Treball de recerca

MANUAL DE PREPARACIÓ PER A OLIMPÍADES I COMPETICIONS MATEMÀTIQUES

29 d'abril de 2008

5a Edició Premi Poincaré 2008

Premi Poincaré 2008

Manual de preparació de les olimpíades i competicions matemàtiques

Autor: Arnau Messeguer
Centre: IES Balaguer
Tutor: Sr. Jordi Prió

Per les aportacions no tan sols de solucions originals d'un ampli espectre de problemes d' olimpíades matemàtiques, incloent-hi interessants consideracions sobre la resolució de problemes, si no també de problemes originals d'un nivell similar acompanyats de reflexions sobre l'art d'inventar-los. A més, la memòria que ha presentat té també la qualitat de ser un manual ben estructurat que pot ser útil a futurs participants en competicions matemàtiques, així com als seus professors preparadors.

Índex

Índex de figures

Agraïments

Al professor *Jordi Prió*, per la seva excel·lent tasca en el tutoratge del treball.
A la *Marta Farré*, per la seva immillorable tasca en la revisió i correció de molts dels problemes que apareixen al treball.
Al doctor *Josep Grané*, una persona sense la qual les olimpíades no serien el que són i a qui tots els olímpics devem molt.
A en *Carles Romero*, *José Luis Díaz*, en *Xavi Ros* i el *Miguel Teixidor* per atendre molts dels meus dubtes.
A la *Dolors Elizalde*, en *Josep Maria Masip* i en *Jaume Molins*, per proporcionar-me material i per ajudar-me en la meva preparació el primer any.

A la *Teresa Serés*, per la seva desinteressada col·laboració en la correció sintàctica i ortogràfica de la redacció del treball.

Introducció

Des de sempre, les matemàtiques m'havien cridat l'atenció, però per damunt de tot, el que més m'agradava era fer problemes. Actualment, els que apareixen als llibres convencionals que un estudiant utilitza (tan de matemàtiques com de qualsevol altra àrea) són problemes molt simples, sense gràcia i sense dificultat, que solament requereixen aplicar una fórmula determinada exposada en l'apartat anterior de teoria. Va ser amb la competició anomenada Cangur i les Olimpíades Matemàtiques, que vaig descobrir com d'enginyosos i difícils podien arribar a ser alguns problemes, i va ser llavors quan es va despertar completament el meu interès per la resolució de problemes.

La preparació per aquestes proves, però, va ser dura. El fet de no poder assistir a classes preparatòries (només se'n fan a Lleida, Barcelona, Tarragona i Girona) fa que al començament et sentis una mica desorientat al començament ja que la major part de coneixements que havia d'adquirir per les olimpíades eren completament nous, no els havíem donat mai a classe (alguns no es donen a batxiller) i tampoc disposava d'un professor que m'ho expliqués.

Per això l'objectiu principal del present treball és proporcionar als interessats en les competicions de matemàtiques un manual sòlid, compacte, però sintetitzat, que els permeti, complementar i ampliar els seus coneixements matemàtics dirigits a aquestes competicions.

Tot el treball constitueix un manual, però s'ha dividit en dues parts clares per tal de facilitar-ne la utilització.

En la primera part, es comença parlant de les olimpíades matemàtiques més importants al nostre país i arreu del món per tal de donar-les a conèixer al lector. A continuació s'expliquen les tècniques generals més utilitzades per construir una demostració determinada. Finalment, es tanca la secció parlant de la creació de problemes, un apartat que permet a l'estudiant estimular i potenciar la seva creativitat.

En la segona part, hi trobem el propi cos del manual, amb una gran quantitat de problemes solucionats. Per tal de facilitar-ne l'ús, s'ha dividit en quatre grans temes, que corresponen als que es treballen a les Olimpíades Matemàtiques: teoria de nombres o aritmètica, geometria, àlgebra i combinatòria. Cada un d'aquests temes es troba, a la vegada, dividit en dues seccions, la secció de teoremes i conceptes, en què s'enuncien els principals teoremes i fórmules que el lector necessita conéixer i la secció d'exercicis i problemes on hi trobem un recull de multitud de problemes (més de 200), provinents de diferents competicions nacionals i internacionals, ordenats en ordre creixent de dificultat (a més s'indica aproximadament la dificultat del problema posant cap, una o dos estrelles (*), depenent de si el problema es considera fàcil, mitjà o difícil, respectivament). Les solucions, són totes pensades i escrites per l'autor (en cas contrari s'ha posat el nom de la persona que l'ha resolt).

En general, s'espera que aquest treball, o potser millor manual, pugui ser d'utilitat per a les persones interessades en prepar-se per qualsevol tipus de competició matemàtica i que en un futur, pugui ser ampliat i complementat amb les idees i suggeriments proposats per altra gent.

Notacions i Abreviacions

Abreviacions:

AIME Examen Invitacional Americà de Matemàtiques

ATMO Olimpíada Austríaca de Matemàtiques

IBERO Olimpíada Iberoamericana

IMAC Competició Internacional Arquímedes de Matemàtiques

IMO Olimpíada Internacional de Matemàtiques

MOP Programa Matemàtiques per a Olimpíades

OBM Olimpíada Matemàtica dels Balcans

OBrM Olimpíada Britànica de Matemàtiques

OBulM Olimpíada Búlgara de Matemàtiques

OIsrM Olimpíada Israelí de Matemàtiques

OMC Olimpíada Matemàtica Catalana

OME Olimpíada Matemàtica Espanyola

OMed Olimpíada Mediterrània

OSlM Olimpíada Eslovaca de Matemàtiques

Notacions referents a Conjunts Numèrics

$\mathbb{N}$ El conjunt dels naturals. $\{1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{N}_0$ El conjunt dels naturals no negatius. $\{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ El conjunt dels enters

$\mathbb{Q}$ El conjunt dels racionals

$\mathbb{Q}^+$ El conjunt dels racionals positius

$\mathbb{Q}^0$ El conjunt dels racionals no nuls

$\mathbb{R}$ El conjunt dels reals

$\mathbb{R}^+$ El conjunt dels reals positius

$\mathbb{C}$ El conjunt dels complexos

Notacions de Conjunts, Lògica i Geometria

$\Leftrightarrow$ si i només si

$\Longrightarrow$ implica que

$A \subseteq B$ A és un subconjunt de B o B.

$A \setminus B$ A sense B

$A \cap B$ la intersecció de A i B

$A \cup B$ la unió de A i B

$a \in A$ l'element a pertany al conjunt A

$|AB|$ també AB, la distància entre els punts A i B

$\triangle ABC$ el triangle ABC

Part I

Tècniques de resolució i creació de problemes

Capítol 1

Olimpíades i competicions matemàtiques.

1.1 Una visió general.

Les olimpíades matemàtiques són competicions que pretenen promoure i estimular el talent matemàtic en els més joves.
Normalment consisteixen en un examen, en el qual s'han de resoldre sis problemes. La prova es realitza en dos dies consecutius. Cada dia es dóna entre 3 o 4 hores i mitja, depenent de la dificultat de la prova, per tal de realitzar tres problemes.
Els problemes tracten de les àrees més importants de les matemàtiques: àlgebra, geometria, teoria de nombres, etc. No es requereixen coneixements elevats, però sí una gran dosi d'enginy, originialitat, així com una gran habilitat matemàtica. Cada problema es valora generalment sobre 7 punts. Així, si hi ha sis problemes, la màxima puntuació possible és 42 punts.
Els requisits per participar en qualsevol olimpíada són, generalment, ser menor de 20 anys i no haver cursat estudis universitaris. A part, t'han d'agradar les matemàtiques.
El que ha de tenir present una persona que es vulgui presentar a una olimpíada és que el tipus de problemes que hi trobarà són diferents dels que està acostumat a fer a l'escola o l'institut, i per tant, es recomana que es prepari mínimament per afrontar aquesta nova situació.

1.2 Les olimpíades matemàtiques i altres competicions matemàtiques al nostre país.

Hi ha moltes olimpíades i competicions matemàtiques arreu del món. Al nostre país, la olimpíada està divida en diverses fases:

1.2.1 Fase local

És la que es realitza en els diversos disctrictes universitaris, normalment a cada comunitat autònoma. Poden participar-hi tots aquells alumnes de Batxillerat o de cicles formatius de FP. Excepcionalment, també hi poden participar alumnes d'ESO, sempre i quan el professor de matemàtiques corresponent l'hagi avalat. En aquesta prova cada distrecte universitari selecciona els estudiants que aniran a participar a la segona fase.
En el nostre cas, a Catalunya, la prova es realitza generalment entre els dies 15 i 16 de desembre. Els llocs on es celebra la prova són a Lleida, Girona, Tarragona i Barcelona, en un edifici especificat a la web `http://www.cangur.org`.

Per més informació:

`http://www.cangur.org`
S'hi troba informació de la olimpíada catalana.

`http://www.xtec.cat/recursos/mates/aqui/olimp.htm`
S'hi troben els enunciats i solucions d'olimpíades catalanes anteriors.

`http://scm.iec.cat/redir.asp?direc=Publicacions/pubs.asp&imag=publicacions`
En la pàgina de la Societat Catalana de Matemàtiques s'hi troba un manual de preparació per a olimpíades i competicions catalanes, i un recopilatori dels problemes proposats en les olimpíades catalanes i espanyoles a partir de l'any 1963.

`http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimprab.htm`
En aquesta pàgina s'hi troben els enunciats i solucions de les fases locals espanyoles de 1999 a 2007.

1.2.2 Fase nacional

Coneguda com Olimpíada Matemàtica Espanyola (OME), és la prova que es realitza a nivell espanyol. Hi participen els guanyadors dels diversos districtes universitaris de les comunitats autònomes principals. Els sis primers premiats en aquesta prova participen a la IMO i els quatre primers en la Iberoamericana.

Per més informació:
`http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimmain.htm`
Hi trobareu la informació sobre la Olimpíada Nacional Espanyola (OME), així com els enunciats i solucions dels últims anys i material de preparació.

`http://scm.iec.cat/redir.asp?direc=Publicacions/pubs.asp&imag=publicacions`
S'hi troba un recopilatori històric de les olimpíades catalana i espanyola des de 1963 fins quasi actualment.

1.2.3 Fase internacional

En la fase internacional hi trobem diverses competicions.

Olimpíada Internacional de Matemàtiques (IMO): és la que es realitza a nivell mundial. És la més antiga de les olimpíades internacionals de ciències[1], i és la que té més prestigi de totes les competicions matemàtiques per a estudiants d'aquesta edat. Agrupa sis estudiants de cada país, que han estat seleccionats per representar el seu país. La primera IMO va tenir lloc a Romania, l'any 1959. Des de llavors, s'ha realitzat aquesta prova cada any, exceptuant el 1980. Aproximadament, hi participen uns 90 països, els quals envien equips de, com a molt, sis estudiants.

Per més informació:
`http://www.imo-official.org/`
Pàgina oficial de la IMO. Inclou informació general, resultats de tots els anys, problemes proposats, etc.

`http://imo.math.ca/`
Antiga seu de la IMO. També conté informació de la competició, així com dels problemes proposats.

`http://www.mathlinks.ro/Forum/resources.php`
Conté problemes i solucions de la IMO, problemes de la Longlist i la Shortlist[2], i molts altres problemes de competicions de matemàtiques d'arreu del món.

Olimpíada Iberoamericana: agrupa els països de parla hispànica. Hi participen en el cas d'Espanya, els quatre primers guanyadors de la olimpíada nacional.

Per més informació:
`http://www.oei.es/oim/index.html`
Pàgina oficial de la Olimpíada Iberoamericana, que conté a més d'informació general una revista electrònica amb articles variats i problemes resolts.

Olimpíada Mediterrània: agrupa els principals països que toquen al Mar Mediterrani. Hi pot participar lliurement qualsevol estudiant apte (al nostre país però, només poden participar els que hagin passat la fase local). Cada país que hi participa escull una ciutat en la qual es realitza la prova per als residents del pertinent país. En el cas d'Espanya es realitza a Requena.

Per més informació:
`http://www.mediterranea.tk`
Pàgina no oficial de la Olimpíada Mediterrànea, que conté els enunciats i resultats de les edicions del 1998 al 2005.

---

[1] Les olimpíades internacionals de ciències (ISOs) són un conjunt de competicions que es realitzen anualment a nivell mundial, en les quals cada país envia entre 4 o 6 dels seus millors estudiants. Fins ara hi ha 11 ISOs a part de la IMO: Olimpíada Internacional de Física (IPhO), Olimpíada Internacional de Química (IChO), Olimpíada Internacional de Biologia (IBO), Olimpíada Internacional d'Informàtica (IOI), Olimpíada Internacional de Filosofia (IPO), Olimpíada internacional d'Astronomia (IAO), Olimpíada Internacional de Geografia (IGeO) i Olimpíada Internacional de Lingüística (ILO), etc.

[2] De tots els problemes que proposen diferents països per la IMO hi ha un jurat que en selecciona uns quants i el·labora l'anomenada *Longlist*, una llista extensa d'aquests problemes, o la *Shortlist*, una llista curta de problemes. Els problemes que es posaran a la IMO corresponent s'escolleixen normalment de la *Shorlist.*

Competició Internacional Arkhímede de Matemàtiques (IMAC): és una competició que es va iniciar recentment (any 2007), en la qual participen també sis participants escollits per cada país. L'edició de l'any 2007 es va desenvolupar a Romania i va agrupar els països de Croàcia, Sèrbia, Romania, Moldàvia i Espanya. L'objectiu és que s'hi afegeixin més països.

1.2.4 Altres competicions.

Tot i que les olimpíades són les competicions matemàtiques de més prestigi, cal tenir present que existeixen altres competicions en què també poden participar-hi els estudiants de secundària o batxiller.

El Cangur Matemàtic i el Cangur, organitzats respectivament a Castella i a les Comunitats Autònomes de parla catalana (Catalunya, Balears i Comunitat Valenciana), és una competició que ordena els estudiants en 4 nivells diferents depenent del curs en què estan matriculats. Els 30 problemes que s'han de resoldre (respostes tipus test) en 75 minuts no requereixen el coneixement de determinades fórmules però sí una extraordinària agilitat mental i imaginació.

Per més informació:

`http://www.cangur.org`

S'hi troben els enunciats i solucions dels problemes proposats de 1996 a 2008, així com els premis i premiats en aquestes edicions. També disposa de la informació necessària per apuntar-s'hi.

Capítol 2

Resolució i creació de problemes.

2.1 Resolució de problemes: pautes i consells.

En totes les competicions matemàtiques s'han de resoldre problemes. La classe de problemes que surten a les olimpíades matemàtiques no acostumen a ser gens fàcils, i menys per aquells no estan acostumats a fer-ne o que no n'han vist gaires. Tot i que no trobarem mai dos problemes iguals, es poden donar algunes pautes i tècniques que ens poden ser d'ajuda en la resolució de problemes.
Primer de tot, hem d'entendre el problema, per això l'hem de llegir el nombre de vegades convenient. És important parar atenció a les paraules utilitzades en l'enunciat, perquè sovint ens poden proporcionar alguna pista o indici que ens obri una via per on començar a buscar. Una vegada tinguem el problema assimilat i sapiguem què és el que se'ns demana haurem de buscar un camí que ens porti cap a la solució. S'han d'entendre aquesta classe de problemes com a reptes o desafiaments intel·lectuals i cal tenir en compte que el que ens portarà cap a la solució serà una idea simple i original, per tant, hem d'intentar ser el més creatius possible i no buscar idees massa enrevessades. També és important tranquilitzar-se si al començament no se'ns acudeix res i afrontar el problema amb sang freda.
A continuació exposarem diverses tècniques, ja pròpiament matemàtiques, que ens proporcionen recursos per abordar els problemes.

2.1.1 Demostració per inducció.

El següent problema va ser proposat en la Olimpíada Espanyola de l'any 1971:

PROBLEMA*. (Olimpíada Matemàtica Espanyola 1971-7). Demostreu que per tot n, el nombre

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

és divisible per 8.
Solució:
En alguns problemes en què se'ns demana provar que es compleixi una determinada propietat per al conjunt dels naturals $\mathbb{N}$ és molt útil considerar el mètode de demostració per inducció:

MÈTODE DE DEMOSTRACIÓ PER INDUCCIÓ: Ens permet provar una certa propietat P per a conjunt inductiu, normalment els naturals. Està dividit en tres fases:
-Primer es prova que es verifica $P(n_0)$, per a n_0 un valor inicial.
-Després se suposa que la propietat és certa per a un cert $n > n_0$
-Finalment, cal demostrar que si realment $P(n)$ és certa, llavors també ho és $P(n+1)$.

Utilitzant ara aquest mètode ens resultarà molt fàcil provar el que se'ns demana a l'enunciat:
1-. Primer provem que en efecte per a $n = 1$ és cert:

$$A_1 = 5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8 = 8 \cdot 1$$

2-. Suposem que per a un cert n es compleix que:

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 8k \; ; \; k \in \mathbb{N}$$

3-. Llavors efectivament es comprova per a $n + 1$ també es compleix:

$$A_{n+1} = 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 5 \cdot (8k - 2 \cdot 3^{n-1} - 1) + 6 \cdot 3^{n-1} + 1 =$$

$$= 8k \cdot 5 + 3^{n-1}(6 - 10) + 1 - 5 = 8k \cdot 5 - 3^{n-1}(4) - (4) = 8k \cdot 5 - 4(3^{n-1} + 1)$$

Òbviament, el factor $(3^{n-1} + 1)$ és parell, per tant, $4(3^{n-1} + 1)$ és múltiple de 8, cosa que demostra la proposició 3.
La prova és completa, hem provat que per tot natural n, A_n és múltiple de 8.

Tot i que normalment el mètode de demostració per inducció se sol usar per demostrar una determinada fórmula en teoria de nombres, veurem com aquesta potent tècnica també es pot aplicar a altres àrees de les matemàtiques com ara la combinatòria. El problema següent va ser proposat a la Olimpíada Iberoamericana de l'any 1997:

PROBLEMA* (IBERO 1997 - 4) Sigui n un enter positiu. Considerem la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, on tots els valors que poden prendre les variables $x_1, x_2, ..., x_n, y_1,\ y_2, ..., y_n$ són únicament 0 i 1. Sigui $I(n)$ el nombre de 2n-ades $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ per a les quals el valor de la suma és un nombre senar i sigui $P(n)$ el nombre de 2n-ades $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, .., y_n)$ per les quals la suma pren un valor parell. Provar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$$

Solució:
Provarem l'enunciat per inducció sobre n.
Per a $n = 1$:
Per tal que $x_1y_1 = 1$, l'única possibilitat és $x_1 = y_1 = 1$, per tant, $I(1) = 1$. Per tal que $x_1y_1 = 0$, $(x_1, y_1) = (0,0), (1,0), (0,1)$, per tant, $P(1) = 3$.
Tenim doncs que $\frac{P(1)}{I(1)} = \frac{3}{1} = \frac{2^1 + 1}{2^1 - 1}$

Suposem ara que es compleix per a un cert n la identitat $\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n+1}{2^n-1}$, haurem de provar que per a n+1 també es compleix. Per fer-ho, buscarem una recurrència que ens permeti relacionar $P(n+1)$ i $I(n+1)$ amb $P(n)$ i $I(n)$:
Partint de la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, de valor parell, existeixen exactament tres parelles $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (0,0), (1,0), (0,1)$ que determinen que la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}$ sigui de valor parell, mentre que existeix una sola parella $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (1,1)$ amb la qual el valor de la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}$ adquireix valor imparell.
Anàlogament, partint de la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ de valor imparell, existeixen tres parelles $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (0,0), (1,0), (0,1)$ que determinen que la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}$ sigui de valor imparell, mentre que existeix una sola parella $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (1,1)$ amb la qual el valor de la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}$ adquireix valor parell.
Així doncs, d'acord amb el principi multiplicatiu (PM) i el principi additiu (PA), podem establir les següents relacions de recurrència:
$P(n+1) = 3P(n) + I(n)$; $I(n+1) = 3I(n) + P(n)$
Finalment, arribem a la conclusió que:

$$\frac{P(n+1)}{I(n+1)} = \frac{3P(n) + I(n)}{3I(n) + P(n)} = \frac{3 \cdot (2^n + 1) + (2^n - 1)}{3 \cdot (2^n - 1) + (2^n + 1)} = \frac{4 \cdot 2^n + 2}{4 \cdot 2^n - 2} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1} - 1}$$

que és el que volíem provar.

PROBLEMA (TST PERÚ 2007-2) Sigui T un conjunt de 2007 punts en el pla amb qualssevol tres punts no conl·lineals. Provar que per cada punt P de T el nombre de triangles que contenen a P en el seu interior amb els tres vèrtexs en T és un nombre parell.**

Solució:

Procedirem raonant per inducció sobre n, provant que per a un conjunt T_{2n+1} de $n \geq 2$, punts en el pla amb qualssevol tres d'ells no col·lineals el nombre de triangles amb vèrtexs en T_{2n+1} i que contenen un mateix punt P de T_{2n+1} és sempre un nombre parell.
Comencem provant el cas $n = 2$. T_5 està format per 5 punts, diguem-los A, B, C, D i P. Volem comptar el nombre de triangles amb vèrtexs en T_5 que contenen P en el seu interior. Considerem el quadrilàter $ABCD$, aquest pot ser convex o no. Comencem provant el cas en què $ABCD$ és convex:
Suposem que $ABCD$ és convex i que P es troba en el seu interior. Com que no hi ha tres punts col·lineals, P es troba en un dels triangles AKB, BKC, CKD o DKA, on K és la intersecció de les diagonals del quadrilàter $ABCD$. Però cada un d'aquests triangles pertany a dos triangles a la vegada. Per tant, si P és a l'interior d'$ABCD$, és a l'interior de 2 triangles. Considerem ara el cas en què P es troba a l'exterior. Com que $ABCD$ és convex, llavors no existeix cap triangle en què P s'hi trobi a l'interior. Notem que en tots dos casos, el nombre de triangles que contenien P era parell.
Suposem que $ABCD$ no és convex, més en concret, suposem que D es troba a l'interior del triangle ABC. Podem distingir dos casos, o bé que P es trobi a l'exterior del triangle ABC, cas en què no existeixen triangles que el continguin a l'interior, o bé que P es trobi en l'interior del triangle ABC. Considerem aquest últim cas, com que no hi ha tres punts col·lineals, P es troba o bé a l'interior de ABD, BDC o CDA, però a la vegada també a ABC. Per tant, està contingut en l'interior de 2 triangles.
En resum hem provat que en el cas $n = 2$ hi ha un nombre parell de triangles que contenen P.
Ara suposem que un conjunt de $2n + 1$, comptant el propi P, conté un nombre parell de triangles que tinguin P al seu interior, provarem que al afegir dos punts més, X, Y en aquest conjunt, el nombre de triangles que contenen P al seu interior continua sent parell. Per això, serà suficient provar que hi ha un nombre parell de triangles nous formats en afegir X i Y que continguin a P en el seu interior.
Sigui LMN un triangle qualsevol amb vèrtexs en el conjunt T_{2n+1} que conté a P en el seu interior. És clar que en afegir els punts X i Y, es formaran els quadrilàters $LMNX$ i $LMNY$ que contindran P en el seu interior. D'acord amb el que hem provat anteriorment, per a cada quadrilàter que conté P hi ha dos triangles que contenen P en el seu interior, però en ambdós quadrilàters, el mateix triangle LMN conté P, i a més L, M, N pertanyen a T_{2n+1}. Per tant, s'han format 2 triangles nous, diferents d'LMN que contenen P en el seu interior.
Sigui ara $L'M'N'$ un triangle amb vèrtexs en T_{2n+1} que no conté P en el seu interior. Si hi ha algun triangle en els quadrilàters $L'M'N'X$ o $L'M'N'Y$ que contingui P en el seu interior, aquest no pot ser $L'M'N'$, per tant, tals triangles seran diferents. D'acord amb el què hem provat, el nombre de triangles dels quadrilàters $L'M'N'X$ i $L'M'N'Y$ que contenen P serà doncs parell.
En resum doncs, hem provat que en afegir els dos punts X i Y, el nombre de triangles amb vèrtexs en T_{2n+3} és parell. D'acord amb el principi d'inducció, l'enunciat queda provat.

2.1.2 Demostració per reducció a l'absurd.

Considerem el següent exercici:

EXERCICI Provar que $\sqrt{2}$ és irracional.

En aquest problema, se'ns demana provar que un cert nombre, en aquest cas $\sqrt{2}$ és irracional. Per definició, un nombre és irracional si no es pot expressar en forma de p/q, amb $p, q \in \mathbb{Z}$, nombres coprimers. El que utilitzarem per resoldre aquest exercici és el mètode de demostració per reducció a l'absurd:

MÈTODE DE DEMOSTRACIÓ PER REDUCCIÓ A L'ABSURD: Consisteix a fer una suposició determinada i a partir d'aquesta arribar a una contradicció, a un absurd. Això ens permet assegurar que la suposició que hem plantejat inicialment és falsa.

Aplicant aquest mètode al nostre problema, provarem indirectament que el nombre $\sqrt{2}$ no es pot representar en la forma p/q, suposant el contrari i arribant així a una contradicció. Suposem que $\sqrt{2}$ és racional, llavors podem plantejar la següent igualtat:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Ara elevant al quadrat:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 = N$$

Analitzem l'última igualtat. Està clar que N és un natural. D'una banda tenim que $N = p^2$, és a dir N és un quadrat perfecte i, per tant, l'exponent de qualsevol factor primer de N serà parell. D'altra banda, $N = 2q^2$ tindrà parells els exponents dels factors primers imparells, mentre que l'exponent del factor primer 2 en N serà imparell. Hem arribat, doncs, a una contradicció, cosa que implica que la suposició que hem fet, que $\sqrt{2} = p/q$, és falsa. Per tant, concloem que $\sqrt{2}$ no es pot representar en la forma p/q, és a dir que $\sqrt{2}$ no és racional, és irracional.

