + 36)}{8 \cdot (2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + x + 3) \cdot (27 \cdot x^{12} - 324 \cdot x^{11} + 1527 \cdot x^{10} - 3390 \cdot x^9 + 2807 \cdot x^8 + 1880 \cdot x^7 - 4281 \cdot x^6 - 346 \cdot x^5 + 3974 \cdot x^4 - 768 \cdot x^3 - 1818 \cdot x^2 + 324 \cdot x + 324)}$$

Aquesta és la representació gràfica de $N(x)$ i la recta $y = x$, els punts de tall corresponen a les arrels del polinomi, que són $\{-1,0,2,3\}$, també s'observen els punts on la derivada val 0, que són les assímptotes verticals(3). I l'eix d'abscisses queda dividit en quatre intervals I_1, I_2, I_3, I_4 delimitats per les asímptotes. En $I_2 \ i \ I_3$ $N(x)$ té per imatge tots els nombres de la recta real.

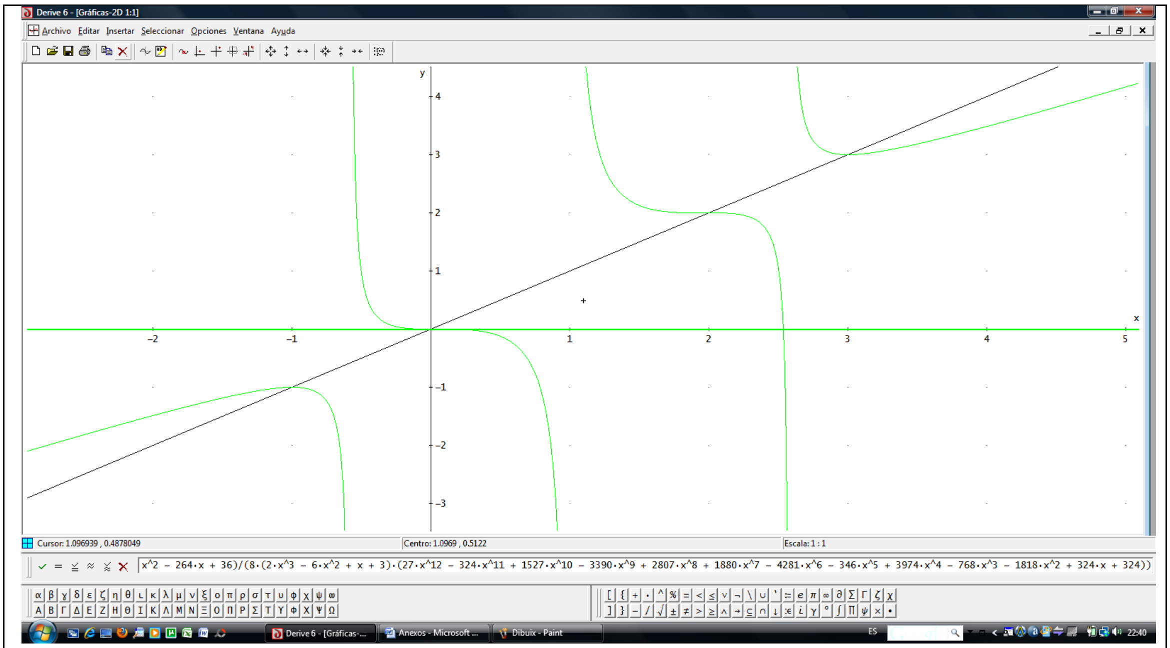


Figura 64

La figura 64 mostra la recta $y = x$ i la representació de $N(x)$ (verd) i de $N(N(x))$ (lila). Ara han aparegut 2 nous punts de tall en els intervals que correspondrien a $I_2 \ i \ I_3$ de la primera iteració. Són els punts que generen un cicle de període 2.