A continuació veurem una altre exemple del mètode de demostració per reducció a l'absurd, aplicat aquest cop a un problema d'àlgebra provinent de l'Olimpíada Búlgara:

PROBLEMA (OBulM 1996-3). Siguin a, b i c nombres reals i M el màxim de la funció $f(x) = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ en l'interval $[-1, 1]$. Provar que $M \geq 1$.**

Solució:

Comencem observant que per a $a, c = 0$ i $b = -3$ es compleix la igualtat per a $x = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$. Considerem ara les funcions $h(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ i $g(x) = h(x) - (4x^3 - 3x)$. Suposem que per alguns valors de a, b i c, $M < 1$, intentarem arribar d'aquesta manera a un absurd.

Suposant que es donés la situació anterior, llavors, per a $x \in [-1, 1]$, $-1 < h(x) < 1$. D'aquesta manera:

$$g(-1) = h(-1) - (-1) = h(-1) + 1 > 0$$
$$g(-\frac{1}{2}) = h(-\frac{1}{2}) - (1) < 0$$
$$g(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2}) - (-1) = h(\frac{1}{2}) + 1 > 0$$
$$g(1) = h(1) - 1 < 0$$

Pel teorema de Bolzano[1], la funció $g(x)$ té tres zeros. Però $g(x)$ és una funció quadràtica, és a dir, només té dos arrels, per tant, hem arribat una contradicció. Concloem que $M \geq 1$.

[1]El teorema de Bolzano es troba en qualsevol llibre de matemàtiques de 2n de Batxillerat.

2.1.3 El principi de la invariança[2].

El següent problema va ser proposat a un fòrum d'internet per Xavier Tàpia:

PROBLEMA* Tenim un tauler d'escacs i dos varetes màgiques. La primera, escollit un quadrat de 2×2 i la segona un rectangle de 8×1, intercanvia els colors de les caselles (és a dir, caselles blanques passen a negres i viceversa). Determinar si és o no possible, mitjançant la successiva aplicació d'una o l'altra vareta, arribar en una situació en què a l'escaquer hi hagi només una casella negra, i en cas que sigui possible, determinar com s'hi pot arribar.

En alguns problemes se'ns planteja una determinada situació inicial E_0 i un o més algorismes o transformacions que es poden aplicar indefinidament i se'ns demana determinar si és o no possible assolir un determinat estat E. En aquesta classe de problemes és útil considerar l'anomenat principi de la invariança.

PRINCIPI DE LA INVARIANÇA: Consisteix en determinar alguna propietat o objecte que roman invariable en la successiva aplicació de l'algorisme o transformació. Normalment, el principi de la invariança ens servirà per determinar si l'estat E és assolible o no.

En el nostre problema per exemple, la situació inicial plantejada E_0 és un escaquer convencional (32 caselles blanques i 32 de negres pintades alternativament), els algorismes i transformacions que podem aplicar són, depenent si utilitzem la primera o la segona vareta, intercanviar els colors en un quadrat de 2×2 o en un rectangle 8×1, respectivament, i, finalment, l'estat final E que se'ns pregunta si és assolible o no, és l'escaquer amb només una casella negra.
Provarem que, d'acord amb aquestes condicions, no és assolible l'estat E.
Podríem dibuixar-nos un tauler d'escacs i anar provant que és el que passa si apliquem una o l'altra vareta i veure d'aquesta manera quina podria ser la invariant (veure figura 2.1)

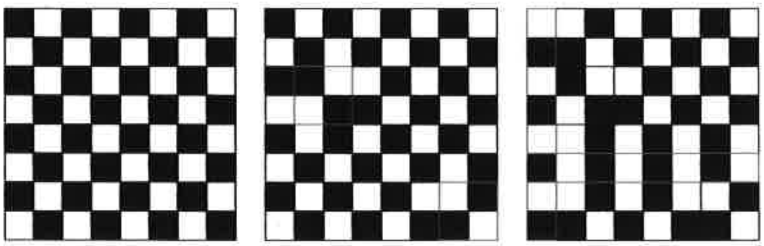


Figura 2.1: Canvis de coloracions a un escaquer

Pel que es veu als dibuixos sembla que la paritat del nombre de caselles blanques i negres es manté. Anem a veure si això és realment així:
Suposem que B i N són el nombre de caselles blanques i negres en l'escaquer en un determinant instant. És clar que $B + N = 64$. Ara escollim $4k$ caselles de l'escaquer de les quals suposem que en tenim b de blanques i n de negres amb $b + n = 4k$. El nombre de

[2]Per aprofundir més en aquesta tècnica, consultar [10]

caselles blanques i negres totals de l'escaquer, resultant d'intercanviar els colors d'aquestes $4k$, obeeix a la transformació V:

$$V : (B, N) \longmapsto (B - b + n, N - n + b)$$

Tenint en compte que $B + N = 64$ i que $b + n = 4k$, tenim que $B' = B - b + n = B + 4k - 2b$ i $N' = N - n + b = 64 - B - 4k + 2b$, on B' i N' és el nombre de caselles blanques i negres respectivament que obtenim després d'intercanviar els colors a les $4k$ caselles. Prenent ara B' i N' mòdul 2, veiem que, en efecte, la paritat d'aquests és la mateixa que la de B i N:

$$B' = B + 4k - 2b \equiv -B \equiv B \bmod 2 \ ; \ N' = 64 - B - 4k + 2b \equiv 64 - B \equiv N \bmod 2$$

Per tant, qualsevol intercanvi de colors que es realitzi en un nombre de caselles múltiple de 4 es conserva la paritat del nombre de caselles blanques inicials i finals respectivament. Al nostre problema, aplicant la primera o la segona vareta, el que fem és intercanviar els colors de $2 \times 2 = 4$ o $8 \times 1 = 8$ caselles. En ambdós casos un nombre de caselles múltiple de 4. Inicialment, en E_0 el nombre de caselles blanques és $32 \equiv 0 \bmod 2$ i el nombre de caselles negres és $32 \equiv 0 \bmod 2$, per tant, podem assegurar d'acord amb el principi de la invariança, que sempre serà així. En l'estat final E tenim que el nombre de caselles blanques és $1 \equiv 1 \bmod 2$ i el nombre de caselles negres és $63 \equiv 1 \bmod 2$. Per tant, és impossible assolir l'estat E.

2.1.4 El principi del màxim i mínim element.

El següent problema va ser proposat per Ivan Geffner en un fòrum de matemàtiques. Està extret del llibre [10].

PROBLEMA Proveu que en un conjunt Ω de $n \geq 3$ punts tals que qualssevol tres d'ells formen un triangle d'àrea com a molt 1, existeix un triangle d'àrea com a molt 4 que conté Ω.**

Solució:
El que se'ns demana al problema pot semblar, a primera vista, difícil. Analitzarem però el problema amb més detall.
Tenim un conjunt de punts en el pla que compleixen una determinada propietat: qualsevol triangle format amb tres punts qualssevol d'aquest conjunt, té una superfície que no excedeix mai 1. Llavors, se'ns demana provar, que si tal conjunt existeix, existirà un triangle d'àrea com a molt 4 que conté el conjunt al seu interior. És a dir, hem de provar que, si tenim el conjunt Ω, podem dibuixar un triangle d'àrea com a molt 4 que el contingui.
Quan necessitem provar l'existència d'un determinat objecte que satisfà unes determinades propietats és útil considerar el prinicipi del màxim i mínim element[3]:
PRINCIPI DE MÀXIM I MÍNIM ELEMENT: Consisteix a determinar un objecte que maximitzi o minimitzi una determinada funció i treure'n partit.
En el nostre cas, considerem la funció àrea d'un triangle contingut en Ω. D'acord amb el que se'ns diu a l'enunciat, aquesta funció tindrà un màxim, 1. Per tant, utilitzant el principi del màxim i mínim element, el que fem és considerar un triangle, que és un objecte, que tingui la màxima àrea, per tant, que maximitzi la funció àrea d'un triangle. Ara cal treure profit d'aquest determinat objecte, per tal d'arribar a demostrar el que se'ns demana a l'enunciat.
Notem que, si aquest triangle que hem escollit, suposem que té de vèrtexs els punts A, B i C, té realment l'àrea màxima, en traçar una paralela l_a a BC per A, qualsevol altre punt de Ω es trobarà al semiplà delimitat per l_a que conté B i C, perquè si això no fos així, si algun punt, D, es trobés a l'altre semiplà (veure figura 2.2), la superfície del triangle DBC seria major que la superficíce del triangle ABC, ja que ambdós triangles tenen la mateixa base, però $\triangle DBC$ major altura que $\triangle ABC$, cosa que contradiu la maximilitat de l'àrea de ABC.
Mitjançant un raonament anàleg, si tracem les rectes l_b i l_c i, suposant que aquestes amb l_a formen el triangle $A'B'C'$, d'acord amb la maximalitat de l'àrea del triangle ABC, qualsevol altre punt de Ω haurà d'estar contingut en un dels costats del triangle $A'B'C'$ o al seu interior. Clarament, A, B i C són els punts mitjos dels costats $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ del triangle $A'B'C'$ i, per tant, l'àrea del triangle $A'B'C'$ és quatre vegades l'àrea del triangle ABC. Finalment, $A'B'C'$ és un triangle que conté Ω, l'àrea del qual és com a molt 4.

Un altre problema que ens permet exemplificar la utilització d'aquest recurs va ser proposat a la OME del 2003:

[3]En anglès aquest principi rep el nom de *Extremal Principle*. Per aprofundir en aquesta tècnica consulteu [10]

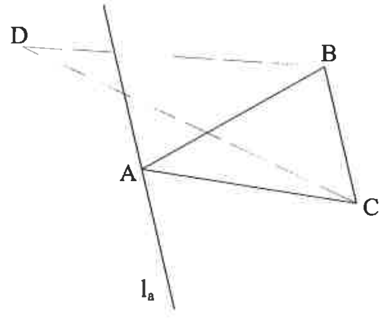


Figura 2.2: D contradiu la maximalitat de la superfície de ABC

PROBLEMA* Existeix algun conjunt finit de nombres reals M que contingui almenys dos elements diferents i que compleixi la propietat que per a dos nombres a, b qualssevol de M, el nombre $2a - b^2$ és també un element de M?

Solució:
Provarem que no existeix tal conjunt. Per veure això, raonarem per reducció a l'absurd i farem ús del principi del màxim i mínim element.
Comencem notant que si M és un conjunt finit que conté almenys dos elements diferents estarà acotat, és a dir, tindrà un element màxim, diem-li, p, i un element mínim, diem-li q. El que farem serà jugar amb aquests dos elements per tal d'arribar a una contradicció.
D'acord amb el que s'ha vist a l'enunciat, si $p, q \in M$, també $2p - q^2 \in M$. Com que q és l'element mínim i p l'element màxim s'haurà de complir la següent desigualtat:

$$p > 2p - q^2 > q \Rightarrow q^2 > p > q$$

Per tal que aquesta desigualtat es compleixi és clar que $q \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
Fent un raonament similar al d'abans, si $p, q \in M$, també $2q - p^2 \in M$. Així que tenim:

$$p \geq 2q - p^2 \geq q \Rightarrow p > q > p^2 > 0$$

Si aquesta desigualtat és certa, llavors $p \in (1, 0)$. A més però, com que en aquestes condicions $p > q > 0$, tindríem que $q \in (1, 0)$.
D'aquesta manera, hem arribat a la conclusió que:

$$q \in ((-\infty, 0) \cup (1, \infty)) \cap (1, 0) = \varnothing$$

Això és, doncs, una contradicció, hem arribat a un absurd i, per tant, concloem que no existeix cap conjunt M que satisfaci les condicions de l'enunciat.

2.1.5 Observació i creació d'hipòtesis.

Tot i que l'habilitat principal del matemàtic és el pensament deductiu, de vegades la capacitat d'observació ens pot servir per simplificar molt un determinat problema. Tot seguit veurem alguns exemples en diverses àrees de les matemàtiques que ens serveixen per veure com la capacitat d'observació i creació d'hipòtesis mitjançant una adequada intuïció matemàtica, ens permet simplificar moltíssim un problema.

PROBLEMA Determinar el valor de:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

Solució:
Quan apareixen sumes d'aquests tipus, de vegades si no es disposa de recursos per calcular-les[4], és recomanable considerar els primers casos i a partir d'aquests, mitjançant l'observació i la intuïció, deduir-ne la fórmula general. Per això en calculem els primers casos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

En aquest cas, resulta molt fàcil intuir la fórmula general. La hipòtesi que plantegem és doncs:
Hipòtesi: El valor de la suma és per a un cert n, $\frac{n-1}{n}$.
Només cal comprovar si realment la hipòtesi plantejada és correcta. Per fer-ho, procedirem per inducció:
Els primers casos ja estan provats.
Suposem que per a un cert n:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}$$

Llavors cal provar que per a $n+1$ també es complirà:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}\frac{(n-1)(n+1)+1}{n+1}=\frac{n^2-1+1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

La demostració és completa.

[4]En aquest problema la solució més fàcil i natural és la manera següent: utilitzant la identitat $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$, la suma a determinar esdevé $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$.
En segons quines altres sumes, pot ser interessant utilitzar recurrències.

PROBLEMA (Mihai Miculita) Considerem un quadrilàter convex $ABCD$ i un punt P interior a aquest. Tracem les perpendiculars de P als segments AB, BC, CD i DA, respectivament, K, L, M i N. Provar que els ortocentres dels triangles AKN, KBL, LCM i MDN, respectivament H_a, H_b, H_c i H_d formen un paral·lelogram.**

Solució:
En aquest problema per exemple, se'ns demana provar que H_a, H_b, H_c i H_d formen un paral·lelogram. Està clar, doncs, que hem de provar que $H_aH_b \parallel H_cH_d$ i $H_bH_c \parallel H_dH_a$. Ara bé, resulta difícil provar que $H_aH_b \parallel H_cH_d$ directament, perquè hauríem de provar que $\angle H_aH_bH_d = \angle H_bH_dH_c$, cosa bastant complicada. El que fem és observar el dibuix (veure figura 2.3) i intentar veure alguna propietat de la construcció que ens permeti simplificar el problema.
En aquest cas per exemple, ens preguntem què és el que passa si tracem les dues diagonals del quadrilàter $KLMN$.

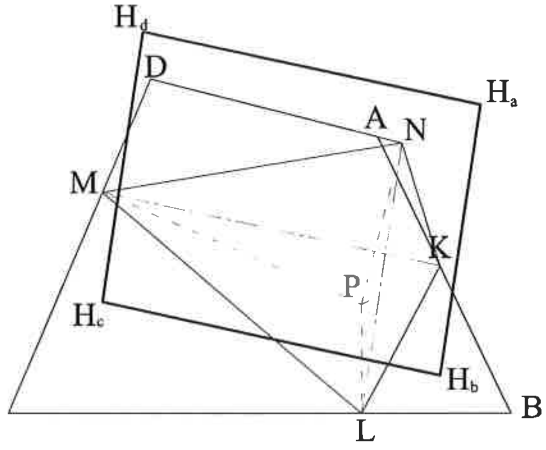


Figura 2.3: Observació del quadrilàter (1)

Pel que veiem, sembla que $NL \parallel H_aH_b$ i $NL \parallel H_cH_d$. Si això fos realment cert, hauríem arribat a la conclusió que $H_aH_b \parallel H_cH_d$ i, per tant, anàlogament, també $H_bH_c \parallel H_dH_a$. Així doncs, ens plantegem la següent hipòtesi:
Hipòtesi: $NL \parallel H_aH_b$ *i* $NL \parallel H_cH_d$*;* $KM \parallel H_bH_c$ *i* $KM \parallel H_dH_a$.
Òbviament, el següent pas consisteix en provar la hipòtesi:
Com que $MH_c \parallel KH_b$, per ser ambdues rectes perpendiculars a BC, les rectes MK i H_cH_b són paral·leles si i només si $MH_c = KH_b$. És conegut i és fàcil provar per homotècia, per exemple, que la distància de l'ortocentre a un vèrtex és igual a la meitat de la distància del circumcentre al costat oposat del vèrtex en qüestió. Per tant, $MH_c = KH_b$ si i només si $O_cM_c = O_bM_b$ on O_b i O_c són els circumcentres respectius dels triangles MLC i KLB i M_b, M_c són els punts mitjos respectius dels segments LB i LC. És clar que O_c i O_b són els punts mitjos dels segments PC i PB, en ser PC i PB els diàmetres de les circumferències que contenen els quadrilàters $MPLC$ i $PKBL$, respectivament. Per Tales, $O_cO_b \parallel BC$ i com que $O_cM_c \parallel O_bM_b$, concloem que $O_cM_c = O_bM_b$. Així doncs, $MH_c = KO_b$ i, per tant,

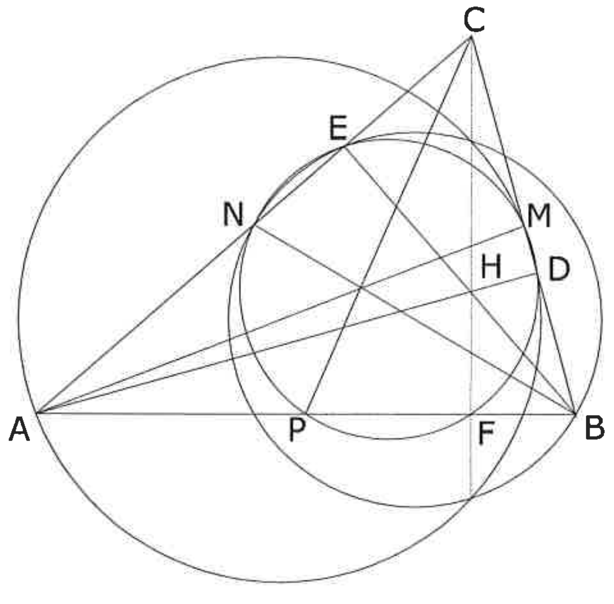
$MK \parallel H_cH_b$. Anàlogament s'obté que $H_cH_b, H_dH_a \parallel MK$ i $H_dH_c, H_aH_b \parallel NL$. Per tant, la hipòtesi queda provada.
Finalment, $H_aH_bH_cH_d$ és un paral·lelogram.

Per tancar la secció de resolució de problemes, presentem a continuació un problema realment difícil, de la revista Mathematical Reflections.

PROBLEMA*[5] (Cosmin Phoata) Sigui ABC un triangle amb M, N i P els punts mitjos dels costats BC, CA i AB, i X, Y i Z els punts mitjos de les altures baixades de A, B i C, respectivament. Provar que el centre radical de les circumferències circumscrites als triangles AMX, BNY i CPZ és el centre de la circumferència dels nou punts del triangle ABC.**

Solució:
Sigui O el centre de la circumferència dels nou punts del triangle ABC. A més, designarem per (RST) la circumferència circumscrita al triangle RST.
Per tal de provar l'enunciat provarem que l'eix radical de (BNY) i (CPZ) passa per O. Així, anàlogament, arribarem al fet que l'eix radical de (CPZ) i (AMX), i el de (AMX) i (BNY) concorren en O, d'on es desprèn que O és el centre radical de (AMX), (BNY) i (CPZ).
Per començar, demostrarem un lema que ens serà de força utilitat:

Lema 1: Siguin D, E i F els peus de les altures de A, B i C a BC, CA i AB, respectivament. L'eix radical de (AMD) i (BNE) és CF (cosa que implica que el centre radical de (AMD), (BNE) i (CPF) és l'ortocentre H del triangle ABC).

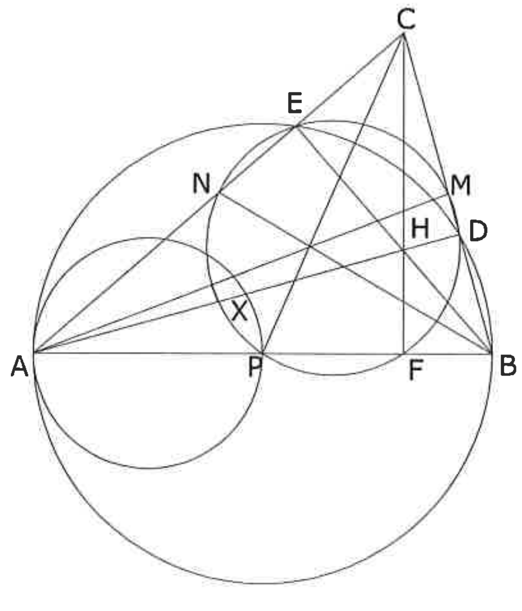


[5]En aquest problema s'hi han posat tres estrelles ja que es considera de major dificultat que qualsevol problema que es demani resoldre en una olimpíada.

Demostració:
En efecte, l'eix radical de la circumferència dels nou punts i (AMD) és BC. Anàlogament, l'eix radical de la circumferència dels nou punts del triangle ABC i (BNE) és AC. D'aquí que el centre radical de la circumferència dels nou punts del triangle ABC, de (BNE) i (AMD) sigui el punt C, d'on se'n desprèn que l'eix radical de (AMD) i (BNE) passi per C.
Ara bé, els circumcentres dels triangles AMD i BNE són els punts mitjos de AM i BN, respectivament, que resulten ser els punts mitjos de NP i PM. Així doncs, la línia que uneix els circumcentres dels triangles AMD i BNE és paral·lela a AB. És un fet conegut que aquesta mateixa línia és perpendicular a l'eix radical de les circumferències circumscrites a aquests dos triangles i, per tant, l'eix radical d'aquestes dues circumferències és CF.

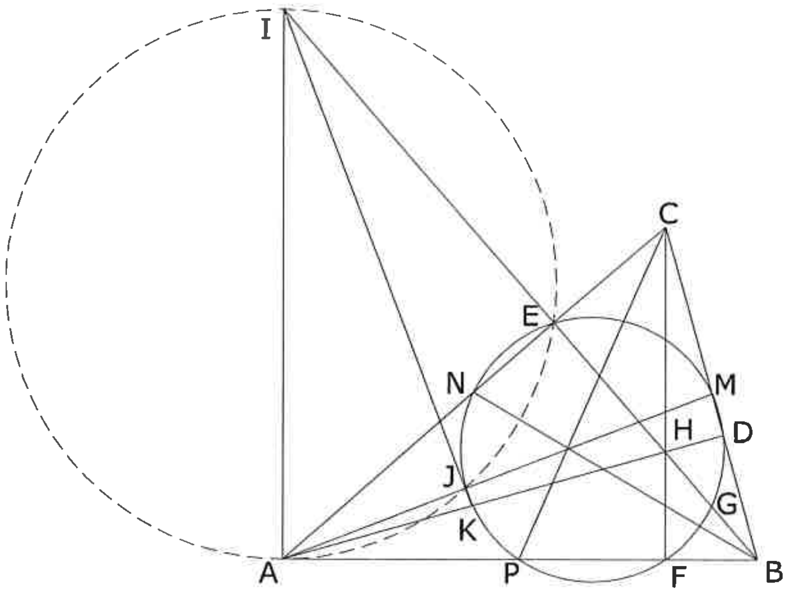
Prosseguim provant un altre lema:

Lema 2: El centre radical de (AMX), (BNE) i (CPF) és K, el punt mig del segment AH.



Demostració:
D'acord amb el Lema 1, serà suficient provar que l'eix radical de (BNE) i (AMX) passa per K. Per fer-ho, provarem que el centre radical de (APX), (BNE) i (AMX) és K, d'on se'n deriva la conclusió.
Per una banda, l'eix radical de (APX) i (AMX) és AD.
Anem a veure què passa amb l'eix radical de (APX) i (BNE). Aquest serà perpendicular a la línia que uneix els centres de (APX) i (BNE). Com que $\angle AXP = 90$, el centre de (APX) és el punt mig d'AP. Ara és fàcil veure que la línia de centres és paral·lela a la

mitjana AM. A més, considerem ara (AEB) (circumferència de diàmetre AB), sabem que aquesta és tangent a (APX), per tant, l'eix radical de (APX) i (AEB) és la perpendicular a AB per A; i, a més, l'eix radical de (AEB) i (BNE) és EB, per tant, d'aquí en deduïm que l'eix radical de (APX) i (BNE) és la perpendicular a AM que passa pel punt d'intersecció de la perpendicular a AB per a A i l'altura BE. Hem de provar, doncs, que aquesta recta passa per K.
Per veure això provarem que si I és el punt d'intersecció de la perpendicular a AB per A i l'altura BE, llavors IK és perpendicular a AM:



Sigui J el punt d'intersecció de la circumferència dels nou punts del triangle ABC amb la mitjana AM i sigui G el punt mig de BH. Notem que $GM \parallel IA$, per tant, $\angle IAM = \angle GMA = \angle GMJ = \angle JEG$, d'on se'n desprèn que els punts I, E, J i A estan en una circumferència. Però com que $\angle IEA = 90$, $\angle IJA = \angle MJK = 90$, deduïm que A, J i K estan al·lineats i, a més, $AM \perp IK$, que és el que volíem provar.
Així doncs, K és el centre radical de (AMX), (BNE) i (CPF).

Retornem al problema. Definim $r(x_i, x_j)$ l'eix radical relatiu a les circumferències x_i i x_j; $c(x_i, x_j, x_k)$ el centre radical de les circumferències x_i, x_j i x_k. Finalment, indicarem amb $r_i \cap r_j$ l'intersecció de les rectes r_i i r_j, i amb $P_i \cup P_j$ la línia que passa pels punts P_i i P_j.
D'acord amb la notació anterior:

$$r((BNY),(CPZ)) = c((BNY),(CPZ),(BNE)) \cup c((BNY),(CPZ),(CPF))$$

D'altra banda, però, tenint en compte el lema 2:

$$c((BNY),(CPZ),(BNE)) = r((BNY),(BNE)) \cap r((CPZ),(BNE)) =$$
$$= BN \cap (c((CPZ),(BNE),(CPF)) \cup c((CPZ),(BNE),(AMD))) = BN \cap ((CP \cap AD) \cup L)$$

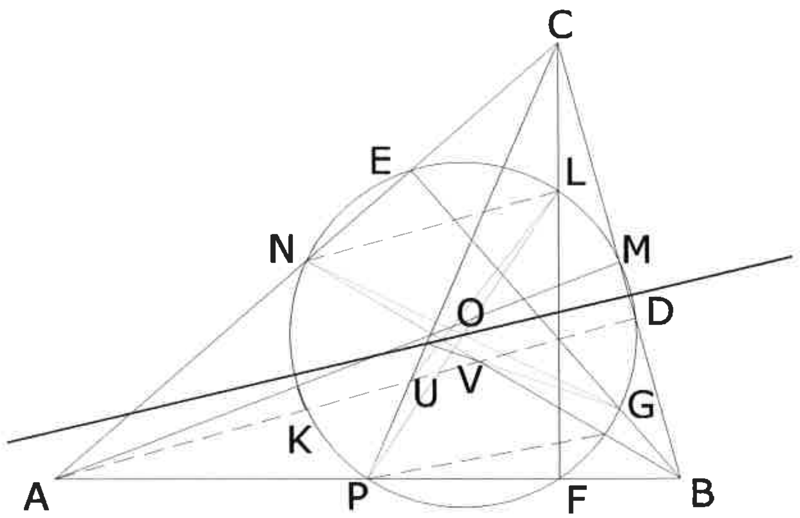
On L és el punt mig de CH. Anàlogament:

$$c((BNY),(CPZ),(CPF)) = CP \cap ((BN \cap AD) \cup G)$$

Així, l'eix radical de (BNY) i (CPZ) queda definit de la següent manera:

$$r((BNY),(CPZ)) = (BN \cap ((CP \cap AD) \cup L)) \cup (CP \cap ((BN \cap AD) \cup G))$$

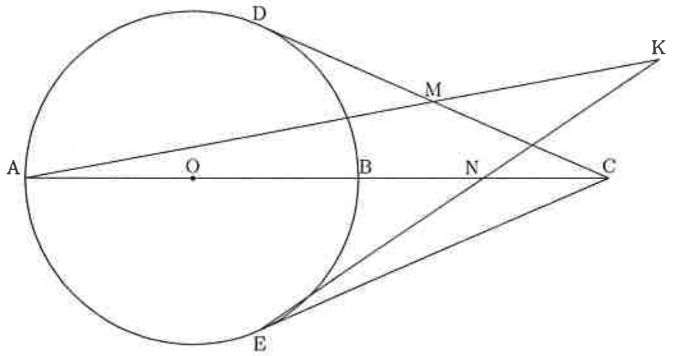
Finalment, posant que $U = CP \cap AD$ i $V = BN \cap AD$, només cal aplicar el teorema de Desargues als triangles UPL i VGN, per veure que, com que UV, PG i LN són paral·leles, per ser les tres rectes perpendiculars a BC, llavors els punts $UP \cap VG$, $UL \cap VN$ i $PL \cap GN$ estan al·liniats. Resulta ser que $UP \cap VG$, $UL \cap VN$ estan continguts en l'eix radical de (BNY) i (CPZ) i a més, $LP \cap GN = O$ (per ser ambdós, LP, GN diàmetres d'aquesta) d'on se'n deriva el resultat.



2.2 Creació de problemes: pautes i consells.

De vegades enlloc de resoldre problemes podem intentar crear-los nosaltres mateixos. Aquest exercici ens pot ajudar a buscar noves idees matemàtiques en què basar el problema i, d'altra banda, també augmentar la nostra creativitat. A continuació exposarem alguns exemples de problemes creats per l'autor juntament amb les idees que han permès crear-los:

PROBLEMA* (Messegué, A.). Sigui w una circumferència de centre O i diàmetre AB. Considerem un punt C qualsevol sobre l'extensió de AB, exterior a w i a continuació de B. Tracem les tangents CD i CE a w. M i N són els punts mitjans de CD i BC respectivament. Si K és el punt d'intersecció de AM i EN, demostreu que els punts A, E, C i K estan en una circumferència.



Solució:
Per tal de demostrar l'enunciat provarem que els triangles $\triangle ENC$ i $\triangle AMC$ són semblants. Com que $\angle MCA = \angle NCE$, d'aquesta manera haurem provat que $\angle KAC = \angle MAC = \angle NEC = \angle KEC$, d'on se'n deriva la conclusió.
Nombrem amb r i x, les longituds del radi de w i de les tangents CD i CE, respectivament. Per una banda, en el triangle $\triangle AMC$ tenim que $FC = \frac{x}{2}$ i $AC = AO + OC = r + \sqrt{x^2 + r^2}$. Per una altra banda, en el triangle $\triangle ENC$ tenim que $EC = x$ i $NC = \frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(r + \sqrt{x^2 + r^2} - 2r) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + r^2} - r)$.
Finalment:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{\frac{x}{2}}{r + \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{x}{2(r + \sqrt{r^2 + x^2})} = \frac{x}{2(r + \sqrt{r^2 + x^2})} \cdot \frac{-r + \sqrt{x^2 + r^2}}{-r + \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{-r + \sqrt{x^2 + r^2}}{2x}$$

$$\frac{NC}{EC} = \frac{\frac{1}{2}(-r + \sqrt{x^2 + r^2})}{x} = \frac{-r + \sqrt{x^2 + r^2}}{2x}$$

És a dir, $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{NC}{EC}$, per tant, els triangles $\triangle ENC$ i $\triangle AMC$ són semblants, que és el que volíem provar.

Idees utilitzades en la creació d'aquest problema.
Per tal de crear un problema de geometria és recomanable observar diverses construccions geomètriques i intentar esbrinar-ne certes propietats. Alguns programes informàtics poden

contribuir a facilitar aquesta tasca. Un exemple d'aquests programes és l'Autocad, que ens va permetre veure ràpidament la semblança entre els triàngles ENC i AMC, d'on se'n va deduir per consegüent, que els punts A, E, C, K estaven en una circumferència.

PROBLEMA* (Arnau M.) Siguin a, b, c, d i e, nombres reals positius. Demostreu que l'única solució del sistema:

$$\begin{cases} \log_a b \log_b c = \log_c d \log_d e \\ \log_d b \log_b c = \log_c e \log_e b \\ \log_a b \log_d c + \log_c b \log_d e = 2\dfrac{\log_e c \log_d b}{\log_b d \log_e b} \end{cases}$$

És $a = b = c = d = e = k$, per a k un real positiu.
Solució:
Numerem les equacions respectivament amb (1), (2) i (3). Multiplicant (3) per $\log_b c$ i tenint en compte (1) i (2) obtenim:

$$(\log_b c \log_a b) \log_d c + (\log_b c \log_c b) \log_d e = 2\frac{(\log_b c \log_d b) \log_e c}{\log_b d \log_e b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_d c \log_c d \log_d e + \log_d e = 2 \log_d e = 2\frac{\log_c e \log_e b \log_e c}{\log_b d \log_e b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_d e = \frac{\log_e b}{\log_b d \log_e b} = \log_d b \Rightarrow e = b$$

D'altra banda, podem aïllar $\log_b c$ en (1) i (2) respectivament:

$$\log_b c = \frac{\log_c d \log_d e}{\log_a b}$$

$$\log_b c = \frac{\log_c e \log_e b}{\log_d b}$$

Igualant les dues equacions obtingudes i aplicant les propietats dels logaritmes:

$$\frac{\log_c d \log_d e}{\log_a b} = \frac{\log_c e \log_e b}{\log_d b} \Leftrightarrow \frac{\log_d b \log_c d \log_d e}{\log_a b \log_c e} = \log_e b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_d a \log_d c \log_c d = \log_e b \Leftrightarrow \log_d a = \log_e b$$

Tenint en compte que $e = b$, llavors $\log_d a = \log_e b = 1$, per tant, $a = d$. Substituint $d = a$ i $e = b$ la primera i tercera equació, respectivament, queden:

$$\log_a b \log_b c = \log_c a \log_a b \Leftrightarrow \log_b c = \log_c a$$

$$\log_a b \log_a c + \log_c b \log_a b = 2\frac{\log_b c \log_a b}{\log_b a \log_b b}$$

Simplificant la segona equació i tenint en compte que $\log_b c = \log_c a$:

$$\log_a b \log_a c + \log_c b \log_a b = 2 \log_a b \log_a c, 2\frac{\log_b c \log_a b}{\log_b a \log_b b} = 2 \log_c a (\log_a b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a b \log_a c = \log_c a (\log_a b)^2 \Leftrightarrow (\log_a c)^2 = (\log_a b)^2 \Leftrightarrow \log_a c = \log_a b \Leftrightarrow c = b$$

Finalment, $\log_c a = \log_b c = 1$, per tant, $a = b = c = d = e = k$, per a un k real positiu.

Idees utilitzades en la construcció d'aquest problema:
La idea principal és construir un sistema en què apareguin variables en logaritmes.
Es va intentar jugar amb un sistema d'equacions de tal manera que multiplicant una determinada equació per $\log_x y$ s'obtinguessin factors que apareguessin en altres equacions del sistema i que permetessin transformar l'equació. A més, es va utilitzar la identitat: $\log_x y \cdot \log_y x = 1$, de manera que, utilitzant la multiplicació anterior, hi haguessin factors que se simplifiquessin.
Per construir tot el sistema, s'havia d'obtenir un sistema d'equacions coherent i compatible, per això es va optar per plantejar equacions tals que es verifiquessin igualant totes les variables, d'aquesta manera s'aconseguia que el sistema fos compatible determinat.

PROBLEMA (Arnau M.) Siguin x_1, x_2, ..., x_{2007} reals tals que**

$$32x_1^5 - 320x_1^4 + 1277x_1^3 - 2542x_1^2 + 2526x_1 = 1,$$
$$32x_2^5 - 320x_2^4 + 1277x_2^3 - 2542x_2^2 + 2526x_2 = 2,$$
$$\dots$$
$$32x_{2007}^5 - 320x_{2007}^4 + 1277x_{2007}^3 - 2542x_{2007}^2 + 2526x_{2007} = 2007.$$

Determinar el valor de $x_1 + x_2 + ... + x_{2007}$.
Solució:
Considerem el polinomi $P(x) = 32x^5 - 320x^4 + 1277x^3 - 2542x^2 + 2526x - 1004$. És fàcil veure que 2 és una arrel real de $P(x)$ (s'intueix pel fet que el coeficient principal sigui exactament una potència de 2), més concretament:

$$P(x) = (x-2)(32(x-2)^4 - 3(x-2)^2 + 2) = 32(x-2)^5 - 3(x-2)^3 + 2(x-2)$$

Per tant, d'aquí en deduïm que la gràfica de $P(x)$ és la traslladada dos unitats a la dreta de la gràfica del polinomi $Q(x) = 32x^5 - 3x^3 + 2x$. També tenim que $P(x-2) = -P(-(x-2))$, cosa que implica que la gràfica de $P(x)$ és simètrica respecte el punt $(2, 0)$. A més, es pot comprovar que

$$Q'(x) = 160x^4 - 9x^2 + 2 = 160\left(x^2 - \frac{9}{2 \cdot 160}\right)^2 + 2 - \frac{81}{4 \cdot 160} > 0$$

Per tant, Q és una funció estrictament creixent. Ara aplicant el teorema de Bolzano, com que $Q(0) = 0$ aquesta serà la seva única arrel real. Se'n desprèn que 2 és l'única arrel real de $P(x)$.
Definim ara $P_i(x) = 32x^5 - 320x^4 + 1277x^3 - 2542x^2 + 2526x - i$ amb $1 \le i \le 2007$ i $i \in \mathbb{N}$, d'aquesta manera x_i és una arrel de P_i. És clar que les gràfiques d'aquests polinomis estaran traslladades verticalment respecte de la gràfica del polinomi $P(x)$ i, per tant, només tallaran en un punt l'eix de les abscisses, cosa que implica que el valor de x_i és únic. A més, com que hem dit que la gràfica de P és simètrica respecte del punt $(2, 0)$, els punts d'intersecció de

les gràfiques de P_i i P_{2008-i} amb l'eix real, respectivament $(x_i, 0)$ i $(x_{2008-i}, 0)$, equidistaran del punt d'intersecció de P amb el mateix eix (vegeu figura 2.4), és a dir del punt $(2, 0)$. Per tant:

$$\frac{x_i + x_{2008-i}}{2} = 2 \Leftrightarrow x_i + x_{2008-i} = 4 \ ; \forall 1 \leq i \leq 1003$$

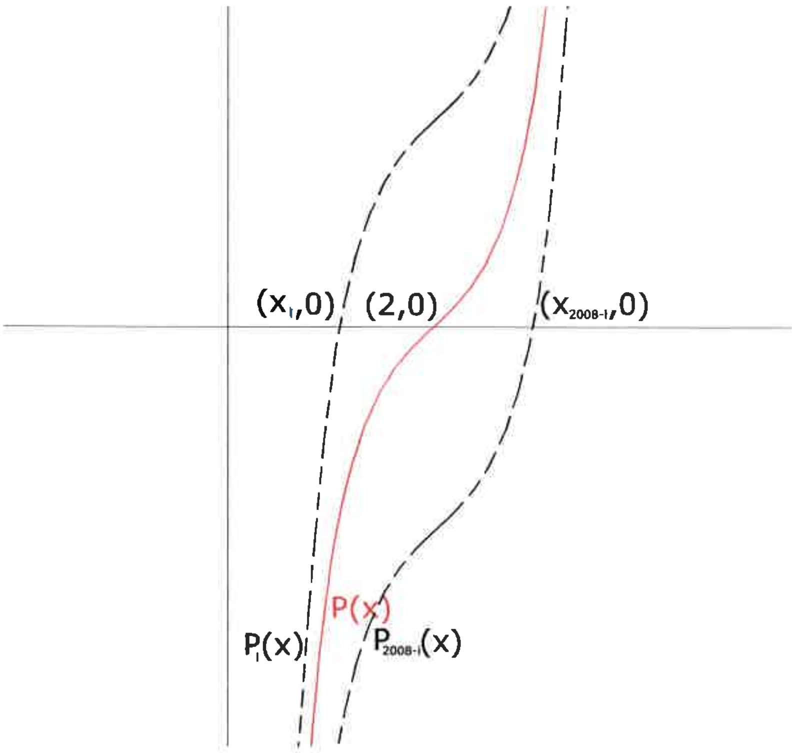


Figura 2.4: Observació de les gràfiques de p(x) i les traslladades d'aquesta verticalment.

Finalment:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2007} = (x_1 + x_{2007}) + (x_2 + x_{2006}) + ... + (x_{1003} + x_{1005}) + x_{1004} = 4 \cdot 1003 + 2 = 4014$$

Idees utilitzades en la construcció d'aquest problema:

La idea en què es basa aquest problema és la següent: considerem un polinomi $p(x)$ senar[6] d'una sola arrel real i la seva gràfica. Per la condició de ser senar, la gràfica de P és simètrica respecte del punt $(0, 0)$. Per la condició de tenir només una arrel real, la gràfica de P només talla en un punt l'eix de les abscisses. Si ara traslladem la gràfica de P verticalment $\pm k$

[6]Diem que un polinomi és senar si $P(x) = -P(-x)$. Els polinomis senars són de la forma $a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x$ i la seva característica més remarcable és que la seva gràfica resulta ser simètrica respecte del punt $(0, 0)$.
Diem que un polinomi és parell si $P(x) = P(-x)$. Els polinomis parells són de la forma $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + ... + a_0$, i la seva característica més important és que les seves gràfiques són simètriques respecte de l'eix de les ordenades.

unitats, considerant els polinomis $p(x) \pm k$ amb $k \in \mathbb{R}$, els punts de tall (també únics) d'aquestes noves gràfiques amb l'eix real, diem-los $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, equidistaran del punt $(0, 0)$; equivalentment, el punt origen serà el punt mig del segment d'extrems $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, és a dir, $x_1 + x_2 = 0$.
Tenint en compte aquesta idea, es va construir una seqüència de 2007 (l'elecció d'aquest nombre és no arbitrària) polinomis tals que tinguessin de terme independent -1, -2, ..., -2007 i que representessin la gràfica d'un polinomi, $P(x)$, d'única arrel real 2, la gràfica del qual fos simètrica respecte del punt $(2, 0)$, traslladada verticalment.
A partir d'aquestes dades va ser fàcil construir el polinomi $P(x)$: per una banda, observant que $1004 = 1024 - 24 + 4 = 32 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2$, es va escriure el polinomi $Q(x) = 32x^5 - 3x^3 + 2x$ i traslladant la gràfica d'aquest dos unitats a la dreta, per tal d'aconseguir el terme independent -1004, i eliminant la triviliatat que hauria tingut el problema en cas contrari, mitjançant la substitució $x \longmapsto x - 2$. El resultat obtingut és el polinomi $P(x)$ de l'enunciat i la seqüència dels polinomis $P_i(x)$.

2.2.1 Altres problemes

PROBLEMA (Arnau M.) Sigui $n \geq 3$ un enter positiu. Determineu la manera de trobar un conjunt K de $\binom{n}{3}$ punts en el pla tals que per qualsevol punt P, de K, es puguin traçar 3 rectes tals que en cada una d'aquestes hi ha exactament $n-2$ punts de K comptant P.**

Solució:

En aquest problema la idea clau és considerar n circumferències no concèntriques i no coaxials, $w_1, w_2, ..., w_n$, els seus eixos i centres radicals. Provarem que els $\binom{n}{3}$ centres radicals formats formen un conjunt amb les propietats de l'enunciat.

En efecte, cada centre radical de qualsevols tres circumferències ve determinat per 3 rectes, els eixos radicals corresponents a les tres circumferències agafades de dos en dos.

Considerem ara dos circumferències w_i, w_j i el seu eix radical. Els punts que trobem en aquest eix radical són els centres radicals de w_i, w_j, w_k, on $k \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i, j\}$. En total, doncs, $n-2$ punts.

Finalment, doncs, per fer el que se'ns demana a l'enunciat, és suficient dibuixar els centres radicals de n circumferències.

Un exemple del cas $n = 5$ seria el dibuix que es mostra a continuació (observem que P_7 no està contingut en la mateixa recta que conté P_3, P_4, P_9):

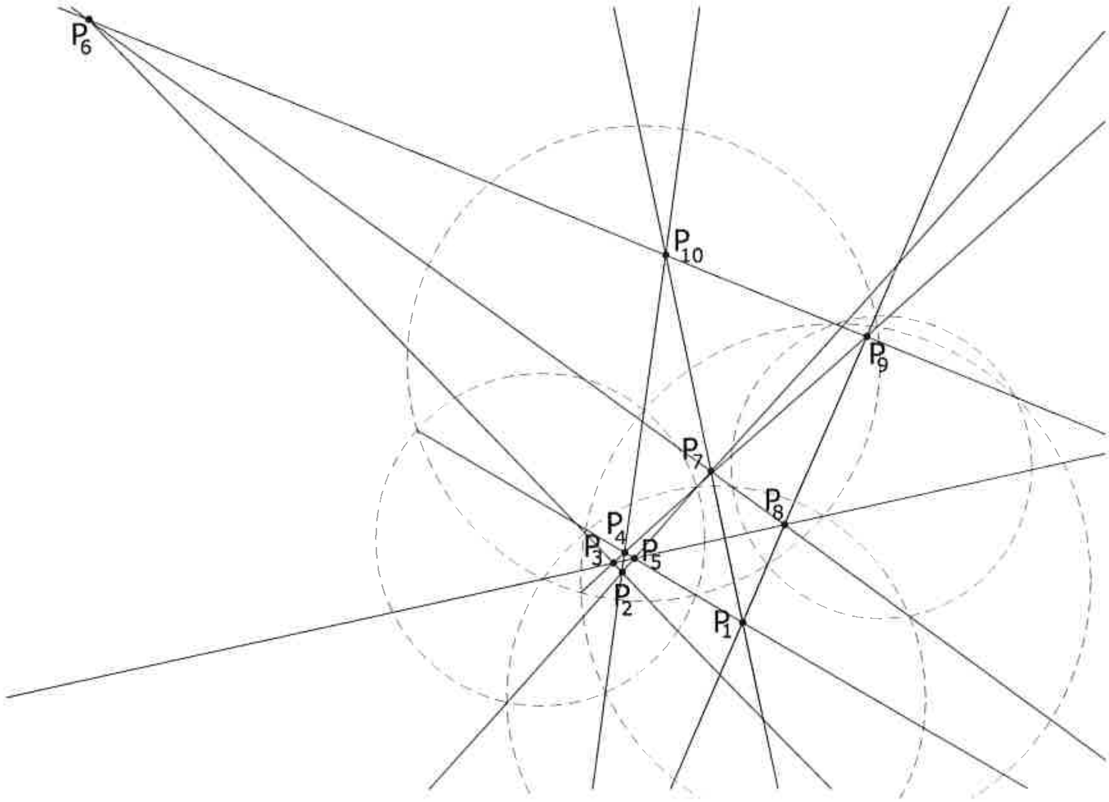


Figura 2.5: El cas $n = 5$.

PROBLEMES AL BILLAR

A continuació exposem un petit compendi de problemes relacionats amb el bitllar, idea que se li acudí a Xavier Tàpia després de realitzar el problema 2 de la *OMC* del 1997 (el primer dels problemes d'aquest recopilatori).

PROBLEMA-BITLLAR1* (OMC 1997-2) Tenim una cantonada en un billar defectuós amb una cantonada que fa un angle lleugerament inferior a 90 graus, com la figura (vegeu figura 2.6). Determinar com podem llançar la bola (sense efecte) de forma que toqui a les dues bandes i torni a la posició inicial.

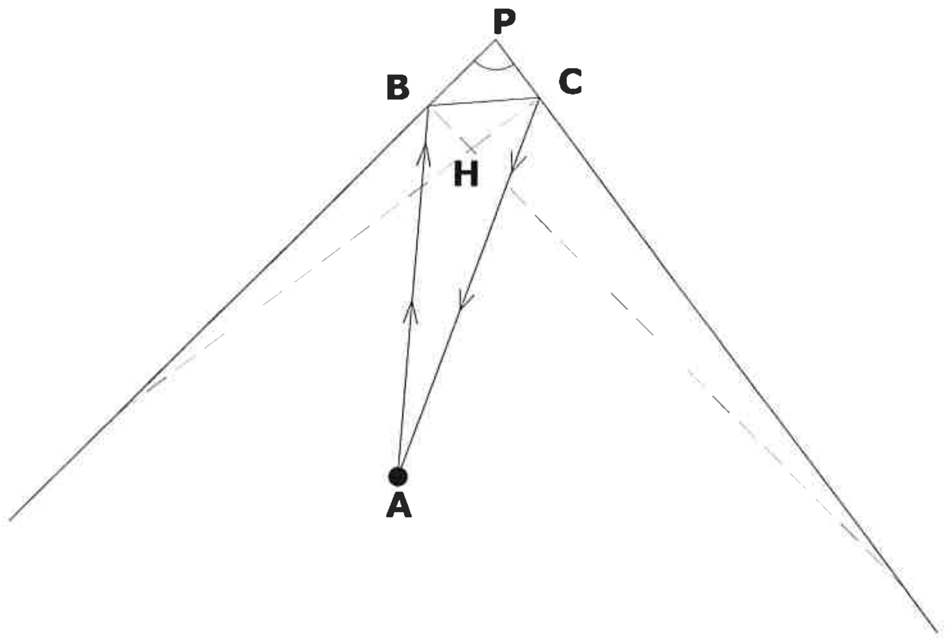


Figura 2.6: Jugant al bitllar (1)

Solució:

Primer de tot, necessitem definir la direcció de la pilota quan xoca contra una paret formant amb aquesta un angle qualsevol. Observem, que al rebotar, suposant que la bola és perfectament esfèrica i no hi ha cap fregament entre la paret i ella, l'angle en què surt la bola (ens refirim a l'angle mínim que hi ha entre la recta que defineix la direcció de la bola i la paret) és el mateix que l'angle amb què rebota (ens referim a l'angle mínim que hi ha entre la recta que defineix la nova direcció de la bola i la recta que defineix la paret (vegeu figura 2.7)). És a dir, la recta que defineix la nova direcció és la simètrica de la recta que defineix la direcció inicial respecte la perpendicular a la paret en el punt en què la pilota xoca contra la paret. Tenint clar això, analitzem el problema principal.

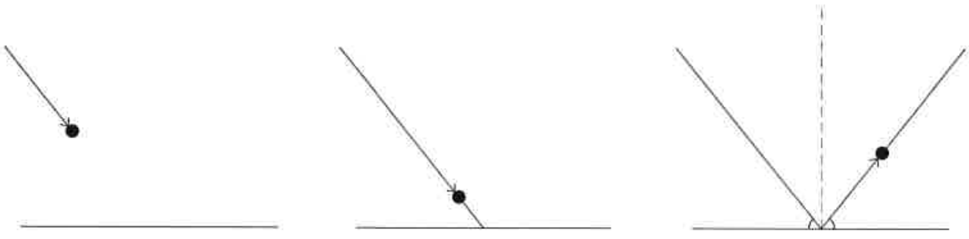


Figura 2.7: Jugant al bitllar (2)

Suposem el problema resolt, considerem el triangle ABC que té com a costats la trajectòria que segueix la pilota al rebotar en les dos parets i tornar en la posició inicial (amb A el punt on disparem la pilota (torneu a mirar la 2.6)). Sigui H el punt d'intersecció de les perpendiculars a BP i a PC per B i C, respectivament. Ara, d'acord amb el que hem explicat en el primer paràgraf, és fàcil veure que com que $\angle HBP = 90$, $\angle ABH = \angle HBC$, i anàlogament, $\angle HCB = \angle HCA$, d'on se'n desprèn que H és l'incentre del triangle ABC. Ara bé, és conegut que l'ortocentre de qualsevol triangle acutangle coincideix amb l'incentre del seu triangle, tenint en compte aquesta propietat, és fàcil veure que si $M = CH \cap BP$ i $N = BH \cap PC$, llavors H és l'ortocentre del triangle PMN, més en concret, els punts P, H, A es troben en una recta perpendicular a MN. Ara és fàcil fer el que se'ns demana a l'enunciat: per tal de determinar per exemple el punt B, és suficient dibuixar la perpendicular a PA per A, que intersecta a les dos parets en els punts M' i N'. Finalment, B és el peu de la perpendicular de N' a $M'P$.

PROBLEMA-BITLLAR2 (Tàpia, X.) En una superfície horitzontal infinita tenim una paret recta vertical molt llarga, i dos punts A, B, damunt de la superfície horitzontal i a la mateixa banda de la paret. A més, se'ns col·loca una bola en el punt A. Determinar amb quin angle respecte la paret hem de disparar la bola per tal de què després de rebotar a la paret, passi pel punt B, suposant que el llançament es realitza sense efecte i que no hi ha cap tipus de fregament entre la bola i la superfície horitzontal i la paret.