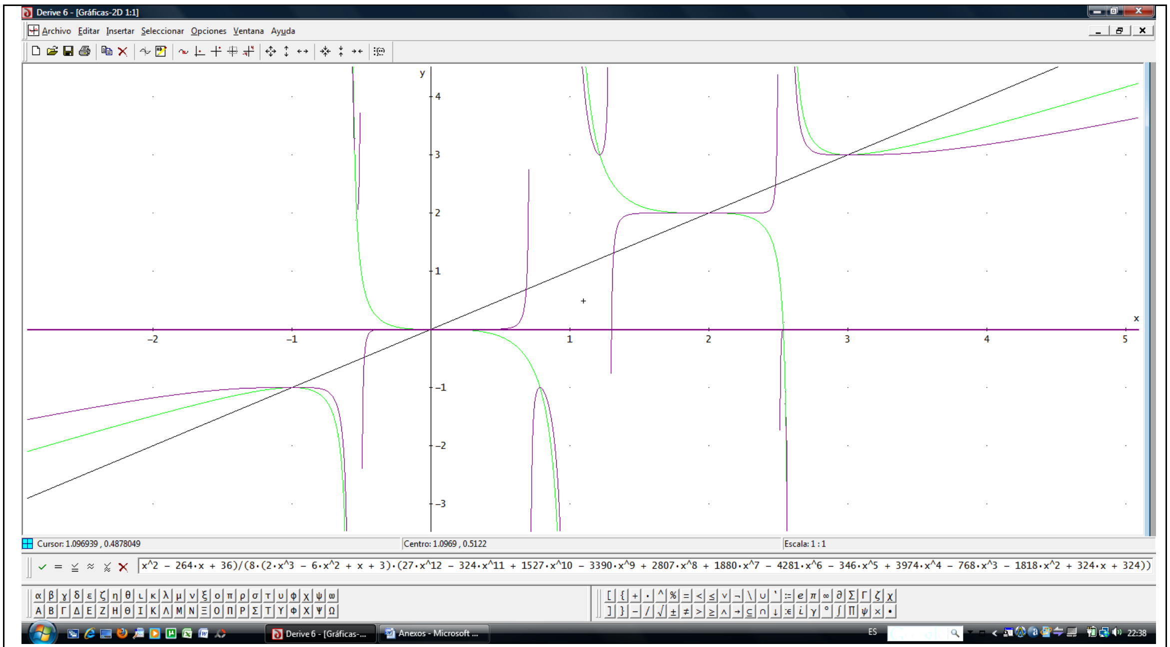


Figura 65

Com que hem introduït tots els valors de la recta real ens surt un gràfic anàleg. Al gràfic costa d'observar-ho, però hi ha dintre cada interval que conte tota la recta real altra vegada el mateix nombre d'intervals que hi havia a la primera iteració(hi ha auto-semblança).

Observem que els punts fixos de la primera iteració (arrels del polinomi de quart grau) tenen pendent 0.

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$N'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)}$$

Com que el valor és una arrel del polinomi, anul·la $f(x)$

$$N'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x)}{f'(x)f'(x)} = 0$$

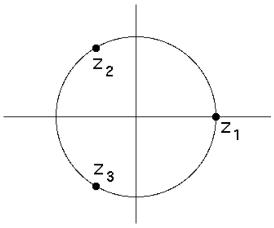
Per tant com tenen el valor absolut del pendent més petit que 1, seran atractors, que ja és el que busca el mètode de Newton, que ens anem aproximant a un atractor, l'arrel.

En canvi en la segona iteració veiem que els dos nous punts fixos tenen clarament el valor absolut del pendent més gran que 1, per tant seran repulsors.

Si anem iterant ens anirem trobant en la franja que està a prop de les asímptotes els punts fixos per la iteració n que donaran lloc a cicles de període n, podem trobar conseqüentment cicles de tots els períodes i tots els punts fixos que anem trobant seran sempre repulsors ja que sempre ens els trobarem a prop de les asímptotes ja que la zona on hi ha l'arrel és gairebé plana i per tant no s'altera gairebé gens en la iteració, pel contrari a la zona de l'asímptota, molt. En aquella zona el mètode de Newton té un comportament caòtic.