Solució (Messegué, A.):

El primer que hem de fer és intentar formalitzar el problema. Posarem que P és el punt de la paret en què volem que la pilota reboti, per tant, el punt cap al qual hem de disparar la pilota. D'aquesta manera podem replantejar el problema de la següent manera:

Se'ns dona una recta r qualsevol i dos punts A i B en el pla tals que A i B estan en el mateix semipla determinat per r. Considerem A' i B' les projeccions ortogonals de A i B en r. Determinar un punt P de r pertanyent al segment $A'B'$ tal que $\angle APA' = \angle BPB'$.

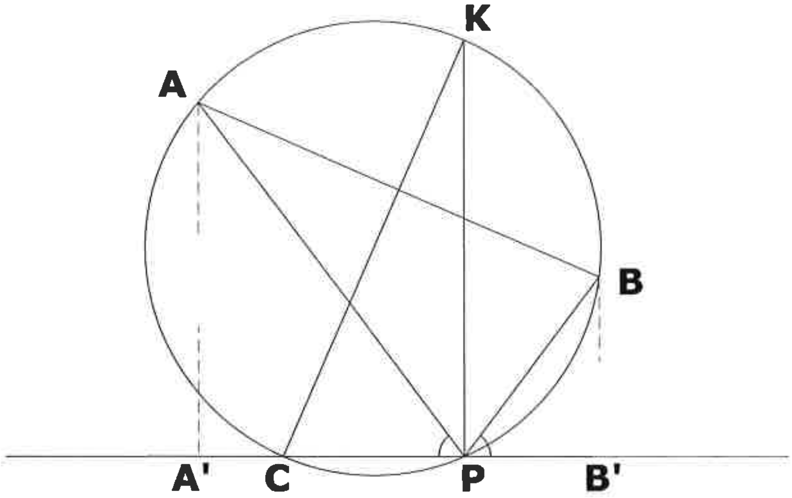


Figura 2.8: Jugant al bitllar (3)

Considerem ara el problema resolt. Sigui K el punt d'intersecció de la perpendicular a r en P amb la circumferència circumscrita al triangle ABP, i sigui C el segon punt d'intersecció de tal circumferència amb r. Notem que com que $\angle APA' = \angle BPB'$, llavors també $\angle APK = \angle KPB$ d'on se'n segueix que K és el punt mig de l'arc AB. A més, també tenim que $\angle ACK = \angle AKP = \angle KPB = \angle KCB$, i també $\angle KPC = 90$, cosa que implica que $CK \perp AB$ i com que K és el punt mig de l'arc AB, se'ns dubte, CK és la mediatriu de AB. Ara doncs, és fàcil fer el que se'ns demana a l'enunciat.
Per tal de trobar P doncs, només cal traçar la mediatriu de AB, si C és el punt d'intersecció de la mediatriu de AB amb r, P és el segon punt d'intersecció de la circumferència circumscrita al triangle ABC amb r.

PROBLEMA-BITLLAR3** **(Messegué, A.) Se'ns dona un bitllar rectangular $ABCD$ les longituds del qual són nombres racionals. En el mateix instant, llancem, sense efecte, dues boles iguals que considerarem puntuals, amb la mateixa velocitat constant v, una des del punt A i l'altra des del punt B (també suposarem que les dos boles mantenen aquesta velocitat indefinidament a menys que xoquin l'una amb l'altra). L'angle mínim que forma la recta que defineix la trajectòria de la primera bola amb la recta AB és u i de manera anàloga definim l'angle w, per la segona bola (vegeu figura 2.9). Provar que si $|u-w|=60$, llavors les boles mai xocaran entre elles.**

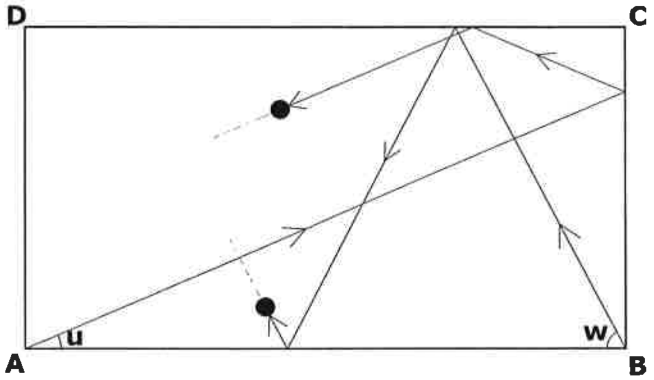


Figura 2.9: Jugant al bitllar (3)

Solució (Messegué A.):

Suposem que a, b són les longituds del rectangle, amb $AB = CD = a$ i $AD = BC = b$ i $a, b \in \mathbb{Q}$. Considerem el sistema de coordenades cartesià, situant l'eix x en la recta AB i l'eix y en la recta AD, de tal manera que $A = (0,0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, b)$ i $D = (b, 0)$. Ara, per tot $m, n \in \mathbb{Z}$, amb $(m, n) \notin \{(0,1) \times (0,1)\}$, definim els punts $P_{m,n} = (am, bn)$. Considerem també la recta r_1 que passa per l'origen amb pendent $\tan u$ i la recta r_2 que passa pel punt $(a, 0)$ de pendent $-\tan w$.

Suposem que llancem dues boles V_1 i V_2, en el mateix instant, amb la mateixa velocitat v, des de A, i amb el mateix angle u respecte AB, amb la propietat que V_1 rebota al xocar amb les parets del bitllar però V_2 no. Posem que P_t i Q_t són les coordenades de la bola V_1 i V_2, respectivament en l'instant t i que $P_{t_x}, P_{t_y}, P_{t_d}$ són els simètrics de P_t respecte la recta $y = \frac{b}{2}$, la recta $x = \frac{a}{2}$ i el punt $(a/2, b/2)$, respectivament. El que farem serà intentar establir una relació entre Q_t i la quaterna $(P_t, P_{t_x}, P_{t_y}, P_{t_d})$.

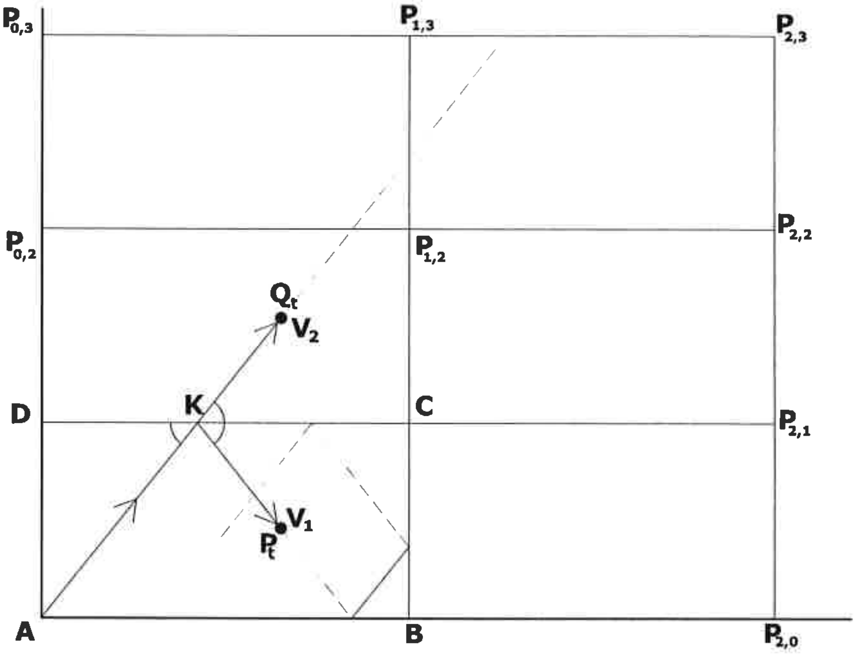


Figura 2.10: Jugant amb el bitllar (4)

Suposem que la recta r_1 intersecta el segment DC en el punt K (el cas en què r_1 intersecta el segment BC és exactament el mateix) i suposem que en un instant determinat t, Q_t es troba a l'interior del rectangle $CDP_{0,2}P_{1,2}$. Observem que $\angle CKQ_t = \angle DKA = \angle CKP_t$, per tant, Q_t és el simètric de P_t respecte KC (vegeu figura 2.10). Així doncs, $Q_t - (0,b) = P_{t_x}$. Més en general, si en un instant de temps t, Q_t es troba a l'interior del rectangle de vèrtexs $P_{m,n}$, $P_{m,n+1}$, $P_{m+1,n+1}$, i $P_{m,n+1}$ és fàcil provar per inducció (i aquesta demostració es deixa al lector) que:

$$\{Q_t - (am, bn)\} \cap \{P_t, P_{t_x}, P_{t_y}, P_{t_d}\} \neq \varnothing$$

Ara tenint en compte que $P_{t_x} = (2a, b) - P_t$, $P_{t_y} = (a, 2b) - P_t$, $P_{t_d} = (a, b) - P_t$, la última igualtat obtinguda esdevè equivalent a:

$$Q_t = \begin{cases} (am, bn) + P_t \\ (am, bn) + (2a, b) - P_t = (a(m+2), b(n+1)) - P_t \\ (am, bn) + (a, 2b) - P_t = (a(m+1), b(n+2)) - P_t \\ (am, bn) + (a, b) - P_t = (a(m+1), b(n+1)) - P_t \end{cases}$$

D'altra banda, és fàcil expressar Q_t en funció de v, t, u:

$$Q_t = (vt \cos u, vt \sin u)$$

D'aquesta manera, el valor de P_t serà doncs:

$$P_t = \begin{cases} vt(\cos u, \sin u) - (am, bn) \\ (a(m+2), b(n+1)) - vt(\cos u, \sin u) \\ (a(m+1), b(n+2)) - vt(\cos u, \sin u) \\ (a(m+1), b(n+1)) - vt(\cos u, \sin u) \end{cases}$$

Però, per simplificar les expressions, com que $a, b \in \mathbb{Q}$ podem escriure:

$$P_t = \begin{cases} vt(\cos u, \sin u) - (M, N) \ ; \ M, N \in \mathbb{Q} \\ (R, S) - vt(\cos u, \sin u) \ ; \ R, S \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

I, definint anàlogament V_1', V_2', P_t', Q_t', P_{t_x}', P_{t_y}', P_{t_d}' per a r_2, també és fàcil provar de la mateixa manera, que si per a un instant t, Q_t' es troba a l'interior del rectangle de vèrtexs $P_{m',n'}$, $P_{m'+1,n'}$, $P_{m'+1,n'+1}$ i $P_{m',n'+1}$, llavors:

$$\{Q_t' - (am', bn')\} \cap \left\{P_t', P_{t_x}', P_{t_y}', P_{t_d}'\right\} \neq \varnothing$$

I ara tenint en compte que:

$$Q_t' = vt(-\cos w, \sin w) + (a, 0)$$

Arribem a la conclusió que:

$$P_t' = \begin{cases} vt(-\cos w, \sin w) - (M', N') \ ; \ M', N' \in \mathbb{Q} \\ (R', S') - vt(-\cos w, \sin w) \ ; \ R', S' \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ara suposem que en un instant t les dos boles col·lisionen. En aquest moment, $P_t = P_t'$. Considerant les quatre possibles combinacions, s'observa que aquestes es redueixen a dos casos, expressats com:

$$vt(\cos u \pm \cos w, \sin u \mp \sin w) = (A, B) \ ; \ A, B \in \mathbb{Q}$$

I ara igualant component a component i dividint les dues equacions obtingudes:

$$\frac{\sin u \mp \sin w}{\cos u \pm \cos w} = \frac{B}{A} \in \mathbb{Q}$$

Aquesta última expressió doncs, determina una condició necessària per tal que les dues boles xoquin en algun moment, si aquesta condició no es dóna, llavors mai podran xocar.
Ara, però, tenint en compte identitats trigonomètriques conegudes es pot deduir que:

$$\frac{\sin u \mp \sin w}{\cos u \pm \cos w} = \left(\tan\left(\frac{u-w}{2}\right)\right)^{\mp 1}$$

Finalment, és clar que si $|u - v| = 60$, llavors $|\tan\left(\frac{u-w}{2}\right)|^{\mp 1} = (\sqrt{3})^{\pm 1} \notin \mathbb{Q}$. Concloem que quan $|u - w| = 60$, doncs, les boles mai xocaran.

Part II

El manual

Capítol 3

Teoria de nombres

3.1 Divisibilitat

3.1.1 Teoremes i conceptes

DEFINICIÓ. Divisiblitat.

- Un nombre enter a és divisible per un altre d, $d \mid a$, si i només si existeix un enter d' tal que $a = dd'$.
- Si un nombre enter a no és divisible per un altre d, i.e no existeix cap enter d' tal que $dd' = a$, existeixen únics enters q i r tals que $a = dq + r$, amb $0 < r < |d|$. Es diu que q i r són, respectivament, el quocient i el residu obtinguts en dividir a entre d.

DEFINICIÓ. Màxim comú divisor[1].

Siguin a i b dos enters no nuls. Si $d \mid a$ i $d \mid b$ i per tot d' tal que $d' \mid a$ i $d' \mid b$, $d \geq d'$, llavors d és el màxim comú divisor de a i b, $\gcd(a, b) = d$.

- **Definició. Nombre coprimers:**
Es diu que dos enters a, b són comprimers si el seu màxim comú divisor és 1, $\gcd(a, b) = 1$.
- **Teorema. Identitat de Bézout[2].**
Siguin a, b, enters no nuls i $d = \gcd(a, b)$, llavors existeixen enters x, y tals que $ax+by = d$.

DEFINICIÓ. Mínim comú múltiple[3].

Siguin a i b dos enters no nuls. Si $a \mid n$ i $b \mid n$ i per tot n' tal que $a \mid n'$ i $b \nmid n'$, $n \leq n'$, llavors n és el mínim comú múltiple de a i b, $lcm(a, b) = n$.

[1] L'ús de la notació gcd prové de l'anglès (greatest commom divisor). En català s'utilitza l'expressió mcd.

[2] La identitat de Bézout es deu al matemàtic Étienne Bézout, que la va provar per a polinomis. Tot i així, aquesta identitat en els enters es trobà en el treball del matemàtic francès Claude Gaspard Bachet de Méziriac, per això de vegades aquesta expressió rep el nom de identitat Bézout-Bachet.
La identitat de Bézout es pot generalizar per a combinacions linials de més de dos enters. En concret, per qualsevols enters $a_1, ..., a_n$ tals que $\gcd(a_1, ..., a_n) = g$, existeixen enters $x_1, ..., x_n$ tals que $a_1x_1+...+a_nx_n = g$.

[3] A l'igual que amb el màxim comú divisor, utilitzem l'expressió de l'anglès lcm (lowest common multiple), que en català es designa mcm.

PROPIETATS. Propietats divisibilitat.

Si a, b, c, d, x, y són enters i p un primer, llavors:

- $d \mid a \,,\, d \mid b \Rightarrow d \mid (ax+by)$
- $d \mid a \,,\, a \mid b \Rightarrow d \mid b$
- $d \mid a \,,\, a \neq 0 \Rightarrow |d| \leq |a|$
- $d \mid a \,,\, a \mid d \Rightarrow d = \pm a$
- $d \mid ab \,,\, \gcd(d,a) = 1 \Rightarrow d \mid b$ (Lema de Gauss)
- $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ o $p \mid b$ (Lema d'Euclides)

3.1.2 Exercicis

PROBLEMA (Cangur 2001, problema 28 - nivell 2) El producte de les edats dels meus fills és 1664. El més jove té la meitat de l'edat del més gran. Quants fills tinc?

Solució:

Siguin $x_1, x_2, ..., x_n$, les n edats dels fills que es mencionen en l'enunciat, amb $x_1x_2...x_n = 1664 = 2^7 \cdot 13$. Se'ns demana determinar el valor de n.

Primer de tot podem suposar sense pèrdua de generalitat que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Així doncs, com que x_1 és l'edat del germà més petit i x_n és l'edat del germà més gran, $x_1 = \frac{x_n}{2}$.

Com que l'exponent de 13 en 1664 és 1 tenim que necessàriament $x_1 = 2^a$ i $x_n = 2^{a+1}$, amb a un natural igual o major que 0.

Ara bé, tenim que $2^7 \cdot 13 = x_1x_2...x_n \geq 2^a \cdot 2^{a+1} \cdot 13 = 2^{2a+1} \cdot 13$, és a dir $7 \geq 2a+1 \Rightarrow 3 \geq a$. Suposem que $a \leq 2$, llavors però, $x_n = 2^{a+1} \leq 2^3 = 8 < 13$, és a dir que x_n no pot correspondre a l'edat del germà més gran, en conseqüència, $a = 3$, per tant $x_1 = 8$, $x_n = 16$ i com que només resta un factor primer per a completar el producte de 1664, la tercera edat és 13.

Finalment, el nombre de germans és tres, en concret les seves respectives edats són: 8, 13 i 16.

PROBLEMA (AIME 1992-4) Els nombres combinatoris de la forma $\binom{m}{n}$ es poden ordenar en files (en la n-èssima fila $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$) per tal de formar l'anomenat "triangle de Pascal". En quina fila hi ha tres nombres combinatorics consecutius tals que la raò entre ells tres és, respectivament $3:4:5$?

Solució:

Primer de tot recordem que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!}$. Per tant, si $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ i $\binom{n}{k+1}$, són els tres binomis consecutius esmentats en l'enunciat, aquests han de complir

$$\frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{\frac{n!}{(k)!(n-k)!}} = \frac{\frac{1}{n-k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{(k)!(n-k)!}} = \frac{\dfrac{1}{k+1}}{\dfrac{1}{n-k}} = \frac{5}{4}$$

Simplificant obtenim:

$$4k = 3(n-k+1) \Rightarrow k = \frac{3n+3}{7}$$

$$4(n-k) = 5(k+1) \Rightarrow k = \frac{4n-5}{9}$$

Igualant les dues equacions:

$$\frac{3n+3}{7} = \frac{4n-5}{9} \Rightarrow n = 62, k = 27$$

Finalment, els tres nombres buscats són: $\binom{62}{26}$, $\binom{62}{27}$ i $\binom{62}{28}$.

PROBLEMA* (Olimpíada de Centre Amèrica 2007-1) La Olimpíada d'Amèrica Central és una compteció anual. La noven edició es va celebrar l'any 2007. Trobar tots els enters positius n tals que n divideixi el nombre d'any en què es desenvolupa la n-èssima Olimpíada.

Solució:
La condició de l'enunciat és que $n \mid 2007 + n - 9 = 1998 + n$. Per tant $n \mid 1998$.

PROBLEMA* (OME 1996 - 1) Siguin a i b enters tals que:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostrar qe el màxim comú divisor de a i b no excedeix $\sqrt{a+b}$
Solució:
Segons l'enunciat, tenim que el nombre

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

és un enter.
Considerem $d = \gcd(a,b)$, tenim que $d^2 \mid ab$, per tant com que $ab \mid (a^2+b^2+a+b)$, llavors $d^2 \mid (a^2+b^2+a+b)$. Però com que $d^2 \mid (a^2+b^2)$, això implica que $d^2 \mid a+b$.
En conseqüència, $d^2 \leq a+b$, o el que és el mateix: $d \leq \sqrt{a+b}$.

PROBLEMA* (Titu Andreescu) Si a, b i c són enters, provar que

$$\frac{lcm(a,b,c)^2}{lcm(a,b)lcm(b,c)lcm(c,a)} = \frac{gcd(a,b,c)^2}{gcd(a,b)gcd(b,c)gcd(c,a)}$$

Solució:
En alguna ocasió en teoria de nombres, aquesta n'és una d'elles, per demostrar una fòrmula determinada en la qual apareixen nombres enters m, n, ... és recomanable no analitzar-la

com una totalitat sinó analitzar els factors primers diferents de n, m, ... i provar que la fòrmula en concret es compleix per cada factor diferent. Això és el que farem.
Posem $a = p^\alpha A$, $b = p^\beta B$ i $c = p^\gamma C$, on α, β i γ són els màxims exponents del factor primer p, que figuren en a, b i c respectivament. L'expressió de l'enunciat és simètrica en a, b i c, per tant podem suposar sense pèrdua de generalitat que $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 0$. D'aquesta manera, l'enunciat és equivalent a provar que:

$$\frac{lcm(p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)^2}{lcm(p^\alpha, p^\beta)lcm(p^\beta, p^\gamma)lcm(p^\gamma, p^\alpha)} = \frac{gcd(, p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)^2}{gcd(p^\alpha, p^\beta)gcd(p^\beta, p^\gamma)gcd(p^\gamma, p^\alpha)}$$

Tenint en compte que $gcd(u^v, u^w) = u^{\min(v,w)}$ i que $lcm(u^v, u^w) = u^{\max(v,w)}$ l'expressió anterior queda:

$$\frac{lcm(p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)^2}{lcm(p^\alpha, p^\beta)lcm(p^\beta, p^\gamma)lcm(p^\gamma, p^\alpha)} = \frac{(p^\alpha)^2}{p^\alpha \cdot p^\beta \cdot p^\alpha} = \frac{1}{p^\beta}$$

$$\frac{gcd(, p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)^2}{gcd(p^\alpha, p^\beta)gcd(p^\beta, p^\gamma)gcd(p^\gamma, p^\alpha)} = \frac{(p^\gamma)^2}{p^\beta \cdot p^\gamma \cdot p^\gamma} = \frac{1}{p^\beta}$$

PROBLEMA* (IMO 1959-1) Demostrar que la fracció $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible per tot natural n.

Solució:
Sigui d el màxim comú divisor de $21n + 4$, i $14n + 3$, $d = \gcd(21n + 4, 14n + 3)$, el nostre objectiu és provar que $d = 1$, per tot natural n.
Per una banda tenim, que si $d \mid 21n+4$ i $d \mid 14n+3$, llavors $d \mid (21n+4)x+(14n+3)y$, per a enters x i y. Fent ara $x = -2$, $y = 3$ obtenim: $d \mid (21n+4)(-2)+(14n+3)(3) = -8+9 = 1$.
Concloem doncs, que $d \mid 1$, per tant $d = 1$, és a dir, la fracció $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible per tot natural n.

PROBLEMA* Una successió d'enters es defineix de la següent manera:

$$T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$$

provar que per tot $m \neq n$, $\gcd(T_m, T_n) = 1$.
Solució:
Provarem per inducció sobre k que $T_{n+k} = T_n N + 1$, amb N i k enters positius. D'aquesta manera, haurem provat que $\gcd(T_{n+k}, T_n) = \gcd(T_n N+1, T_n) = \gcd(T_n \cdot N-(T_n N+1), T_n) = \gcd(1, T_n)$, és a dir que $\gcd(T_{n+k}, T_n) = 1$.
Procediment d'acord amb el mètode inductiu:
1-. Primer provem que per a $k = 1$ efectivament $T_{n+k} = T_n N + 1$:

$$T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1 = T_n(T_n - 1) + 1$$

2-. Suposem que per a un cert k:

$$T_{n+k} = T_nN + 1$$

3-. Llavors hem de verificar que també es compleix per a $k+1$:

$$T_{n+k+1} = (T_nN+1)^2 - (T_nN+1) + 1 = T_nN^2 + 2T_nN + 1 - T_nN - 1 + 1 = T_nN(T_nN+1) + 1$$

L'enunciat queda demostrat.

PROBLEMA Siguin a i b enters diferents positius tals que $ab(a+b)$ és divisible per a^2+ab+b^2. Provar que $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.**

Solució:
Primer de tot, notem que si $(a^2+ab+b^2) \mid ab(a+b)$ llavors $(a^2+ab+b^2) \mid (ab(a+b) - b(a^2+ab+b^2)) = b^3$ i per tant per simetria, $(a^2+ab+b^2) \mid a^3$.
Fent ara $d = \gcd(a,b)$ amb $a = da_1$, $b = db_1$ i $\gcd(a_1,b_1) = 1$, llavors tenim que:

$$d^2(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) \mid d^3a_1^3 \text{ i } d^2(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) \mid d^3b_1^3$$

o el que és el mateix:

$$(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) \mid da_1^3 \text{ i } (a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) \mid db_1^3$$

Ara bé, com que $\gcd(a_1^2+a_1b_1+b_1^2, a_1^3) = \gcd(a_1^2+a_1b_1+b_1^2, b_1^3) = 1$, llavors $(a_1^2+a_1b_1+b_1^2) \mid d$.
Equivalentment:

$$a_1^2 + a_1b_1 + b^2 \leq d$$

Finalment:

$$|a-b|^3 = d^3|a_1-b_1|^3 \geq (a_1^2+a_1b_1+b_1^2)d^2|a_1-b_1|^3 > d^2a_1b_1 = ab \Rightarrow |a-b| > \sqrt[3]{ab}$$

PROBLEMA (OME 1995-4) Si x, y són enters i p un enter, determinar les solucions de l'equació:**

$$p(x+y) = xy$$

Solució:
Primer de tot notem que p divideix a xy, per tant, pel lema de Gauss, tenim que p divideix a x o p divideix a y. Com que és una expressió simètrica en x i en y, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $x = pk$, per a un enter k. D'aquesta manera l'equació queda:

$$p(pk+y) = pky \Rightarrow pk + y = ky \Rightarrow y = \frac{pk}{k-1}$$

Si y és un enter llavors $k-1 \mid kp$. Però $k-1 \mid k$ si i només si $k=2$, llavors $(x,y) = (2p,2p)$.
D'altra banda, si $k-1 \mid p$, $k-1 = 1, p$. El primer cas és el d'abans mentre l'altra opció ens proporciona una segona solució $(x,y) = (p^2+p, p+1)$.
Finalment, per simetria, les solucions a l'equació de l'enunciat són: $(x,y) = (2p,2p), (p^2+p, p+1), (p+1, p^2+p)$.

PROBLEMA (OME 1997-4) Si p és un nombre primer, determinar els enters k tals que**

$$\sqrt{k^2 - kp}$$

és un enter.

Solució:

Primer de tot per tal que $\sqrt{k^2 - kp}$ sigui un enter necessitem que el valor de $k^2 - kp$ sigui positiu, per tant, $p \leq k$.