També amb el ***mètode de Newton*** es poden obtenir imatges fractals quan s'utilitza en funcions complexes. Per exemple,

$f(z) = z^3 - 1$ Té una sola arrel real, però també té dues arrels imaginàries. Les tres arrels z_1, z_2 i z_3 de mòdul 1 i simètriques són: $\{1, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right), \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right), \}$ que representades en el pla:



Apliquem l'algoritme de Newton per a veure a quines arrels convergeix cada punt del pla complex.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$$

Per exemple agafem $z_0 = i$

$$z_1 = i - \frac{i^3 - 1}{3i^2} = i - \frac{-i - 1}{-3} = \frac{2i - 1}{3}$$

$$z_2 = \frac{2i - 1}{3} - \frac{\left(\frac{2i - 1}{3}\right)^3 - 1}{3\left(\frac{2i - 1}{3}\right)^2} = \frac{131 + 208i}{225}$$

...

Si continuéssim la iteració veuríem que la successió convergiria a l'arrel z_2. Si això ho fessim per a cada un dels punts del pla i pintessim cada punt inicial convergent d'un color diferent segons a l'arrel a la qual arriba, obtindríem una figura. D'entrada algú podria pensar que obtindríem la figura 66 (a)

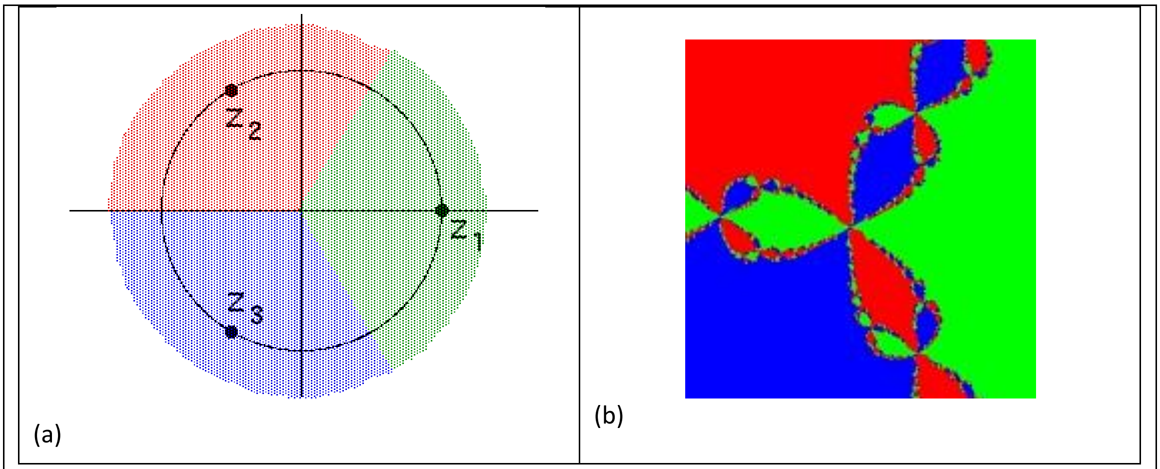


Figura 66

Però en realitat obtenim la figura 66(b), on hi ha 3 conques principals d'atracció entorn a les 3 arrels, però la frontera té una gran complexitat, cada cercle que enclou punts de dos colors, també inclou punts del tercer color. En els punts mateixos de la frontera, Newton és caòtic i no convergeix a cap arrel.

Anàlogament, pel cas de $f(z) = z^4 - 1$, té 4 arrels: $\{-1, 1, i, -i\}$ les conques d'atracció trobades per iteració mitjançant Newton tenen l'estructura del següent gràfic. Veiem ara que hi ha 4 conques d'atracció majoritàries amb un frontera similar al cas anterior.