Suposem que $\sqrt{k^2 - kp} = m$ o, equivalentment, $k^2 - kp = m^2$, llavors s'haurà de complir:

$$(k - m)(k + m) = kp$$

Com que p és un primer, pel lema de Gauss, p divideix o bé a $(k - m)$ o bé a $(k + m)$, però si $p \mid (k - m)$, llavors $(k + m)\dfrac{(k - m)}{p} \geq (k + m) > k$, per tant $p \mid (k + m)$. És a dir, podem escriure:

$$k + m = pq \ ; \ k - m = \frac{k}{q}$$

per a un enter q. Sumant les dues equacions:

$$2k = \frac{pq^2 + k}{q} \Rightarrow k = \frac{pq^2}{2q - 1}$$

Com que k és un enter $(2q - 1) \mid (pq^2)$.

Suposem que $2q - 1$ divideix a q^2, llavors també dividiria a $q^2 - (2q - 1) = (q - 1)^2$, això és una contradicció a menys que $q = 1$, llavors $k = p$.

Suposem que $2q - 1$ divideix a p, l'única possibilitat és $2q - 1 = 1, p$. Mentre que la primera opció és la que ja ha sortit abans, si $2q - 1 = p$, llavors $q = \dfrac{p + 1}{2}$ és un enter per a un p imparell. D'aquesta manera obtenim la segona solució: $k = \dfrac{(p + 1)^2}{4}$, per a p un nombre imparell.

Finalment doncs, les úniques solucions són:

$$k = p \text{ per tot primer } p \ ; \ \frac{(p + 1)^2}{4} \text{ per tot primer imparell } p$$

PROBLEMA* (IBERO 2002-1) Es tenen dues successions de n nombres naturals consecutius cada una d'elles. Aquests nombres es col·loquen en una taula de dos files i n columnes de tal manera que els nombres de la primera successió es troben a la primera fila i els de la segona successió a la segona columna, amb un nombre a cada cel·la. Determinar si existeixen distribucions d'aquests nombres en la taula de tal manera que els nombres resultat de la suma dels dos nombres de cada columna formin una successió ordenada de nombres consecutius, en els casos:

- $n = 2003$

- $n = 2004$

Justificar la resposta tant si la resposta és afirmativa com negativa. Solució:
Comencem provant que una condició necessària perquè sigui possible és que n sigui senar. Siguin a_n i b_n les dues successions inicials i suposem que c_n és la successió que obtenim al sumar els nombres de les columnes. Llavors:

$$\sum_{i=1}^{n} a_n + b_n = \frac{(a_1 + a_1 + n - 1)n + (b_1 + b_1 + n - 1)n}{2} = \frac{n(2(a_1 + b_1 + n - 1)}{2} = n(a_1 + b_1 + n - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_n = \frac{(c_1 + c_1 + n - 1)n}{2} = nc_n + \frac{n-1}{2}$$

Igualant termes:

$$n(a_1 + b_1 + n - 1) = nc_n + \frac{n-1}{2}$$

Clarament, el membre de l'esquerra és un enter, per tant el de la dreta també ho ha de ser. Això implica que $2 \mid n - 1$ i per tant una de les condicions que ha de tindre n és que sigui imparell.
Ara provem que en efecte per a qualsevol $n = 2k + 1$ imparell existeixen disposicions que compleixen l'enunciat. Escrivim a_{2i-1} en la i-éssima cel·la de la primera fila i b_{k+1-i} a la i-éssima cel·la de la segona columna, amb els subindexs presos mòdul $2k + 1$. Verificarem que aquesta disposició verifica les condicions de l'enunciat.
D'acord amb el que hem dit, podem definir $c_i = a_{2i-1} + b_{k+1-i}$. En efecte es pot verificar $c_{i+1} - c_i = (a_{2i+1} - a_{2i-1}) + (b_{k-i} - b_{k+1-i}) = 2 - 1 = 1$ (es deixa al lector verificar el cas de la resta $c_{k+1} - c_k$) i $c_{k+1} - c_k$). D'on se'n segueix que c_i és una seqüència de nombres consecutius.
Finalment doncs, concloem que en el cas $n = 2003$ sí que és possible fer el que diu l'enunciat mentre que en el cas $n = 2004$ no.

PROBLEMA (IBERO 1991-5) Sigui $P(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2$. Direm que un enter a és un valor de P si existeixen enters b, c tals que $P(b, c) = a$. Se us demana:**

- **Trobar tots els valors de P compresos entre 1 i 100 inclusius.**
- **Demostrar que si r i s són valors de P, llavors també ho és rs.**

Solució:
Comencem notant que $P(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 = (x - y)^2 + (x - 2y)^2$. Ara ficant $x - y = a$ i $x - 2y = b$ és fàcil veure que podem assignar qualsevol valor a a i b, per tant, la resposta al primer apartat és: $\{n : 1 \leq n \leq 100; n = a^2 + b^2; a, b \in \mathbb{Z}\}$.
El segon apartat és casi immediat: suposem que $r = a^2 + b^2$ i $s = c^2 + d^2$, llavors:

$$rs = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

Queda doncs provat el que se'ns demana a l'enunciat.

PROBLEMA (IBERO 2006-4) Determinar les parelles d'enters positius (a,b) tals que $2a-1$ i $2b+1$ són coprimers, i a més, $a+b$ divideix a $4ab+1$.**

Solució:

Primer de tot notem que si $a+b \mid 4ab+1$, llavors $a+b \mid 4a(a+b)-(4ab+1)=(2a+1)(2a-1)$. O també, $a+b \mid 4b(a+b)-(4ab+1)=(2b+1)(2b-1)$. Fiquem ara que $a+b=d_1x_1=d_2x_2$, $2a+1=d_1y_1$, $2b-1=d_2y_2$, amb $\gcd(x_1,y_1)=\gcd(x_2,y_2)=1$. Com que $a+b=d_1x_1=d_2x_2$ és fàcil provar que existeixen enters u, v, z i w tals que $d_1=uv$, $x_1=zw$, $d_2=uz$ i $x_2=vw$. D'aquesta manera obtenim:

$$2a+1=d_1y_1=uvy_1 \ ; \ 2b-1=d_2y_2=uzy_2$$

Ara bé, com que a l'enunciat se'ns imposa que $2a+1$ i $2b-1$ són coprimers, llavors necessàriament $u=1$.
D'altra banda, podem posar $2a-1=k(a+b)=kvzw$, per algun enter k. Al mateix temps però $2a-1=2a+1-2$, per tant:

$$kvzw=vy_1-2 \Rightarrow v=\frac{2}{y_1-kzw}$$

Com que $y_1-kzw \mid 2$, $v=1,2$, però com que $v \mid 2a+1$, podem descartar el cas $v=2$. Així doncs, obtenim que $y_1=kzw+2=2a-1+2=2a+1$. Com que $2a+1=d_1y_1=d_1(2a+1)$, $d_1=1$. Pel lema de Gauss, doncs, $a+b \mid (2a+1)$. Equivalentment, $2a+1=q(a+b)$. L'única possibilitat és $q=1$ i en conseqüència $a=b-1$.
Finalment només cal comprovar que realment es compleix:

$$\frac{4ab+1}{a+b}=\frac{4b(b-1)+1}{2b-1}=\frac{4b^2-4b+1}{2b-1}=\frac{(2b-1)^2}{2b-1}=2b-1$$

L'única solució és doncs: $(a,b)=(n,n+1)$.

PROBLEMA (Moldàvia Test de Selecció 2008-1) Determinars les parelles $(x,y)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ tals que $x^3+y^3-3xy=p-1$ on p és un nombre primer.**

Solució:

Tenint en compte la famosa identitat $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$:

$$p=x^3+y^3+1-3xy=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$$

Per tant, com que p és primer, o bé $x+y+1=0$ o bé $x^2+y^2+1-xy-x-y=1$. En el primer cas, necessàriament $x=y=1$ i obtenim que $p=1$ però 1 no es considera un primer. Analitzem el segon cas:
Tenim que $x^2+y^2=xy+x+y$, però d'acord amb la desigualtat $AM-GM$:

$$xy+x+y=x^2+y^2\geq 2xy \Rightarrow xy\leq x+y \Rightarrow 1\leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Per tant, o bé tenim que $x=y=2$ i $p=5$ obtenint així una solució, o bé un dels dos, o bé x o y és 1. Suposem que $x=1$, llavors tenim que $y^2-2y=0$, d'on obtenim que o bé $y=2$ i $p=4$ no és un primer o bé $y=0$ i $p=2$ una altra solució vàlida.
Finalment, les solucions són $(x,y,p)=(2,2,5),(1,0,2),(0,1,2)$.

3.2 Funcions enteres

3.2.1 Teoremes i conceptes

DEFINICIÓ. Funció nombre de divisors, $d(n)$.

Indica el nombre de divisors d'un nombre n, inclosos n i la unitat. A més, és una funció multiplicativa, és a dir per a m, n coprimers, $d(mn) = d(m)d(n)$.
Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, llavors $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

DEFINICIÓ. Funció suma de divisors, $\sigma(n)$.

Indica el valor de la suma dels divisors d'un nombre n, inclosos n i la unitat. A més, és una funció multiplicativa.
Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, llavors $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} ... \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

DEFENICIÓ. Funció indicadora d'Euler, $\phi(n)$.

Indica el nombre de primers amb n, menors que n.
Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ llavors $\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) ... p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

Propietats. Funció d'Euler:
-És una funció multiplicativa.
-$\sum_{d|n} \phi(d) = n$
-$n - 1 \geq \phi(n) \geq \sqrt{n}$ per a $n > 6$

DEFINICIÓ. Funció major enter, $\lfloor x \rfloor$, i funció menor enter, $\lceil x \rceil$.

La funció major enter, $\lfloor x \rfloor$, indica el major enter igual o inferior que el nombre real x, és a dir, si $n \leq x < n + 1$, per algun enter n, llavors $\lfloor x \rfloor = n$.
La funció menor enter, $\lceil x \rceil$, indica el menor enter igual o major que el nombre real x, és a dir, si $n - 1 < x \leq n$, per algun enter n, llavors $\lceil x \rceil = n$.

PROPIETATS. Funció major i menor enter.
Per a α, β reals i a un enter:
- $\lceil \alpha \rceil = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (α no enter)
-$\lfloor \alpha + a \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor + a$
- Si $a \neq 0$, $\left\lfloor \dfrac{\alpha}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor \alpha \rfloor}{a} \right\rfloor$
- $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor \leq \lfloor \alpha + \beta \rfloor \leq \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + 1$
-Teorema. Si a i b són dos enters coprimers, llavors:

$$\sum_{k=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bk}{a} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

TEOREMA. Teorema de Polignac.

La màxima potència del primer p que divideix a $n!$, és:

$$v_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

3.2.2 Problemes i exercicis

EXERCICI Calcular $d(n)$, $\sigma(n)$ i $\phi(n)$ per a $n = 31$, 49 i 54.

Solució:
i. Per a $n = 31$:
$d(31) = 2$, $\sigma(31) = 32$ i $\phi(31) = 30$.

ii. Per a $n = 49$:
$d(49) = d(7^2) = 2 + 1 = 3$
$\sigma(49) = \sigma(7^2) = \dfrac{7^3 - 1}{7 - 1} = \dfrac{342}{6} = 57$
$\phi(49) = \phi(7^2) = 7(7 - 1) = 42$

iii. Per a $n = 54$:
$d(54) = d(2 \cdot 3^3) = (1 + 1)(3 + 1) = 8$
$\sigma(54) = \sigma(2 \cdot 3^3) = \dfrac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \dfrac{3^4 - 1}{3 - 1} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{80}{2} = 3 \cdot 40 = 120$
$\phi(54) = \phi(2 \cdot 3^3) = (2 - 1) \cdot 3^2(3 - 1) = 18$

PROBLEMA (AIME 2000-4) Quin és el mínim enter positiu que té 12 divisors positius parells i 6 divisors positius senars?

Solució:
Sigui N el nombre de l'enunciat. Clarament N serà de la forma $N = 2^\alpha A$, amb A un nombre senar. Si N té 6 divisors positius senars, això implica que $d(A) = 6 = 2 \cdot 3$. Les possibles descomposicions de A en els mínims factors primers imparells són $A = 3^5$ o $A = 3^2 \cdot 5$, agafem la segona ja que és menor que la primera.
Pel que fa als divisors parells, podem dir que aquests seràn de la forma $2^\beta d_i$, on $\beta \leq \alpha$ i $d_i \mid A$. Per tant n'hi ha exactament $6\alpha = 12$. Per tant $\alpha = 2$.
Finalment, el nombre cercat és: $N = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

PROBLEMA* Per tot enter positiu n, determinar el valor de la suma dels nombres primers amb n i menors que n.

Solució:
La clau per resoldre aquest problema radica en adonar-se que si per algun enter positiu a, $\gcd(n, a) = 1$ llavors $\gcd(n, n - a) = 1$. D'aquesta manera la suma demanada a l'enunciat és: $\dfrac{n\phi(n)}{2}$.

PROBLEMA (Teorema de Beatty) Provar que si α i β són dos nombres irracionals[4] tals que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, llavors els nombres $\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, ...;\ \lfloor\beta\rfloor, \lfloor 2\beta\rfloor, ...;$, formen el conjunt dels nombres naturals.**

Solució:
Primer de tot provarem que no existeixen enters positius m, n, tals que els nombres $\lfloor n\alpha\rfloor = \lfloor m\beta\rfloor$.
Suposem el contrari, és a dir per alguns enters positius m, n:

$$N = \lfloor n\alpha\rfloor = \lfloor m\beta\rfloor$$

Llavors podem escriure:

$$N < n\alpha < N+1\ ;\ N < m\beta < N+1$$

Amb el signe desigual estricte pel fet que α i β són irracionals. Dividint entre n i m respectivament les dos desigualtats obtenim:

$$\frac{N}{n} < \alpha < \frac{N+1}{n}\ ;\ \frac{N}{m} < \beta < \frac{N+1}{m}$$

Equivalentment:

$$\frac{n}{N} < \frac{1}{\alpha} < \frac{n}{N+1}\ ;\ \frac{m}{N} < \frac{1}{\beta} < \frac{m}{N+1}$$

Sumant les dues desigualtats i tenint en compte que la suma dels inversos de α i β és 1, obtenim:

$$\frac{n+m}{N} < 1 < \frac{n+m}{N+1}$$

Que és el mateix que:

$$N < n+m < N+1$$

Això però és una contradicció, perque $n+m$ és un enter, i per tant no pot està entre dos nombres naturals consecutius. Per tant, queda provat que els membres de les dues successions són diferents.
Ara provarem que en l'interval $[1, N)$ hi ha exactament $N-1$ membres de la successió. D'aquesta manera, com que tots els termes són diferents, necessàriament els seus valors són 1, 2, ..., $N-1$, que és el que volem provar.
Considerem els termes de la successió inferiors que N, en total n'hi ha $\left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{N}{\beta}\right\rfloor$. A més però:

$$\frac{N}{\alpha} - 1 + \frac{N}{\beta} - 1 < \left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{N}{\beta}\right\rfloor < \frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta}$$

[4]Es diu que un nombre és irracional si aquest no es representable en la forma p/q on p i q són dos enters coprimers.
Alguns exemples de nombres irracionals són el nombre e, el nombre π, etc.

Equivalentment:

$$N-2<\left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{N}{\beta}\right\rfloor<N$$

Com que el valor de l'enter $\left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{N}{\beta}\right\rfloor$ està comprès entre dos enters de diferència 2, necessàriament $\left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{N}{\beta}\right\rfloor=N-1$. Això completa la demostració.

EXERCICI. Determinar amb quants zeros acaba el nombre $(1000!)^2$**.**

Solució:

Primer notem que si un nombre N acaba amb k zeros, llavors $10^k \mid N$, per tant, haurem de determinar l'exponent de $10=2\cdot 5$ en el nombre $(1000!)^2$, mitjançant el teorema de Polignac. Ara bé, com que $v_2(p)>v_5(p)$, serà suficient determinar l'exponent de 5 en el mateix nombre.

$$v_5((1000!)^2)=2v_5(1000!)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{1000}{5^k}\right\rfloor=2\cdot(200+40+8+1)=498$$

Finalment, el nombre $(1000!)^2$ acaba amb 498 zeros.

PROBLEMA Si $n=n_1+n_2+...+n_k$, amb $n_i\in N$, provar que el nombre**

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

és un nombre natural.

Solució:

Utilitzarem la notació $v_p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$, que pel teorema de Polignac, ens indica el valor de l'exponent d'un nombre primer p en el factorial $n!$.

Si $(n_1!n_2!...n_k!)\mid n!$, això implica que l'exponent de tot nombre primer factor de $(n_1!n_2!...n_k!)$ és inferior a l'expondent del mateix nombre primer factor de $n!$. És a dir, l'enunciat és equivalent a provar que

$$v_p(n_1)+v_p(n_2)+...+v_p(n_k)\leq v_p(n)=v_p(n_1+n_2+...+n_k)$$

Tenint en compte que $v_p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$, la desigualtat a provar esdevé:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n_1}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n_2}{p^k}\right\rfloor+...+\left\lfloor\frac{n_k}{p^k}\right\rfloor\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n_1+n_2+...+n_k}{p^k}\right\rfloor\right)$$

Equivalentment:

$$\lfloor\alpha_1\rfloor+\lfloor\alpha_2\rfloor+...+\lfloor\alpha_k\rfloor\leq\lfloor\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k\rfloor$$

Per a un nombres reals α_i. Provarem la desigualtat per inducció sobre n:

- El cas $n=2$ és el cas exposat en la part teòrica.

- Suposem que per un cert n es compleix:

$$\lfloor \alpha_1 \rfloor + \lfloor \alpha_2 \rfloor + ... + \lfloor \alpha_n \rfloor \leq \lfloor \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \rfloor$$

- Llavors, per a $n+1$, també es complirà:

$$\lfloor \alpha_1 \rfloor + \lfloor \alpha_2 \rfloor + ... + \lfloor \alpha_n \rfloor + \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor \leq \lfloor \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \rfloor + \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor \leq \lfloor \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + \alpha_{n+1} \rfloor$$

PROBLEMA Provar que k^n no divideix a $n!$, amb $n, k \in N$ i $k > 1$.

Solució:

Provarem que per cada primer p que apareix en la factorització de k, p^n no divideix a $n!$. Per veure això considerem la fòrmula de Polignac, aquest estableix que el màxim exponent d'un primer p el qual divideix a $n!$, designat per $v_p(n)$ ve donat per l'expressió:

$$v_p(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Ara tenint en compte que $\lfloor x \rfloor \leq x$ per a $x \geq 0$ obtenim:

$$v_p(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{p^i} = n \frac{1}{p-1} < n$$

L'enunciat queda doncs demostrat, el màxim exponent de qualsevol primer que divideixi a $n!$, és menor que n.

PROBLEMA* (OBrM 1996-4) Sigui n un enter qualsevol. Definim

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor$$

determinar per quins n, $q(n+1) > q(n)$.

Solució:

Distingirem tres casos:

i. $n = p^2 + r$, amb $0 \leq r < p$. Llavors:

$$q(n+1) = \left\lfloor \frac{p^2+r+1}{\left\lfloor \sqrt{p^2+r+1} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2+r+1}{p} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{r+1}{p} \right\rfloor >$$

$$> q(n) = \left\lfloor \frac{p^2+r}{\left\lfloor \sqrt{p^2+r} \right\rfloor} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{r+1}{p} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor \Leftrightarrow r = p - 1$$

ii. $n = p^2 + p + r$, amb $0 \leq r < p$. Llavors:

$$q(n+1) = \left\lfloor \frac{p^2+p+r+1}{\left\lfloor \sqrt{p^2+p+r+1} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2+p+r+1}{p} \right\rfloor = p + 1 + \left\lfloor \frac{r+1}{p} \right\rfloor >$$

$$> q(n) = \left\lfloor \frac{p^2+p+r}{\left\lfloor\sqrt{p^2+p+r}\right\rfloor} \right\rfloor = p+1+\left\lfloor\frac{r+1}{p}\right\rfloor \Leftrightarrow \left\lfloor\frac{r+1}{p}\right\rfloor > \left\lfloor\frac{r}{p}\right\rfloor \Leftrightarrow r = p-1$$

iii. Finalment, veiem que al cas $n = p^2+2p$ no es compleix la desigualtat:

$$q(n+1) = \left\lfloor \frac{p^2+2p+1}{\left\lfloor\sqrt{p^2+2p+1}\right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor\frac{p^2+2p+1}{p+1}\right\rfloor = p+1 < q(n) = \left\lfloor \frac{p^2+2p}{\left\lfloor\sqrt{p^2+p}\right\rfloor} \right\rfloor = p+2$$

Així doncs, els casos en que $q(n+1) > q(n)$ són únicament quan $n = p^2+p-1, p^2+2p-1$.

PROBLEMA Demostrar que per a dos qualssevol naturals m i n el nombre**

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

és natural.
Solució:
Utilitzarem la notació $v_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$, que pel teorema de Polignac, ens indica el valor de l'exponent d'un nombre primer p en el factorial $n!$.
Si $(m!n!(m+n)!) \mid ((2m)!(2n)!)$, això implica que l'exponent de tot nombre primer factor de $m!n!(m+n)!$ és inferior a l'expondent del mateix nombre primer factor de $((2m)!(2n)!)$. És a dir, l'enunciat és equivalent a provar que

$$v_p(n) + v_p(m) + v_p(m+n) \leq v_p(2n) + v_p(2m)$$

Tenint en compte que $v_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$, la desigualtat a provar és:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m+n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2m}{p^k}\right\rfloor\right)$$

O, equivalentment:

$$\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m+n}{x}\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{2m}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2n}{x}\right\rfloor$$

per a un nombre x. Posant ara $m = q_1x + r_1$ i $n = q_2x + r_2$, amb $r_1, r_2 < x$:

$$\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m+n}{x}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{q_1x+r_1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{q_2x+r_2}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{q_1x+r_1+q_2x+r_2}{x}\right\rfloor =$$

$$q_1 + \left\lfloor\frac{r_1}{x}\right\rfloor + q_2 + \left\lfloor\frac{r_2}{x}\right\rfloor + q_1 + q_2 + \left\lfloor\frac{r_1+r_2}{x}\right\rfloor = 2q_1 + 2q_2 + \left\lfloor\frac{r_1+r_2}{x}\right\rfloor \quad ;$$

$$\left\lfloor\frac{2m}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2n}{x}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{2q_1x+2r_1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2q_2x+2r_2}{x}\right\rfloor = 2q_1 + 2q_2 + \left\lfloor\frac{2r_1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2r_2}{x}\right\rfloor$$

Així doncs hem de provar que

$$\left\lfloor \frac{r_1 + r_2}{x} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r_2}{x} \right\rfloor$$

Distingirem tres casos:

i. Si $x > r_1, r_2 \geq \frac{x}{2}$, llavors:

$$\left\lfloor \frac{r_1 + r_2}{x} \right\rfloor = 1 \leq \left\lfloor \frac{2r_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r_2}{x} \right\rfloor = 2$$

ii. Si $x > r_1 \leq \frac{x}{2} > r_2$, llavors:

$$\left\lfloor \frac{r_1 + r_2}{x} \right\rfloor = 0, 1 \leq \left\lfloor \frac{2r_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r_2}{x} \right\rfloor = 1$$

iii. Si $r_1, r_2 < \frac{x}{2}$ llavors:

$$\left\lfloor \frac{r_1 + r_2}{x} \right\rfloor = 0 \leq \left\lfloor \frac{2r_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r_2}{x} \right\rfloor = 0$$

PROBLEMA (IBERO 1996-1) Considerem $r \leq 1$ tal que per tot $m, n \in \mathbb{N}$ tals que $n \mid m$, $\lfloor nr \rfloor \mid \lfloor mr \rfloor$. Provar que r és un enter positiu.**

Solució:

D'acord amb la definició de funció part entera:

$$\lfloor nr \rfloor \leq nr < \lfloor nr \rfloor + 1$$

$$\lfloor mr \rfloor \leq mr < \lfloor mr \rfloor + 1$$

Per tot m, n tals que $n \mid m$ però, podem escriure $m = nk$, $k \in \mathbb{N}$. Substituint $m = nk$ en la segona expressió i multiplicant la primera per k obtenim:

$$k(\lfloor nr \rfloor) \leq knr < k(\lfloor nr \rfloor + 1)$$

$$\lfloor nkr \rfloor \leq knr < \lfloor nkr \rfloor + 1$$

PROBLEMA* (OMC 1995-6) Determinar el màxim comú divisor dels nombres:

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

Solució:

Utilitzant la identitat:

$$\binom{n+i+1}{k} = \binom{n+i}{k} + \binom{n+i}{k-1}$$

Notem que si

$$\gcd\left(\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},\dots,\binom{n+k}{k}\right)=d$$

Llavors:

$$d\mid\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k},\binom{n+2}{k}-\binom{n+1}{k},\dots,\binom{n+k}{k}-\binom{n+k-1}{k}\right)=$$
$$=\left(\binom{n}{k-1},\binom{n+1}{k-1},\dots,\binom{n+k-1}{k-1}\right)$$

Si procedim ara de la mateixa manera repetidament arribem al final que:

$$d\mid\left(\binom{n}{1},\binom{n+1}{1}\right)=(n+1,n)$$

Concloem doncs que el màxim comú divisor dels nombres de l'enunciat és 1.

3.3 Congruències

3.3.1 Teoremes i conceptes

DEFINICIÓ. Congruències.

Siguin $n \geq 1$, a i b enters. Es diu que $a \equiv b \bmod n$, a és congruent amb b mòdul n, si i només si en la divisió de a i b entre n s'obté el mateix residu, o el que és el mateix, $n \mid (a-b)$.

PROPIETATS. Propietats de les congruències.
Siguin n,$k \geq 1$, a, b, c, enters, llavors:
- $a \equiv b \bmod n$, $c \equiv d \bmod n \Rightarrow a+c \equiv b+d \bmod n$
- $a \equiv b \bmod n$, $c \equiv d \bmod n \Rightarrow ac \equiv bd \bmod n$
- $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a^k \equiv b^k \bmod n$
- $ab \equiv ac \bmod n \Leftrightarrow b \equiv c \bmod \dfrac{n}{\gcd(a,n)}$

TEOREMA. Teorema de Fermat[5]

Si p i a són respectivament un primer i un enter, amb $\gcd(a,p)=1$, llavors $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

TEOREMA. Teorema de Wilson

p és primer si i només si $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$

TEOREMA. Teorema d'Euler

Si $\gcd(a,n)=1$, llavors $a^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

TEOREMA. Teorema xinès del residu.