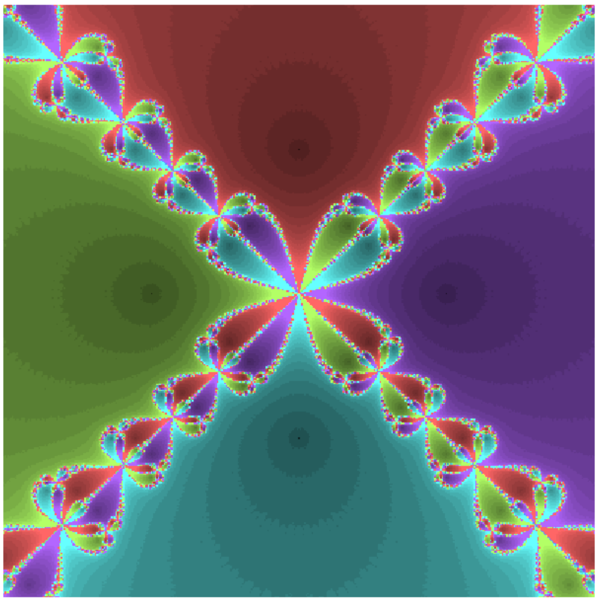


Figura 67

Cada punt de la frontera toca a totes les quatre conques d'atracció.

En general per $f(z) = z^m - 1$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^m - 1}{m z_n^{m-1}}$$

La figura 68 mostra els fractals per m=3,4,...,11.

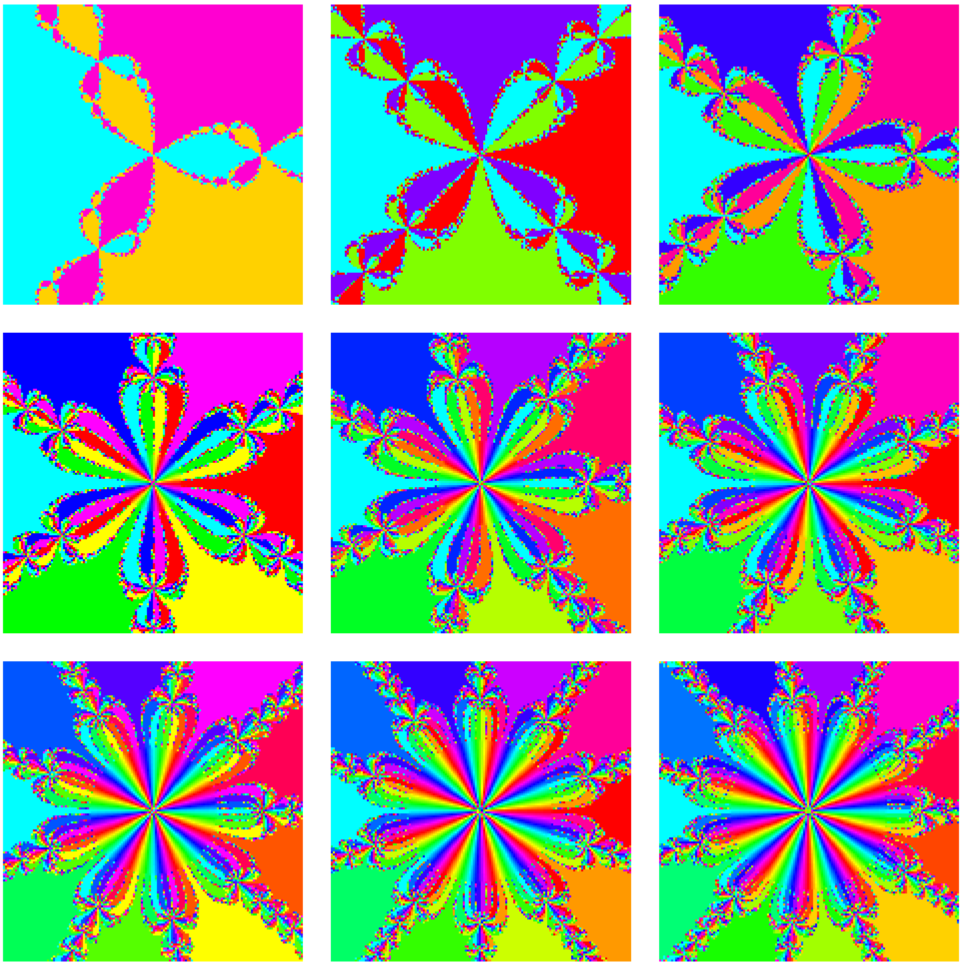


Figura 68