Siguin m_1, m_2, ... m_k enters coprimers dos a dos, majors que 1, i siguin a_1, a_2, ..., a_k enters arbitraris. Llavors el sistema de congruències

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \bmod m_1 \\ x \equiv a_2 \bmod m_2 \\ \dots \\ x \equiv a_k \bmod m_k \end{cases}$$

té una única solució mòdul $m_1 m_2 ... m_k$.

[5] En teoria de nombres hi ha dos teoremes de Fermat molt importants. De l'exposat en aquesta secció, per a a un enter i p un primer coprimer amb a, $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, n'existeix una variant que es denomina petit teorema de Fermat que estableix que pels mateixos a i p anteriors, $a^p \equiv a \bmod p$. El segon teorema es coneix com l'últim teorema de Fermat, que va ser provat l'any 1995 pel matemàtic Andrew Wiles, i estableix que la equació diofàntica $x^n + y^n = z^n$ no té solucions no trivials per als enters amb $n \geq 3$. Aquest últim és un dels problemes que més maldecaps ha portat als matemàtics més brillants que van intentar resoldre'l.

DEFINICIÓ. Ordre d'un enter.

Es diu que un enter a té ordre k mòdul n, $ord_a n = k$, si i només si $a^k \equiv 1 \bmod n$ i a més, per tot k' tal que $a^{k'} \equiv 1 \bmod n$, llavors $k' \geq k$. Clarament $k \mid \phi(n)$[6].

DEFINICIÓ. Invers d'un enter mòdul n.

Es diu que un enter b és l'invers de a mòdul n, $b \equiv \frac{1}{a} \bmod n$, si i només si $ab \equiv 1 \bmod n$.

3.3.2 Problemes i exercicis

EXERCICI Resoldre les següents congruències linials:

a. $2x \equiv 5 \bmod 11$
Resolució:
$2x \equiv 5 + 11 \equiv 16 \bmod 11 \Rightarrow x \equiv 8 \bmod 11 \Leftrightarrow x = 11k + 8$

b. $2007x \equiv 2008 \bmod 2009$
Resolució:
$2007x \equiv -2x \equiv 2008 \bmod 2009 \Rightarrow x \equiv -1004 \equiv 1005 \bmod 2009 \Leftrightarrow x = 2009k + 1005$

c. $35x \equiv 21 \bmod 61$
Resolució:
$5{\cdot}7x \equiv 7{\cdot}3 \bmod 61 \Rightarrow 5x \equiv 3 \equiv 3{+}2{\cdot}61 \equiv 125 \bmod 61 \Rightarrow x \equiv 25 \bmod 61 \Leftrightarrow x = 61k{+}25$

d. $24x \equiv 8 \bmod 64$
Resolució:
$8 \cdot 3x \equiv 8 \cdot 1 \bmod 8 \cdot 8 \Rightarrow 3x \equiv 1 \equiv 1 + 8 \equiv 9 \bmod 8 \Rightarrow x \equiv 3 \bmod 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \equiv 3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59 \bmod 64 \Leftrightarrow x = 64k + 3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59$

EXERCICI Avaluar les següents expressions:

a. $99^{100} \bmod 101$
Resolució:
$99^{100} \equiv 99^{101-1} \equiv 1 \bmod 101$

b. $73^{37} \bmod 17$
Resolució:
$73^{37} \equiv 5^{37} \equiv 5^{2\cdot 16+5} \equiv 5^5 \equiv 25^2 \cdot 5 \equiv 8^2 \cdot 5 \equiv 64 \cdot 5 \equiv 13 \cdot 5 \equiv 65 \equiv 14 \bmod 17$

c. $1234^{4321} \bmod 2592$
Resolució:
$1234^{4321} \equiv 1234^{4321 \bmod \phi(2592)} \equiv 1234^{4321 \bmod 432} \equiv 1234^1 \equiv 1234 \bmod 2592$

[6] Una aplicació d'aquest resultat es troba en el problema de l'examen de la UPC que es troba al final d'aquesta secció

EXERCICI Determinar el valor de "x"per tal que:

a.

$$\begin{cases} x \equiv 7 \bmod 13 \\ x \equiv 13 \bmod 19 \end{cases}$$

Solució:
Si $x \equiv 7 \bmod 13$, podem escriure: $x = 13k + 7$. Substituïnt a la següent equació: $x = 13k + 7 \equiv 13 \bmod 19$. Simplificant: $k \equiv 18 \bmod 19$, és a dir, $k = 19k' + 18$.
Finalment: $x = 13(19k' + 18) + 7 = 13 \cdot 19k' + 241 = 247k' + 241 \Rightarrow x \equiv 241 \bmod 247$.

b.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ 3x \equiv 4 \bmod 5 \\ 5x \equiv 6 \bmod 7 \\ 7x \equiv 8 \bmod 9 \end{cases}$$

Solució:
Procedirem de la mateixa manera que en l'exercici anterior:

$$x \equiv 2 \bmod 3 \Rightarrow x = 3k + 2$$

$3x = 3(3k+2) = 9k+6 \equiv 4 \bmod 5 \Rightarrow k \equiv 2 \bmod 5 \Rightarrow k = 5k'+2 \Rightarrow x = 3(5k'+2)+2 = 15k'+8$

$5x = 5(15k' + 8) = 75k' + 40 \equiv 6 \bmod 7 \Rightarrow k' \equiv 3 \bmod 7 \Rightarrow k' = 7k'' + 3 \Rightarrow x = 105k'' + 53$

$7x = 7(105k''+53) \equiv 735k''+371 \equiv 8 \bmod 9 \Rightarrow k'' \equiv 1, 4, 7 \bmod 9 \Rightarrow x = 945k'''+158, 473, 770$

Finalment $x \equiv 158, 473, 770 \bmod 945$.

PROBLEMA (Cangur 2001, problema 30 - nivell 2) Determinar l'última xifra del nombre $1999^{2000} + 2000^{2001}$.

Solució:
En aquesta classe de problemes, en que es demana buscar l'últim dígit d'un nombre és útil utilitzar congruències. Com que ens demanen l'última xifra necessitem avaluar l'expressió mòdul 10:

$$1999^{2000} \equiv (-1)^{2000} = 1 \bmod 10 \ ; \ 2000^{2001} \equiv 0 \bmod 10$$

Finalment, $1999^{2000} + 2000^{2001} \equiv 1 \bmod 10$, és a dir, l'última xifra del nombre $1999^{2000} + 2000^{2001}$ és 1.

PROBLEMA (Cangur 2001, problema 17 - nivell 4) Determinar l'última xifra del nombre $1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$.

Solució:

En aquesta classe de problemes, en que es demana buscar l'últim dígit d'un nombre és útil utilitzar congruències. Com que ens demanen l'última xifra necessitem avaluar l'expressió mòdul 10:

$$1998^{1999} \equiv (-2)^{1999} \equiv (-2)^{1999 \bmod \phi(10)} \equiv (-2)^{1999 \bmod 4} \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 2 \bmod 10$$

$$1999^{2000} \equiv (-1)^{2000} \equiv 1 \bmod 10, \; ; \; 2000^{2001} \equiv 0 \bmod 10$$

Finalment $1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001} \equiv 2 + 1 + 0 \equiv 3 \bmod 10$, per tant, l'última xifra del nombre $1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$ és el 3.

PROBLEMA (Cangur 2001, problema 30 - nivell 4) Si sumem les xifres del nombre 2001^{2001} i després sumem les xifres del resultat, i així successivament, arribarà un punt en què obtindrem un nombre d'una xifra. Determinar-ne el valor.

Solució:
Primer de tot provarem aquest útil lema:

Lema: **Per a qualsevol nombre natural n, si $s(n)$ representa la suma dels dígits de n, llavors $n \equiv s(n) \bmod 9$.**
Demostració:
Posant $n = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, llavors, $n = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 = a_n(9+1)^n + a_{n-1}(9+1)^{n-1} + \ldots + a_1(9+1) + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = s(n) \bmod 9$.

D'acord amb el lema provat, si n' és el nombre d'una xifra obtingut sumant les xifres de 2001^{2001} successivament, aquest complirà que:

$$n' \equiv 2001^{2001} \bmod 9$$

Com que $2001^{2001} \equiv 3^{2001} \equiv 3^{2001 \bmod \phi(9)} \equiv 3^{2001 \bmod 6} \equiv 3^3 \equiv 0 \bmod 9$, $n' = 0, 9$. Finalment, n' no pot valdre 0 per què és la suma de nombres positius, per tant, $n' = 9$.

PROBLEMA (Cangur 2004, problema 30 - nivell 2) Determinar l'últim dígit diferent de 0 del nombre 100!.

Solució:
Per tal d'eliminar els 0's al final que pugui tindre el nombre 100! l'hem de dividir per la màxima potència de 10. En concret la màxima potència de 10 que divideix 100! és 24, pel teorema de Polignac, però aquesta informació és innecessària en el problema que ens ocupa, senzillament, en el desenvolupament de 100! cal eliminar els factors 2 i 5 que contribueixen a un factor 10, o el que és el mateix, que contribueixen a un 0 al final. El nombre que queda és, mòdul 10:

$$\frac{100!}{10^{24}} \equiv (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{10} \equiv (12 \cdot 42 \cdot 72)^{10} \equiv (2^3)^{10} \equiv (-2)^{10} \equiv 1024 \equiv 4 \quad \bmod 10$$

Finalment, l'últim dígit diferent de 0 en el nombre 100! és el 4.

PROBLEMA* Provar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ és divisible per 7

Solució:
Per una banda tenim que:

$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} \equiv 3^{5555 \bmod 6} \equiv 3^5 \equiv 5 \bmod 7$$

D'altra banda:

$$5555^{2222} \equiv 4^{2222} \equiv 4^{2222 \bmod 6} \equiv 4^2 \equiv 2 \bmod 7$$

Finalment:

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 2 + 5 \equiv 7 \equiv 0 \bmod 7$$

PROBLEMA* (OSIM 1994-4) Sigui m i n nombres naturals tals que $mn + 1$ és divisible entre 24. Provar que $m + n$ és divisible per 24.

Solució 1:
Tenim que $mn \equiv -1 \bmod 24$. Per tant, m i n han de ser coprimers amb 24.
Si multipliquem la congruència per l'invers* de n, diguem-li n_1, tenim que $mnn_1 \equiv m \equiv -n_1 \bmod 24$ o el que és el mateix: $m + n_1 \equiv 0 \bmod 24$. Serà doncs suficient provar que $n = n_1$.
Fàcilment un pot comprovar que els inversos de 1, 5, 11, 13, 17, 19 i 23, són respectivament, 1, 5, 11, 13, 17, 19 i 23.
Solució 2:
Es pot descomposar la congruència en mòdul 8 i en mòdul 3, ja que $24 = 8 \cdot 3$.
És fàcil comprovar que les parelles (m, n) tals que $mn \equiv -1 \bmod 8$ són $(m, n) = (1, 7), (3, 5)$, ambdues compleixen que $m + n \equiv 0 \bmod 8$.
Les parelles (m, n) tals que $mn \equiv -1 \bmod 3$ són $(m, n) = (1, 2)$, que compleix que $m + n \equiv 0 \bmod 3$.
Finalment doncs $m + n \equiv 0 \bmod 24$

PROBLEMA* (AIME 1983-6) Quin és el residu que s'obté al dividir $6^{83} + 8^{83}$ entre 49?

Solució:
Per abordar aquest problema utilitzarem congruències. Quan volem calcular el residu potències els exponents de les quals són nombres elevats és útil utilitzar el teorema d'Euler.
Primer de tot tenim que $6^{\varphi(49)} = 6^{42} \equiv 1 \mod 49$, que implica que $(6^{42})^2 = 6^{83} \cdot 6 \equiv 1 \equiv -48 \mod 49$. Per tant, $6^{83} \equiv -8 \mod 49$. Anàlogament, tenim que $8^{\varphi(49)} = 8^{42} \equiv 1 \mod 49$, que implica que $(8^{42})^2 = 8^{83} \cdot 8 \equiv 1 \equiv -48 \mod 49$. Per tant, $8^{83} \equiv -6 \mod 49$.
Finalment, $6^{83} + 8^{83} \equiv (-8) + (-6) \equiv 35 \mod 49$. Així doncs, el residu que s'obté al dividir $6^{83} + 8^{83}$ entre 49 és 35.

PROBLEMA* (OME 1987-3) Demostrar els binomis $25x+31y$ i $3x+7y$ són múltiples de 41 per als mateixos x i y, enters.

Solució:
Es tracta que provem que si 41 divideix a $25x + 31y$, llavors també divideix a $3x + 7y$. I si 41 divideix a $3x + 7y$ llavors també divideix a $25x + 31y$. Per veure això, suposem que $41 \mid 25x + 31y$, en mòdul això és equivalent a:

$$25x \equiv -31y \bmod 41$$

Sumant i restant $41x$ o $41y$ obtenim:

$$25x \equiv -31y + 41y = 10y \bmod 41$$
$$5x \equiv 2y \equiv 2y - 2 \cdot 41y = -80y \bmod 41$$
$$x \equiv -16y \bmod 41$$

Com que $\gcd(41, 3) = 1$, podem multiplicar la congruència per 3:

$$3x \equiv -48y \equiv -7y \bmod 41 \Rightarrow 3x + 7y \equiv 0 \bmod 41$$

Per tant, $41 \mid 3x + 7y$, que és el que volíem provar. Per tal de provar el recíproc podem anar retrocedint en les operacions utilitzades anteriorment partint de l'última congruència. Per tant el problema queda provat.

PROBLEMA* (OBM 2003-1) Existeix algun conjunt de 4004 elements tal que la suma de qualssevol 2003 elements d'aquest no sigui divisible entre 2003?

Solució:
La resposta és sí. Considerem un conjunt d'enters format per 2002 enters congruents amb 0 mòdul 2003 i 2002 enters més congruents amb 1 mòdul 2003. Observem com efectivament aquest conjunt compleix els requisits que se'ns demana.

PROBLEMA* (Titu Andreescu) Existeixen 19 nombres enters positius diferents tal que sumin 1999 i la suma dels seus dígits sigui igual? Justificar la resposta.

Solució:
La resposta és no. Ho provarem indirectament arribant a una contradicció.
Primer de tot, tenim que si s és la suma digital dels 19 nombres de l'enunciat, llavors $s < 1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Utilitzant el lema provat al problema anterior es té:

$$19s \equiv 1999 \bmod 9 \Rightarrow s \equiv 1 \bmod 9$$

Per tant, com que $s < 28$, els únics valors possibles de s són $s = 10, 19$. És fàcil comprovar que la suma dels 19 mínims nombres diferents tals que la seva suma és 19 és major que 1999, per tant necessàriament $s = 10$.
Notem ara que si m i l són dos d'aquests nombres, al tenir la mateixa suma de dígits, no es pot complir la desigualtat:

$$10k \leq l, m < 10(k+1)$$

Per algun enter k. Això ens permet acotar el valor del màxim dels 19 nombres, el qual li direm n:

$$1999 > 10 + 20 + 30 + ... + 180 + n = 10 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} + n \Rightarrow n < 289$$

Així doncs, els 19 nombres pertanyen al conjunt:

$$X = \{19, 28, 37, 46, ..., 172, 181, 190, 208..., 271, 280\}$$

Notem però que la suma dels 19 primers nombres, que és el valor mínim de la suma, val $1990 = 1999 - 9$. Per tant, si el que volem és incrementar el valor de la suma, el que farem serà substituir un d'aquests sumands, diem-li a, per un nombre b pertanyent a X tal que $b > 190$. D'aquesta manera, el valor de la suma s'incrementarà en $b - a$ unitats. En el nostre cas el valor de l'increment ha de ser 9, però d'altra banda, $b - a \geq 208 - 190 = 18$, per tant, hem arribat a una contradicció.
Finalment, no existeixen els 19 nombres de l'enunciat.

PROBLEMA* (Olimpíada Costa Rica 2006-5) Siguin n i p un enter positiu i un nombre primer, respectivament. Provar que:

$$\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \bmod p$$

Solució:
Primer de tot, és clar que si $n < p$, llavors:

$$\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \equiv 0 \bmod p$$

Suposem doncs, que $n \geq p$, escrivim $n = pq + r$ amb $q = \lfloor n/p \rfloor$ i $0 \leq r < p$, llavors:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{(pq+r)(pq+r-1)...(pq+1)pq(pq-1)...(pq+r-p+1)}{p!} =$$

$$= q \cdot \frac{(pq+r)(pq+r-1)...(pq+1)(pq-1)...(pq+r-p+1)}{(p-1)!} \equiv q \cdot \frac{r(r-1)...1(p-1)...(r+1)}{(p-1)!} \equiv$$

$$\equiv q \cdot \frac{(p-1)!}{(p-1)!} \equiv q = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \bmod p$$

PROBLEMA* (OBrM 1993-1) Determinar un nombre n de sis xifres tal que és un quadrat perfecte i a més, el nombre format per les tres últimes xifres de n és major en una unitat que el nombre format per les tres primeres xifres.

Solució:
Sigui x el nombre format per les tres primeres xifres de n, segons l'enunciat podem plantejar la següent equació:

$$1000x + x + 1 = p^2 \Rightarrow 1001x = (p-1)(p+1)$$

On p és un enter positiu. Com que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, hem d'imposar que 7, 13 i 11 divideixin o bé $p+1$ o bé $p-1$.
D'acord amb això podem plantejar diversos sistemes, per exemple:

$$\begin{cases} p \equiv 1 \bmod 143 \\ p \equiv -1 \bmod 7 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim que $p \equiv 572 \bmod 1001$. Finalment podem comrpovar que $p = 572$ compleix l'equació plantejada, així deduïm que un dels nombres buscats és $573^2 = 328329$.

PROBLEMA* (IBERO 1992-4) Determinar un nombre de 5 dígits no nuls i diferents tal que sigui igual a la suma de tots els nombres de tres xifres que es poden formar amb els seus dígits.

Solució:
Sigui $N = 10000a+1000b+100c+10d+e$ un nombre que satisfaci les propietats de l'enunciat. Segons el que se'ns diu a l'enunciat és fàcil plantejar la següent equació:

$$N = 10000a+1000b+100c+10d+e = 111 \cdot 12 \cdot (a+b+c+d+e) = 9 \cdot 37 \cdot 4 \cdot (a+b+c+d+e)$$

Observem que el membre de la dreta és divisible per 9, per tant, N també ho és. Això implica que la suma de les xifres de N també és divisible per 9, cosa que vol dir que el membre de la dreta és divisible per 81, és a dir:

$$N = 9 \cdot 37 \cdot 4 \cdot (a+b+c+d+e) = 9 \cdot 37 \cdot 4 \cdot 9 \cdot k = 11988k$$

Amb k un enter. Ara, com que $a+b+c+d+e \leq 45 = 9 \cdot 5$, és fàcil veure que $1 \leq k \leq 5$, així que els possibles valors de N són:

$$59940, 47952, 35964, 23976, 11988$$

Finalment, com que la suma de les xifres de tots aquests nombres és 27, el valor de N només pot ser un: $N = 111 \cdot 12 \cdot 27 = 35964$. Concloem que l'únic nombre que satisfà les condicions de l'enunciat és $N = 35964$.

PROBLEMA* (OME 2004-4) Determinar si existeix alguna potència de 2 tal que al escriure-la en el sistema decimal tingui tots els seus dígits diferents de 0 i sigui possible reordenar-los per formar amb ells una altra potència de 2. Justificar la resposta.

Solució:
La resposta és no.
Suposem que existissin dos potències, 2^n i 2^m , amb $n < m$, que compleixin l'enunciat.
Per una banda, tant 2^n com 2^m tenen el mateix nombre de dígits, per tant, posant $m = n+k$, necessàriament $k \leq 3$.
D'altra banda, se'ns diu que una potència es pot obtindre de l'altra mitjançant un reordenament de les seves xifres, per tant $2^n \equiv 2^m \equiv 2^n \cdot 2^k \bmod 9$, és a dir, $2^k \equiv 1 \bmod 9$. Però $2^1 \equiv 2 \bmod 9$, $2^2 \equiv 4 \bmod 9$ i $2^3 \equiv 8 \bmod 9$. Hem arribat a una contradicció.
Finalment, no existeix cap potència que compleixi l'enunciat.

PROBLEMA* (BMO 1994-4) Quants quadrats perfectes hi ha mòdul 2^n?

Solució:
Provarem que la resposta és 2^{n-2} per a $n > 2$. El truc d'aquest problema és observar que per a $i \leq 2^{n-1}$:

$$(2^{n-1} \pm i)^2 \equiv (2^n \pm i)^2 \bmod 2^n$$

Ja que en virtut del binomi de Newton, $(2^{n-1} \pm i)^2 = 2^{2n-2} \pm 2^n i + i^2 \equiv i^2 \bmod 2^n$.
Ara, si i i j són enters diferents, llavors els nombres $(2^{n-1} \pm i)^2$ i $(2^n \pm j)^2$ són diferents si i només si $2^{n-1} + i \neq 2^n - j$ o $2^{n-1} - i = j$, en ambdós casos, $2^{n-1} = i + j$. Així doncs, hi ha exactament $2^{n-2} - 1$ parelles de nombres (i, j) tals que $i + j = 2^{n-1}$ a part de la parella $(2^{n-2}, 2^{n-2})$. Per tant en total hi ha exactament 2^{n-2} quadrats perfectes diferents mòdul 2^n.

PROBLEMA* (BMO 2006-2) Provar que existeixen infinites parelles de nombres enters positius (m, n) tals que el nombre

$$\frac{n+1}{m} + \frac{m+1}{n}$$

és un enter positiu.
Solució:
Posem que $f(m,n) = \frac{n+1}{m} + \frac{m+1}{n}$. Comencem observant que $f(1,2) = \frac{2+1}{1} + \frac{1+1}{2} = 4$ és un enter positiu. El que farem ara, és provar que a partir d'una parella (m_0, n_0) tal que $f(m_0, n_0)$ és un enter positiu, n'obtenim una altra (m', n'), amb $m' + n' > m_0 + n_0$ tal que $f(m', n')$ també és un enter positiu. D'aquesta manera, haurem provat l'enunciat per inducció.
Posem que $f(m_0, n_0) = \frac{m_0^2 + n_0^2 + m_0 + n_0}{m_0 n_0} = k$ amb k un enter positiu. Suposem que $m_0 < n_0$ i fixem k. Considerarem l'expressió $m_0^2 + m_0(1 - kn_0) + n_0^2 + n_0 = 0$ com una equació quadràtica en m_0. Escrivint les relacions de Cardano obtenim, si m' és la segona soluci'o de l'equació:

$$m_0 + m' = kn_0 - 1$$

$$m_0 m' = n_0(n_0 + 1)$$

Observem que com que $m_0 < n_0$, $m' > n_0$, perquè sinó, $n_0^2 + n_0 = m_0 m' < n_0^2$, que és una contradicció. Per tant, hem obtingut una nova parella (m', n_0) tal ue $f(m', n_0)$ és un enter positiu i a més $m' + n_0 > 2n_0 > n_0 + m$. Això completa la nostra demostració.

PROBLEMA (BALKAN 1999-2) Sigui $p > 2$ un primer tal que $3 \mid (p-2)$. Sigui**

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 | x, y \in \mathbb{Z}; 0 \leq x, y, \leq p - 1\}$$

provar que com a molt S té p elements divisibles per p.

Solució:

L'enunciat equival a provar que fixat un y, només pot existir com a molt un sol valor de x tal que $y^2 \equiv x^3 + 1 \mod p$. Per veure això abans provem el següent lema:

Lema: Siguin x i y enters positius, k un natural positiu coprimer amb $p-1$, on p és un primer. Si $x^k \equiv y^k \mod p$ llavors $x \equiv y \mod p$.

Demostració:

Si k i $p-1$ són coprimers, d'acord amb el teorema de Bezout, existiran enters a i b tals que $ka + b(p-1) = 1$. Per tant, elevant a a $x^k \equiv y^k \mod p$ i a b la congruència $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \mod p$ (això ho podem fer ni que o a o b sigui negatiu si considerem les congruències exteses als nombres racionals ja que p primer) i multiplicant-les obtenim:

$$x \equiv x^{ka+b(p-1)} \equiv y^{ka+b(p-1)} \equiv y \mod p$$

Retornant ara al problema anterior. Suposem que donat un y existeixen dos x_1 i x_2 tals que $x_1 \neq x_2$ i $y^2 \equiv x_1^3 + 1 \equiv x_2^3 + 1 \mod p$. Llavors tendríem que $x_1^3 \equiv x_2^3 \mod p$. Però d'acord amb el lema provat anteriorment. Com que $p - 1 = 3m + 1$ i 3 són coprimers, concloem que necessàriament, $x_1 = x_2$.

Finalment, com que la y només pot prendre exactament p valors, concloem que existeixen com a molt p elements en S divisibles per p.

PROBLEMA* (Polònia 2001) Siguin a i b enters positius tals que per tot enter no negatiu n, el nombre $2^n a + b$ és un quadrat perfecte. Provar que necessàriament $a = 0$.

Solució:

Sigui $x_n^2 = 2^n a + b$. Suposem el contrari, és a dir, suposem que $a \neq 0$, llavors $x_1 < x_2 < ... < x_n < ....$ Clarament, tindrem que $(2x_n)^2 = 2^{n+2}a + 4b = x_{n+2}^2 + 3b$. Per tant $(2x_n)^2 - x_{n+2}^2 = (2x_n - x_{n+2})(2x_n + x_{n+2}) = 3b$. Ara, si $b > 0$ l'equació anterior té un nombre finit de solucions, que contradiu que $x_1 < x_2 < ... < x_n < ....$ Si $b = 0$, llavors $x_{n+1}^2 / {x_n}^2 = 2$, que és impossible. Per tant, concloem que necessàriament, $a = 0$.

PROBLEMA (BMO 2006-6) Sigui n un enter positiu tal que el nombre $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ és un enter. Provar que llavors $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ és un quadrat perfecte.**

Solució:

Provarem un resultat més general:

Sigui n un enter positiu i $p \equiv -1 \mod 4$ un primer tals que el nombre $2 + 2\sqrt{4pn^2 + 1}$ és un enter, llavors $2 + 2\sqrt{4pn^2 + 1}$ és un quadrat.

Demostració:
Per tal que el nombre $2+2\sqrt{4pn^2+1}$ sigui un enter, necessitem que el nombre $4pn^2+1$ sigui un quadrat. Això implica que ha d'existir un nombre enter diguem-li m, tal que $4pn^2+1=m^2$, o el que és el mateix, $4pn^2=(m-1)(m+1)$. Notem que el màxim comú divisor de $m-1$ i $m+1$ és 2. A més, p divideix o bé a $m-1$ o bé a $m+1$, d'aquí doncs podem plantejar dos sistemes:

$$\begin{cases} m-1=2pu^2 \\ m+1=2v^2 \\ uv=n \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1=2u^2 \\ m+1=2pv^2 \\ uv=n \end{cases}$$

Ara bé, si es dona el segon sistema, tindríem que $4pn^2=(m-1)(m+1)=2(pv^2-1)2(pv^2)$, equivalentment, $n^2=(pv^2-1)v^2$, però llavors:

$$\left(\frac{n}{v}\right)^2=pv^2-1\equiv -1 \bmod p$$

Això implica que -1 és un residu quadràtic mòdul p [7], cosa que contradiu el criteri d'Euler, $\left(\frac{-1}{p}\right)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{4k-2}{2}}\equiv -1 \bmod p$. Per tant, hem d'agafar com a bo el primer sistema.
Tenim doncs que $m=pu^2+v^2$ que combinant-ho amb $2v^2=2pu^2+2$ obtenim, $m=2v^2-1$. Finalment és fàcil veure com efectivament $2+2\sqrt{4pn^2+2}$ és un quadrat perfecte:

$$2+2\sqrt{4pn^2+1}=2+2\sqrt{m^2}=2(1+2v^2-1)=4v^2=(2v)^2$$

10pt Retornant al problema original, tenint en compte el que acabem de provar només cal posar $p=7\equiv -1$ mod 4 per obtenir el resultat que ens demanen provar a l'enunciat.

PROBLEMA (Examen UPC 1r de carrera). Demostrar que un quadrat perfecte no pot ser mai un nombre de Carmichael[8].**

Solució:
Provarem un resultat més general. Provarem que si n té algun factor repetit, llavors n no pot ser un nombre de Carmiachel.
Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que n té almenys un factor repetit, i que, per tot enter a coprimer amb n:

$$a^{n-1}\equiv 1 \bmod n$$

Notem que per tot a coprimer amb n, $ord_n a \mid n-1$. Això ens suggereix considerar la funció Lambda Carmichael la qual ens dona de valor el mínim enter $\lambda(n)$, tal que per tot a coprimer amb n:

[7] Per aprendre coses sobre congruències quadràtiques es recomana veure [8]

[8] Es diu que n és un nombre de Carmichael, amb n un nombres compost, si i només si per tot a coprimer amb n, es compleix la congruència $a^{n-1}\equiv 1 \bmod n$

$$a^{\lambda(n)} \equiv 1 \bmod n$$

En concret, $\lambda(n)$ val:

$$\lambda(n) = \begin{cases} \phi(n) & \text{per a } n = 2, 4, p^k \text{ on } p \geq 3 \text{ és un primer} \\ 2^{k-2} & \text{per a } n = 2^k \text{ on } k \geq 3 \\ lcm(\lambda(p_1^{\alpha_1}), ..., \lambda(p_k^{\alpha_k})) & \text{per a } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \text{ on } p_i \text{ són primers diferents} \end{cases}$$

D'aquí se'n desprèn que per algun enter b, $ord_n b = \lambda(n)$. Per tant, necessàriament $\lambda(n) \mid n - 1$.
Escollim ara un factor de n, p_i, tal que $\alpha_i > 1$. Tenim que:

$$p_i^{\alpha_i - 1} \mid \lambda(n) = lcm(\lambda(p_1^{\alpha_1}), ..., \lambda(p_k^{\alpha_k})) = lcm((p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)), ..., p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1))$$

Utilitzant el supòsit fet anteriorment de que $\lambda(n) \mid n - 1$ arribem a que:

$$p_i^{\alpha_i - 1} \mid n - 1 = \left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right) p_i^{\alpha_i} - 1$$

Però això és una contradicció perquè $\alpha_i > 1$.
Concloem doncs que n no pot tindre cap factor repetit.

PROBLEMA (Mathematical Reflections) Siguin p i q primers imparells. Provar que per qualsevol enter imparell $d > 0$ existeix un enter r tal que el numerador del nombre racional:**

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{[n \equiv r \bmod q]}{n^d}$$

és divisible per p, on $[Q]$ és o 1 o 0, depenent de si la proposició Q és vertadera o falsa, respectivament.
Solució:
Sigui $N = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{[n \equiv r \bmod q]}{n^d}$
Primer de tot, notem que en el cas $p \leq q$, prenent un r tal que $p - 1 < r \leq q$, llavors $[i \equiv r \bmod q]$ és 0 per tot $1 \leq i \leq p - 1$ i per tant també N és 0, divisible per p.
Queda doncs provar el cas $q < p$. Provarem que prenent $r = \frac{p+q}{2}$, $N \equiv 0 \bmod p$:
Comencem observant que per a un enter a i un enter imparell $d > 0$, el numerador del nombre racional, $a^{-d} + (p - a)^{-d}$ és un nombre divisible per p. En efecte:

$$a^{-d} + (p - a)^{-d} = \frac{1}{a^d} + \frac{1}{(p - a)^d} = \frac{(p - a)^d + a^d}{a^d (p - a)^d} =$$

$$= \frac{(p^d - \binom{d}{1} p^{d-1} a + ... + \binom{d}{d-1} p a^{d-1} - a^d) + a^d}{a^d (p - a)^d} \equiv 0 \bmod p$$

D'altra banda, si per a un enter positiu $a \leq p-1$, es compleix que $a \equiv r = (p+q)/2 \bmod q$, llavors també es compleix que $p - a \equiv p - (p+q)/2 \equiv (p-q)/2 \equiv (p+q)/2 \equiv r \bmod q$. Finalment doncs:

$$N = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{[n \equiv r \bmod q]}{n^d} = \frac{1}{2} \sum_{a \leq p-1, a \equiv (p+q)/2 \bmod q} a^{-d} + (p-a)^{-d} \equiv 0 \bmod p$$

Capítol 4

Geometria

4.1 El triangle

4.1.1 Teoremes i conceptes

Definició i propietats:

Considerem tres punts A, B, C, no col·linials. La figura resultant de la unió d'aquests tres punts mitjançants segments, s'anomena triangle. Les propietats principals dels triangles són dos:

- La suma dels tres angles interiors és 180 graus[1]:

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BAC = \angle A + \angle B + \angle C = 180$$

- La suma de dos costats qualssevol és major que el tercer costat (desigualtat triangular):

$$AB + BC > CA \; ; \; BC + CA > AB \; ; \; AB + CA > BC$$

Classificació dels triangles.

Segons els costats:
- Triangle equilàter: tres costats iguals.
- Triangle isòsceles: dos costats iguals.
- Triangle escalè: cap costat igual.

Segons els angles:
- Triangle acutangle: tres angles aguts.
- Triangle rectangle: un angle recte.
- Triangle obtusangle: un angle obtús.

[1]Per evitar confusions, d'aquí en endavant es tractaran els angles en graus.

Els punts notables d'un triangle i les propietats vinculades a aquests:

Ortocentre:

Punt on tallen les altures d'un triangle (les perpendiculars baixades dels tres vèrtexs als costats del triangle) (veure figura 4.1). Per conveniència el nombrarem H.

Propietats:

- El triangle format pels peus de les altures s'anomena el triangle òrtic.

- L'ortocentre d'un triangle acutangle[2] és l'incentre del seu triangle òrtic.

- Si A_1, B_1, C_1 són els peus de les altures del triangle ABC baixades als costats BC, CA i AB, respectivament, i A_2, B_2, C_2 els punts de tall de les altures amb el circumcentre del triangle ABC, diferents de A, B i C, llavors $HA_1 = A_1A_2$, $HB_1 = B_1B_2$ i $HC_1 = C_1C_2$.

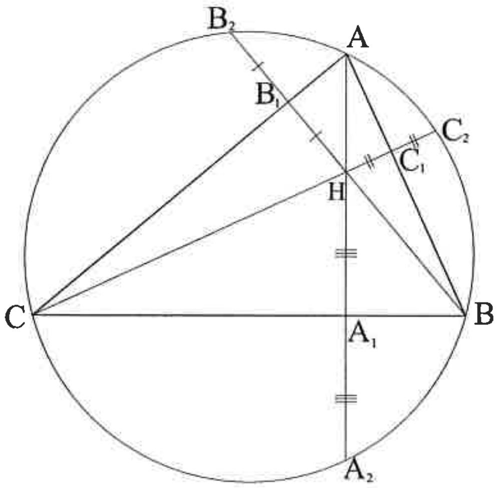


Figura 4.1: Ortocentre d'un triangle

Baricentre:

Punt d'intersecció de les mitjanes, els segments que uneixen cada un dels vèrtexs d'un triangle amb el punt mig del costat oposat (veure figura 4.2). Per conveniència el nombrarem G.

Propietats:

- Si A_1, B_1 i C_1 són els punts mitjos dels costats BC, AC i AB, respectivament, llavors $AG : GA_1 = BG : GB_1 = CG : GC_1 = 2 : 1$.

-Utilitzant la notació anterior, el segments A_1B_1, B_1C_1 i C_1A_1 són paral·lels als segments AB, BC i CA, respectivament, i en concret, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ i $C_1A_1 = \frac{1}{2}CA$.

-Les superfícies dels triangles $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1B_1C$ i $\triangle A_1B_1C_1$ són cada una d'elles igual a un quart de la superfície total del triangle ABC.

[2] Cal prestar especial antenció a que si el triangle és obtusangle, l'ortocentre es troba fora del triangle.

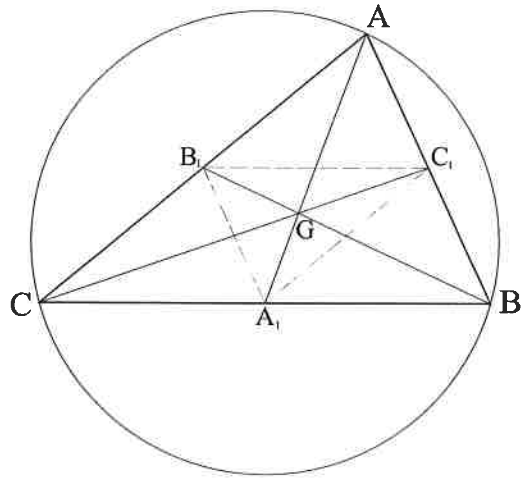


Figura 4.2: Baricentre d'un triangle

Circumcentre:

Punt d'interesecció de les mediatrius, recta perpendicular a un segment i que passa pel punt mig d'aquest, dels segments AB, BC i AC del triangle ABC. Per conveniència el denotarem amb O.

Propietats:

-És el centre de la circumferència circumscrita al triangle ABC.

-Equidista dels tres vèrtexs del triangle.

Incentre:

Punt d'intersecció de les bisectrius interiors, segments que divideixen en dos parts iguals un angle determinat, dels angles $\angle A$, $\angle B$ i $\angle C$ del triangle ABC. Per conveniència el denotarem amb I.

Propietats:

- És el centre de la circumferència inscrita.

- Equidista dels costat AB, BC i CA.

- Queda a l'interior del triangle ABC.

Excentres:

Considerem un triangle ABC, el punt d'intersecció de dos bisectrius exteriors amb la bisectriu interior de l'angle restant, es denomina excentre. Els designem I_a, I_b i I_c (veure figura 4.3).

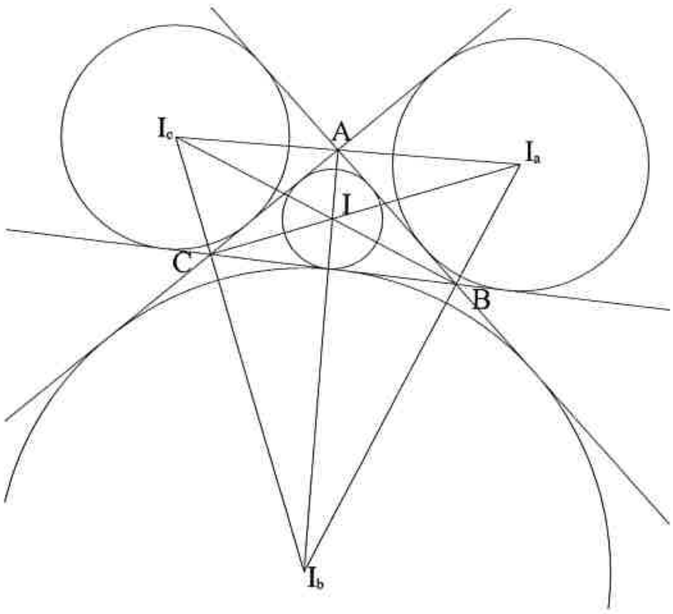


Figura 4.3: Circumferències exinscrites.

Punt de Gergonne

Si M, N i P són els punts de tangència de la circumferència inscrita d'un triangle amb els costats BC, CA i AB, respectivament, llavors, el punt de Gergonne es defineix com el punt l'únic punt d'intersecció de les rectes AM, BN i CP.

Propietats:

- El triangle MNP s'anomena triangle de Gergonne.
- L'incentre del triangle ABC és el circumcentre del triangle de Gergonne.

Rectes associades a un triangle i les seves propietats:

Recta d'Euler

El baricentre, G, el circumcentre O, l'ortocentre H i el centre de la circumferència dels nou punts, M, estan alineats, en concret, estan continguts en la recta d'Euler (veure figura 4.4).

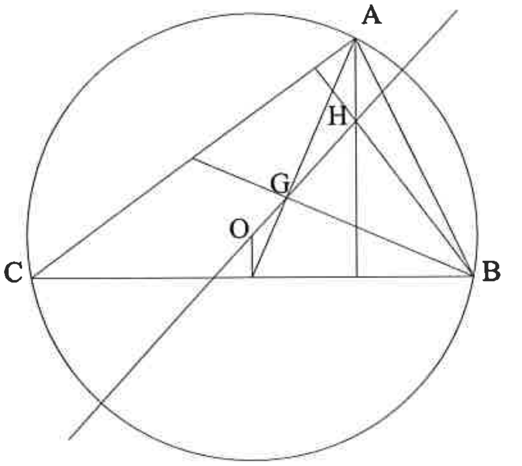
Propietats:

-$HG = 2GO$

- $OM = MH$

Recta de Simson. Teorema

Sigui un punt P qualsevol en el pla. A_1, B_1 i C_1 són els peus de les perpendiculars des de P baixades a BC, CA i AB, respectivament. Els punts A_1, B_1 i C_1 es troben en una línia, recta de Simson (veure figura 5.4), si i solament si P es troba en la circumferència circumscrita del triangle ABC.



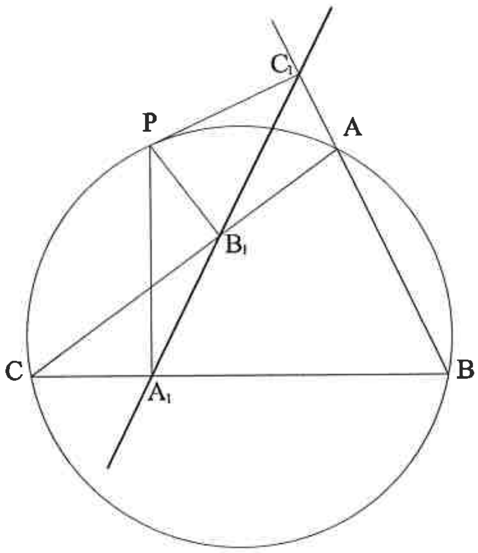


Figura 4.4: Recta d'Euler i recta de Simson.

Circumferències associades a un triangle i les seves propietats.

Circumferència circumscrita

Passa pels tres vèrtexs del triangle

Circumferència inscrita

Tangent interiorment als tres costats del triangle.

Circumferències excrites

Circumferències tangents a un costat i a la prolongació dels altres dos.

Circumferència dels nou punts

Considerem un triangle ABC, l'ortocentre del qual és H. Siguin A_1, B_1, C_1 els peus de les perpendiculars baixades des de A, B i C als seus costats oposats, A_2, B_2, C_2 els punts mitjos dels costats BC, CA, AB i A_3, B_3 i C_3 els punts mitjos dels segments AH, BH i CH, llavors, aquests es troben en una circumferència, la circmferència dels nou punts del triangle ABC.

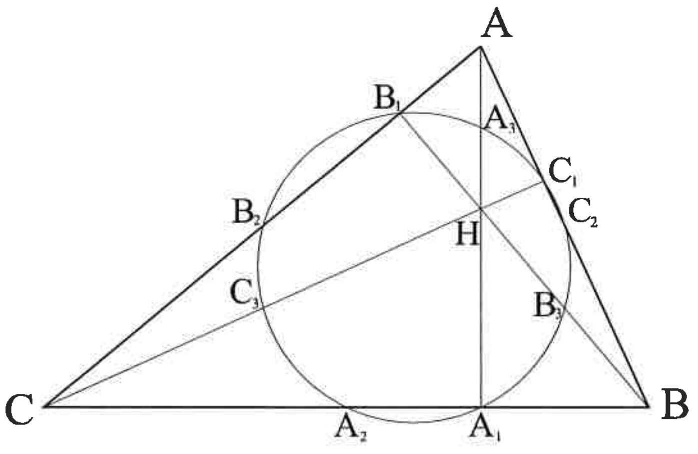


Figura 4.5: La circumferència dels nou punts.

Propietats

- Teorema de Feuerbach. La circumferència dels nou punts és tangent a la circumferència inscrita i a les tres excrites al triangle ABC.
- El radi de la circumferència dels nou punts és la meitat de la circumferència circumscrita.
- Qualsevol línia que uneix el centre de la circumferència dels nou punts amb un punt qualsevol de la circumferència circumscrita queda dividida en dos parts iguals per la circmferència dels nou punts.

Teoremes i fórmules importants en un triangle.

Teorema de la bisectriu:

Si L_a és el punt d'intersecció d'una bisectriu interior de l'angle $\angle A$ amb el costat oposat, llavors :

$$\frac{BL_a}{L_aC} = \frac{BA}{AC}$$

Teorema de Ceva:

Definim una ceviana, com el segment traçat des d'un vèrtex qualsevol d'un triangle al costat oposat.

El teorema de Ceva ens diu que la condició necessària i suficient per tal que tres cevianes AA_1, BB_1, CC_1 siguin concurrents en un punt, és:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Teorema de Menelao:

Considerem els punts A_1, B_1 i C_1 en els costats BC, CA i AB o en les seves prolongacions, respectivament. La condició necessària i suficient per tal que els punts A_1, B_1 i C_1 estiguin alineats és:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Teorema d'Stewart:
Considerem un punt P qualsevol al costat BC d'un triangle ABC. El teorema d'Stewart ens permet calcular la longitud la ceviana AP, per a qualsevol posició de P coneixent les longituds BP i CP llavors es pot trobar la longitud de la ceviana AP aplicant aquesta fórmula:

$$BC(AP^2 + BP \cdot PC) = AB^2 \cdot PC + AC^2 \cdot PB$$

Teorema d'Euler
Si en un triangle ABC, la circumferència circumscrita, de centre O, i la inscrita, de centre I, tenen R i r de radis respectius, llavors:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Superfície d'un triangle

Sigui un triangle ABC, a, b, c les longituds dels costats BC, CA, AB, s, el semiperímetre $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$, R, r i r_a, r_b i r_c el circumradi, l'inradi i els exradis, respectivament. Si $[ABC]$ és la superfície del triangle ABC:

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ , \text{(fórmula d'Heron)}$$

$$[ABC] = sr = \frac{abc}{4R}$$

$$[ABC] = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$$

Trigonometria al triangle.

En aquesta secció considerarem un triangle ABC les longituds dels costats del qual són a, b i c. L'inradi d'ABC serà r i el circumradi R.
Teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

Teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \angle A$$

Fórmules superfície:

$$[ABC] = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ca\sin\angle B = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$$
$$[ABC] = 2R^2\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C$$

4.1.2 Problemes

PROBLEMA* (OBrM 1999-2) Considerem una circumferència qualsevol de diàmetre AB i un punt fix pertanyent al segment AB. Escollim un punt qualsevol P de la circumferència diferent d'A i B. Provar que per a qualsevol posició de P el valor de

$$\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX}$$

no depèn de la posició de P.

Solució:

Considerem X' la projecció de X en AP. Tenim que $\angle AX'X = \angle APB = 90$, per tant $XX' \parallel PB$. Per tant:

$$\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX} = \frac{\frac{XX'}{X'P}}{\frac{XX'}{X'A}} = \frac{AX'}{X'P} = \frac{AX}{XB}$$

Veiem doncs, com no depèn de la posició de P, sinó de la posició de X.

PROBLEMA* (OBrM 1999-2) Un hexàgon $ABCDEF$ és circumscrit a una circumferència S. Els costats AB, CD i EF són tangents a S en els seus punts mitjos, respectivament, P, Q i R. Si X, Y i Z són els punts de contacte de BC, DE i FA amb S, provar que les rectes PX, QY i RZ són concurrents.

Solució:

Primer de tot, notem que al ser P el punt mig de AB i al ser les rectes ZA, AB i BX tangents a S, $ZA = AP = PB = BX$. Anàlogament es té que $XC = CQ = QD = DY$ i $YE = ER = RF = FZ$. Per tant també tindrem doncs:

$$ZP = PX \ ; \ XQ = QY \ ; \ YR = RZ$$

De l'última relació obtinguda doncs, $\angle XYP = \angle PYZ$, $\angle QZX = \angle YQZ$, $\angle YRX = \angle RXZ$. D'aquí se'n desprèn doncs que les rectes PY, RX i QZ són concorrents, en concret, concorren a l'incentre del triangle XYZ.

PROBLEMA* (OBrM 2002-2) Sigui S la circumferència circumscrita al triangle ABC amb $AC > AB$. La perpendicular des d'A a BC talla S per segon cop en P. X és un punt arbitrari pres en el segment AC. Provar que $BX = CX$ si i només si PQ és el diàmetre de S.

Solució:

Una condició la qual és necessària i suficient, sempre s'ha de provar en els dos sentits.

Per una banda, si $BX = CX$ llavors $\angle XCB = \angle XBC$, per tant,

$$\angle QAP = \angle QAC + \angle CAP = \angle QBC + (90 - \angle ACB) = \angle XCB + (90 - \angle XBX) = 90$$

Deduïm doncs que PQ és el diàmetre de S.

D'altra banda, si PQ és el diàmetre de S, llavors $QAP = 90$, per tant:

$$\angle XBC = \angle QBC = \angle QAC = 90 - \angle CAP = 90 - (90 - ACB)\angle ACB = \angle XCB$$

Deduïm doncs que $XB = XC$.

PROBLEMA* (Oleh Faynshteyn) Siguin l_a, l_b, l_c les longituds de les bisectrius interiors d'un triangle. Provar la següent identitat

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{l_c} + \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{l_a} + \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{l_b} = 0$$

on α, β, γ són els angles del triangle.

Solució:

Primer de tot notem que:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(\frac{180-(\beta+\gamma)-\beta}{2}\right) = \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

Sigui D el punt d'intersecció de la bisectriu interna baixada de l'angle $\angle C$ al costat AB, aplicant el teorema del cosinus al triangle CAD i simplificant obtenim:

$$b^2 = AD^2 + l_c^2 - 2AD \cdot l_c \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \frac{\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}{l_c} = \frac{AD^2 + l_c^2 - b^2}{2AD \cdot l_c^2} =$$

$$= \frac{\frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - ab\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} - b^2}{2\frac{bc}{a+b} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)} = \frac{(b-a)(a+b)}{2abc}$$

Finalment substituint a l'expressió els diferents valors obtinguts obtenim:

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{l_c} + \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{l_a} + \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{l_b} = \frac{(b-a)(a+b)}{2abc} + \frac{(c-b)(c+b)}{2abc} + \frac{(a-c)(a+c)}{2abc} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2 + c^2 - b^2 + a^2 - c^2}{2abc} = 0$$

PROBLEMA IBERO (2000-1) En un triangle ABC siguin D i E els peus de les perpendiculars a la bisectriu interior de l'angle $\angle A$ baixades des de B i C respectivament. Sigui K el punt d'intersecció de la bisectriu interior de l'angle $\angle A$ amb el costat BC. Si M és el peu de la perpendicular baixada de K a AC, provar que $\angle DMK = \angle KME$.**

Solució:

Observem que si $\angle DMK = \angle KME$, llavors MK és la bisectriu interior de l'angle $\angle MDE$. Per tant, tenint en compte el teorema de la bisectriu, serà suficient provar que $\frac{EK}{KD} = \frac{EM}{DM}$. Tenim que els triangle CEK i DBE són semblants, per tant:

$$\frac{EK}{KD} = \frac{CE}{EB} = \frac{AC}{AB}$$

D'altra banda, alicant el teorema del cosinus als triangles MAD i MAE i aplicant les substitucions trigonomètriques convenients:

$$\frac{EM^2}{MD^2} = \frac{MA^2 + AE^2 - 2 \cdot MA \cdot AE \cos\frac{\angle A}{2}}{MA^2 + AD^2 - 2 \cdot MA \cdot AD \cos\frac{\angle A}{2}} =$$

$$= \frac{(AK \cos\frac{\angle A}{2})^2 + (AC \cos\frac{\angle A}{2})^2 - 2 \cdot AK \cdot AC \cos^3\frac{A}{2}}{(AK \cos\frac{\angle A}{2})^2 + (AB \cdot \cos\frac{\angle A}{2})^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cdot \cos^3\frac{\angle A}{2}} =$$

$$= \frac{AK^2 + AC^2 - 2 \cdot AK \cdot AC \cos\frac{\angle A}{2}}{AK^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cdot \cos\frac{\angle A}{2}} = \frac{CK^2}{KB^2}$$

Així doncs, concloem que $\frac{EM}{MD} = \frac{EK}{KD} = \frac{CK}{KB} = \frac{CA}{AB}$.

PROBLEMA* (Olimpíada Cono Sur 2006-1) Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex. Designem amb E i F els punts mitjos de AD i BC. Les rectes BD i CE s'intersecten en O i les rectes BO i AO intersecten a BC en M i N, respectivament. Provar que $CN = NM = MD$ si i només si $ABCD$ és un paral·lelogram.

Solució:

Comencem provant que si $ABCD$ és un paral·lelogram llavors $CN = NM = MD$. Sigui P i Q els punts d'intersecció de FD i CE amb FE, respectivament. Tenim que $NM = PQ = AB/3$ i com que $PF = QE = CN = MD$, concloem que $CN = NM = MD$.

Queda provar que si $CN = NM = MD$ llavors $ABCD$ és un paral·lelogram. En efecte, per Tales, $FN \parallel BM$, per tant $\angle OFN = \angle FOB = \angle MOD$, per tant $FN \parallel OM$ i d'aquí que per Tales altra vegada, $FO/OD = NM/MD = 1$. Anàlogament obtenim que $CO/OE = 1$, cosa que implica que els triangles ODE i OFC són semblants, en concret, $\angle CFO = \angle ODE$, d'on se'n segueix que $FCDE$ és un paral·lelogram. Finalment, també per Tales, $ABCD$ és un paral·lelogram.

PROBLEMA (IMO 1985-1) Una circumferència amb centre al costat AB del quadrilàter concíclic $ABCD$ és tangent als costats altres costats del quadrilàter. Provar que $AD + BC = AB$.**

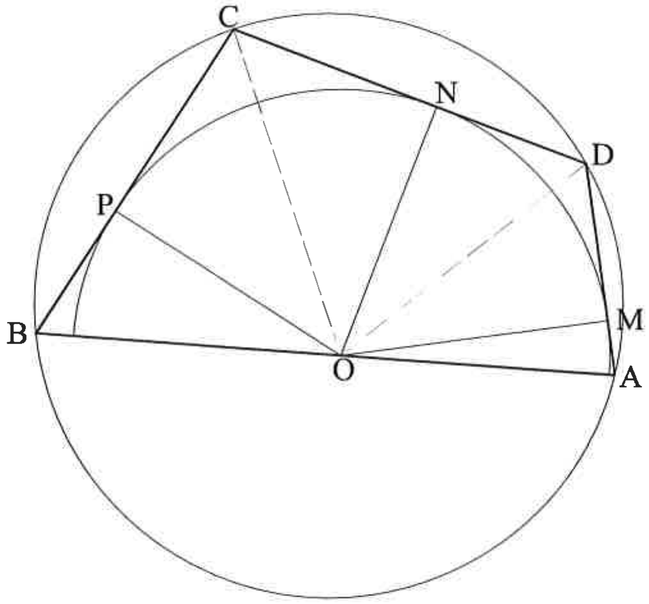


Figura 4.6: IMO 1985-1

Solució:
Siguin M, N i P els punts de tangència de la circumferència amb els costats AD, DC i BC, respectivament i O el centre de la circumferència tangents als costats. Notem que $\triangle MOD = \triangle DON$ i $\triangle NOC = \triangle COP$.
Posem $\angle MOA = \alpha$ i $\angle POB = \beta$, llavors com el quadrilàter $ABCD$ és concíclic:

$$\angle MOD = 90 - \angle MDO = 90 - \frac{\angle ADC}{2} = 90 - \frac{180 - \angle ABC}{2} = 90 - \frac{180 - (90 - \beta)}{2} = 45 - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle COP = 45 - \frac{\alpha}{2}$$

D'aquesta manera, la igualtat a provar de l'enunciat queda:

$$AD + BC = (AM + MD) + (CP + PB) =$$

$$= \left(MO \cdot \tan\alpha + MO \cdot \tan(45 - \frac{\beta}{2})\right) + \left(OP \cdot \tan\beta + PO \cdot (\tan 45 - \frac{\alpha}{2})\right) =$$

$$= R\left(\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}\right) = R\left(\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}\right)$$

$$AB = AO + OB = \frac{OB}{\cos\alpha} + \frac{AO}{\cos\beta} = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right)$$

On R és el radi de la circumferència tangent als tres costats. Finalment la igualtat es produeix pel fet que:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} ; \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}$$

PROBLEMA* (OBrM 2003-2) Considerem un rectangle $ABCD$. P és el punt mig del segment AB i Q és el peu de la perpendicular de C a PD. Provar que el triangle BQC és isòsceles.

Solució:
Al ser Q el peu de la perpendicular de C a PD, $\angle CQP = \angle PBC = 90$, per tant el quadrilàter $BPQC$ és concíclic. Aplicant-hi el teorema de Ptolomeu:

$$BQ \cdot PC = BP \cdot QC + BC \cdot PQ \ (*)$$

A més a més, però, els triangles PAD i QCD són semblants, d'aquí que

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{AD}{PD} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow CQ = \frac{BC \cdot CD}{PC}$$

$$\frac{QD}{CD} = \frac{AB}{2PD} = \frac{AB}{2PC} \Rightarrow QD = \frac{AB \cdot CD}{2PC}$$

Substituint els valors obtinguts en (*):

$$\begin{aligned} BQ \cdot PC &= \frac{BP \cdot BC \cdot CD}{PC} + (PD - \frac{AB \cdot CD}{2PC}) \cdot BC = \\ &= \frac{AB \cdot BC \cdot CD}{2PC} + \frac{2PC^2 \cdot BC - AB \cdot CD \cdot BC}{2PC} = \\ &= \frac{2PC^2 \cdot BC}{2PC} = PC \cdot BC \Rightarrow BQ = BC \end{aligned}$$

Com que $BQ = BC$, concloem que el triangle BQC és isòsceles.

PROBLEMA (IMO Shorlist 1998-5) Sigui ABC un triangle qualsevol. D és el punt simètric de A respecte BC, E el simètric de B respecte AC i F el simètric de C respecte AB. Si O i H són respectivament el circumcentre i l'ortocentre del triangle ABC, llavors D, E i F són col·lineals si i només si $OH = 2R$, on R és el circumradi.**

Solució:
El fet que $HD \perp BC$, $HE \perp AC$ i $HF \perp AB$ ens suggereix que la condició de col·linealiatat dels punts D, E i F vindrà requerida pel fet que H pertanyi a la circumferència circumscrita al triangle delimitat per les paral·leles a BC, CA i AB per D, E i F, respectivament. Per això

necessitem saber com és exactament aquest triangle, diem-li $A'B'C'$,amb $B'C'$ la paral·lela a BC per D, $C'A'$ la paral·lela a CA per E i $A'B'$ la paral·lela a AB per F.
Siguin M i N els punts d'intersecció de la recta BC amb $B'A'$ i $C'A'$, respectivament. Per Tales se'n segueix que $BM = CN = BC$, d'on deduim que $A'B'C'$ és el triangle homotècic de centre G i raó 4 del triangle ABC, on G és el baricentre del triangle ABC.
Ara és fàcil veure que per una banda, imposant que H pertanyi a la circumferència circumscrita del triangle $A'B'C'$, $O'H = 4R$, i d'altra banda, com que O' és l'homotècic de O, $OH' = O'G + GH = 4GO + GH = 3GO + OH = 2OH$.
Finalment, la condició necessària i suficient per tal que D, E i F siguin col·lineals és que $OH = 2R$.

PROBLEMA* (OBrM 1995-4) Considerem el triangle ABC, rectangle en C. La bisectriu interior de l'angle $\angle A$ intersecta el costat BC en el punt D i la bisectriu interior de l'angle $\angle B$ intersecta el costat CA en el punt E. M i N són els peus de les perpendiculars baixades de D i E a AB, respectivament. Determinar el valor de l'angle $\angle MCN$.

Solució:
Notem que els quadrilàters $DMAC$ i $ENBC$ són concíclics, al ser $\angle C = \angle AMD = \angle BNC = 90$. D'aquí que

$$\angle NCE = \angle NBE = \angle ABE = \frac{\angle B}{2} \; ; \angle DCM = \angle DAM = \angle DAB = \frac{\angle A}{2}$$

Finalment:

$$\angle MCN = \angle C - (\angle BCM + \angle NCA) = \angle C - (\frac{\angle A + \angle B}{2}) = 90 - \frac{90}{2} = 45$$

PROBLEMA (IBERO 1997-5) Considerem un triangle ABC. Siguin E i F els peus de les altures de B i C a CA i BA, respectivament, i H l'ortocentre del triangle. O és el punt d'intersecció de les rectes simètriques de BE i CF respecte les bisectriu interiors dels angles B i C, respectivament. Les rectes AE i AO intersecten una altra vegada la circumferència circumscrita al triangle ABC en els punts M i N, respectivament. Definim P com el punt d'intersecció de NH amb BC, R com el punt d'intersecció de les rectes OM i BC, i S el punt d'intersecció de OP amb HR. Provar que el quadrilàter $OAHS$ és una paral·lelogram.**

Solució:
La primera observació que cal fer és que O és el circumcentre del triangle ABC, pel fet que $\angle AOC = 180 - \angle OAC - \angle OCA = 180 - (90 - \angle B) - (90 - \angle B) = 2\angle B$ i anàlogament $\angle COB = 2\angle A$.
Ara és fàcil veure per Tales que P és un punt en BC tal que $2OP = AH$ i per tant P és el punt mig del segment BC, d'on se'n deriva que les rectes OS i AH són paral·leles.
Queda veure que $OA \parallel HS$, o equivalentment $OA \parallel HR$. En efecte, $\angle HBC = \angle CAM = \angle CBM$, per tant $EM = HE$ cosa que implica que $\angle RHM = \angle HMO = \angle AMO = \angle OAH$.
Queda doncs demostrat que $OA \parallel HR$, per tant $OSHA$ és un paral·lelogram.

PROBLEMA* (OBrM 2005-2) Sigui ABC un triangle tal que $\angle A = 120$. Tracem les bisectrius interiors dels angles A, B, C, aquestes intersecten els costats BC, CA i AB respectivament en D, E i F. Provar que la circumferència de diàmetre EF passa per D.

Solució:
Fiquem $AE = x$, $AF = y$ i $AD = l$. Si la circumferència de diàmetre EF passa per D, llavors $\angle EDF = 90$ i per tant per pitàgores:

$$ED^2 + DF^2 = EF^2$$

Escriurem la última igualtat en funció de x, y i l i en derivarem una expressió equivalent. Apliquem el teorema del cosinus als triangles AED, AFD i AEF tenint en compte que $\angle EAD = \angle FAD = 60$:

$$ED^2 = x^2 + l^2 - xl$$
$$DF^2 = y^2 + l^2 - ly$$
$$EF^2 = x^2 + y^2 + xy$$

Sumant aquestes dues identitats i substituint a l'equació inicial:

$$x^2 + y^2 + 2l^2 - l(x+y) = x^2 + y^2 + xy \Rightarrow 2l^2 = xy + yl + lx \ (*)$$

Busquem ara els valors de x i y. Aplicant el teorema de la bisectriu:

$$\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \frac{bc}{a+c}$$
$$\frac{y}{c-y} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{bc}{a+b}$$

Per determinar el valor de l utilitzarem el teorema d'Stewart juntament amb el teorema de la bisectriu per calcular les longituds CD, i DB. El que obtenim és:

$$l^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

Observem però que al ser $\angle A = 120$, llavors aplicant el teorema del cosinus al triangle ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

Substituint els valors de x, y, l en $(*)$ i substituint-hi el valor de a^2:

$$2l^2 = \frac{2bc(b^2 + c^2 + 2bc - b^2 - bc - c^2)}{(b+c)^2} = \frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}$$
$$lx + ly + xy = \frac{b^2c^2}{b+c} \cdot \frac{2a+b+c}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}$$

Hem de provar doncs:

$$\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2} = \frac{b^2c^2}{b+c} \cdot \frac{2a+b+c}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)} \Leftrightarrow 2(a+b)(a+c) = (2a+b+c)(b+c)+(b+c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc + c^2$$

Així doncs, hem derivat a una igualtat cosa que prova que la circumferència de diàmetre EF passa per D.

PROBLEMA OME 2008 2-5 En un triangle ABC siguin D, E i F els punts de tangència de la circumferència inscrita de ABC amb els costats BC, CA i AB, respectivament. Provar que

$$4S(EDF) \leq S(ABC)$$

Solució 1:
Sigui I l'incentre del triangle. Com que $\angle IDC = \angle IEC = 90$, el quadrilàter $CEID$ és cíclic, per tant $\angle EID = 180 - \angle ECD$. Això ens permet calcular la superfície del triangle EID:

$$S(EID) = \frac{1}{2}r^2 \sin \angle C$$

Anàlogament, podem fer el mateix amb els triangles EIF i FID obtenint així:

$$S(EDF) = \frac{1}{2}r^2(\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C)$$

Ara tenint en compte que $S(ABC) = \frac{1}{2}bc \sin \angle A = \frac{1}{2}ac \sin \angle B = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$:

$$S(EDF) = \frac{2S(ABC)r^2}{2}(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}) = \frac{S(ABC)r^2(a+b+c)}{abc}$$

Tenint en compte que $S(ABC) = (abc)/(4R) = sr$, on R és el circumradi, la desigualtat a provar esdevé la desigualtat d'Euler:

$$4S(EDF) = \frac{r^2(a+b+c)}{R} \leq S(ABC) = \frac{(a+b+c)r}{2} \Leftrightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2r \leq R$$

Finalment només queda dir que la igualtat s'assoleix únicament quan el triangle és equilàter.
Solució 2:
Provarem un resultat més general:
En un triangle ABC si D, E i F són punts als costats BC, CA i AB, respectivament tals que AD, BE i CF són concorrents, llavors $4S(DEF) \leq S(ABC)$.
Demostració:
Siguin M, N i P els punts mitjos dels segments BC, CA i AB, respectivament. Els punts D, E i F pertanyen a BC, CA i AB, respectivament, per tant, D pertany o bé a BM o MC, E pertany a BN o NA i F pertany a AP o BP. D'acord amb això existeixen dues disposicions diferents d'aquests punts en aquests segments, o bé pertanyen en segments que

no tenen cap punt en comú, o bé dos punts estan en dos segments que tenen un dels vèrtexs d'ABC en comú però cap punt amb comú amb el tercer segment. En el primer cas el podem ometre, ja que les rectes AD, BE i CF no concorren: suposant sense pèrdue de generalitat que $D \in [AM]$, $E \in [BN]$ i $F \in [CP]$:

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{DB \cdot EC \cdot FA} < 1$$

Contradiu el teorema de Ceva. Per tant, serà suficient considerar el segon cas. Suposem que $D \in [MB]$, $E \in [NA]$ i $F \in [AP]$. Sigui F' i E' punts en NA i AP, respectivament tals que $FF' \parallel BC$ i $EE' \parallel BC$. És clar que $\max\{S(EE'D), S(FF'D)\} \geq S(EFD)$, suposem per exemple que $S(EE'D) \geq S(EFD)$. Si ara H i h són respectivament la longitud de A a BC i la longitud de D a EE', és clar que $h \leq \frac{1}{2}H$. Juntament amb el fet que $EE' \leq NP = \frac{1}{2}BC$, se'n segueix que $S(EFD) \leq S(EE'D) \leq \frac{1}{4}S(ABC)$.
Finalment, si D, E i F són els punts de tangència de la circumferència inscrita del triangle ABC amb els costats BC, CA i AB, respectivament, és clar que AD, BE i CF són concurrent en el punt de Gergonne del triangle ABC cosa que implica, d'acord amb el resultat provat que $4S(DEF) \leq S(ABC)$.

PROBLEMA* (Iran 2000 segona ronda 4) Considerem un triangle ABC. La bisectriu interior de l'angle CAB intersecte a BC en D. Sigui w la circumferència tangent a BC en D i que passa per A. M és el segon punt d'intersecció de w amb AC i P el segon punt d'intersecció de BM amb w. Provar que AP és una mitjana del triangle ADB.

Solució:
Sigui E la intersecció de AP amb DB. El nostre objectiu és mostrar que $DE = EB$. Notem que $\angle PDE = \angle DMP = \angle MDB$, $\angle DPE = \angle DMA$ i $\angle EPB = \angle MPA = \angle MDA$. Tenint en compte això i aplicant el teorema del sinus als triangles DPE i EPB obtenim:

$$\frac{DE}{PE} = \frac{\sin \angle DMA}{\sin \angle DMB}; \frac{EB}{PE} = \frac{\sin \angle MDA}{\sin \angle MBD}$$

Dividint aquestes dues expressions obtenim:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{\sin \angle DMA \cdot \sin \angle MBD}{\sin \angle DMB \cdot \sin \angle MDA}$$

Apliquem ara el teorema del sinus als triangles AMD i MDB:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{\sin \angle MDA}{\sin \angle AMD}; \frac{MD}{DB} = \frac{\sin \angle MBD}{\sin \angle DMB}$$

Dividint aquestes dues expressions:

$$\frac{\sin \angle DMA \cdot \sin \angle MBD}{\sin \angle DMB \cdot \sin \angle MDA} = \frac{AM \cdot DB}{AD \cdot DB}$$

Però com que $\angle CAD = \angle DAB$ i $\angle DMA = \angle ADB$, els triangles AMD i ADB són semblants, cosa que implica que:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{\sin \angle DMA \cdot \sin \angle MBD}{\sin \angle DMB \cdot \sin \angle MDA} = \frac{AM \cdot DB}{AD \cdot DB} = 1$$

Finalment doncs, $DE = EB$ i l'enunciat queda provat.

PROBLEMA (OME 2007 2-6) D'un quadrilàter convex pla $ABCD$ sabem que els seus costats i les seves diagonals tenen longituds racionals. Si O és el punt d'intersecció de les diagonals, demostrar que OA té longitud racional.

Solució:

Començarem provant el següent lema:

Lema:
Si r_1, r_2, p_1, p_2, q_1 i q_2 són nombres racionals i α i β nombres reals tals que

$$\begin{cases} r_1 = p_1\alpha + q_1\beta \\ r_2 = p_2\alpha + q_2\beta \end{cases}$$

llavors α i β també són racionals [3].
Demostració:
Senzillament solucionant el sistema, obtenim que:

$$\alpha = \frac{r_1q_1 - r_2q_2}{p_1q_1 - p_2q_2} \ ; \beta = \frac{p_1r_2 - p_2r_1}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

D'on se'n segueix que $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Retornem al problema. Fiquem que a, b, c, d, m, n, p i q són respectivament les longituds de DA, AB, BC, CD, AO, CO, DO, BO, respectivament. Segons l'enunciat, a, b, c, d, $m+n$ i $p+q$ són racionals. El nostre objectiu és provar que també ho és m.
Apliquem el teorema de Stewart als triangles ACD i ABC en les cevianes DO i OB, respectivament. Obtenim:

$$(m+n)(p^2+mn) = a^2n + d^2m \ ; \ (m+n)(p^2+mn) = c^2m + b^2n$$

Restant aquestes dues equacions i fent algunes manipulacions obtenim:

$$(m+n)(p-q)(p+q) = n(a^2-b^2) + m(d^2-c^2)$$

$$(m+n)(p+q)^2 - 2q(m+n)(p+q) = (m+n)(a^2-b^2) - m(a^2-b^2) + m(d^2-c^2)$$

$$(m+n)(p+q)^2 + (b^2-a^2)(m+n) = 2q(m+n)(p+q) + m(b^2+d^2-a^2-c^2)$$

[3] De fet, es pot provar per inducció sobre n que si $x_{i,j}$ són nombres racionals i ω_i reals, amb $1 \le i, j \le n$ tals que

$$\begin{cases} x_{1,1}\omega_1 + x_{1,2}\omega_2 + \ldots + x_{1,n}\omega_n = 0 \\ \ldots \\ x_{n,1}\omega_1 + x_{n,2}\omega_2 + \ldots + x_{1,n}\omega_n = 0 \end{cases}$$

llavors ω_i també són racionals.

Raonant anàlogament per als triangles ABD i DCB per a les cevianes AO i CO, respectivament, obtenim:

$$(m+n)^2(p+q)+(b^2-c^2)(p+q)=2m(p+q)(m+n)+q(b^2+d^2-a^2-c^2)$$

Finalment, tenint en compte el lema provat i ficant $r_1=(m+n)(p+q)^2+(b^2-a^2)(m+n)$, $r_2=(m+n)^2(p+q)+(b^2-c^2)(p+q)$, $p_1=2(m+n)(p+q)$, $p_2=b^2+d^2-a^2-c^2$, $q_1=b^2+d^2-a^2-c^2$, $q_2=2(p+q)(m+n)$ i $\alpha=m$, $\beta=q$ s'obtè el resultat.

PROBLEMA (IMO 2004-1) En un triangle ABC, $AB\neq AC$, tracem la circumferència de diàmetre BC que talla a AB i AC en M i N, respectivament. O és el punt mig del segment BC. Si R és el punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle $\angle MON$ i la bisectriu de l'angle $\angle BAC$, provar que les circumferències circumscrites als triangles BMR i CNR tenen un punt en comú que es troba en el costat BC.**

Solució:
Primer de tot notem que el triangle MON és isòsceles, per tant, $OR\perp MN$. Sigui w la circumferència circumscrita al triangle AMN, al ser AR la bisectriu de l'angle $\angle NAM$, aquesta intersectarà a w en el punt mig de l'arc MN que no conté a A. Com que a més, la perpendicular a NM pel punt mig de NM és la recta OR i aquesta talla també al punt mig de l'arc MN, concloem que R pertany a w. D'aquí que $\angle RNM=\angle RAM$. A més, tenim que:

$$\angle RON=\frac{180-\angle CON-\angle MOB}{2}=\frac{180-(180-2\angle OCA)-(180-2\angle OBA)}{2}=$$

$$=\angle BCA+\angle ABC-90=180-\angle CAB-90=90-\angle CAB$$

D'aquí se'n desprèn que $\angle ONM=\angle CAB$ i per tant, concloem que R és l'incentre del triangle MNO.
Sigui K el punt d'intersecció de AR amb BC. Tenim que:

$$\angle RKA=\angle AKB=\angle BCA+\frac{\angle CAB}{2}=\angle CNO+\angle ONR$$

Així doncs els punts N, R, K i C són concíclics. Anàlogament, com que el triangle NMO és isòsceles es prova que R, K, B i M són concíclics. Finalment doncs les circumferències circumscrites als triangles CNR i RMB s'intersecten en R i K, aquest últim, pertanyent a BC.

PROBLEMA* Tenim un triangle equilàter ABC i un punt P interior a aquest. Si sabem que PA, PB i PC, valen respectivament 3, 4 i 5, determinar la longitud del costat del triangle ABC.

Solució:
Primer de tot provarem dos lemes que ens seran d'ajuda:

LEMA. Sigui ABC un triangle equilàter i P un punt interior a aquest, llavors existeix un triangle la longitud dels costats del qual són PA, PB i PC.

Demostració:

Considerem els punts A_1, B_1 i C_1 en els costats BC, AC i AB respectivament, tals que $PA_1 \parallel AC$, $PB_1 \parallel AB$, $PC_1 \parallel BC$. Clarament, els quadrilàters BC_1PA_1, A_1PB_1C i AB_1PC_1, són trapezis isòsceles i en conseqüència $A_1C_1 = PB$, $A_1B_1 = PC$ i $B_1C_1 = PA$. Com que $A_1B_1C_1$ és un triangle, el lema queda provat.

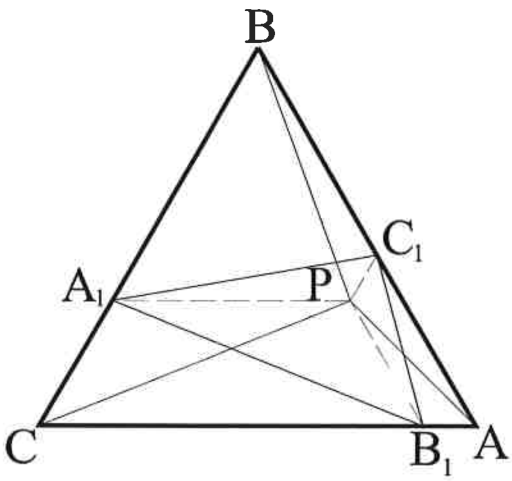


Figura 4.7: Experimentant amb triangles equilàters (2)

D'aquí però, aprofitant la mateixa construcció geomètrica, necessitem provar el segon lema.

LEMA. Si A, B, C, A_1, B_1, C_1 i P són els punts definits en el lema i demostració anteriors, llavors:

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 = AB = BC = CA$$

Demostració:

Considerem els punts D i E en els costats AB i BC tals que $PD \parallel A_1C$ i $C_1E \parallel AC$. Clarament els triangles PC_1D i BC_1E són equilàters i per tant: $C_1P = C_1D$ i $PA_1 = C_1E = BC_1$. A més el quadrilàter $PDAB_1$ és un paral·lelogram i en conseqüència $PB_1 = DA$. Finalment:

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 = BC_1 + DA + C_1D = AB = BC = CA$$

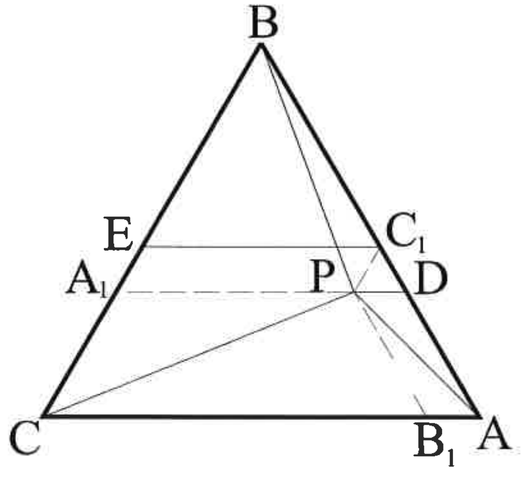


Figura 4.8: Experimentant amb triangles equilàters (2)

Així doncs, aplicant el lema 2 al nostre problema, necessitem determinar el valor de $PA_1 + PB_1 + PC_1$. Per comoditat, posarem $PA_1 = a$, $PB_1 = b$ i $PC_1 = c$.
Primer de tot notem que $\angle A_1PB_1 = \angle B_1PC_1 = \angle C_1PA_1 = 120$, per tant, alpicant el teorema del cosinus als triangle A_1PB_1, B_1PC_1 i C_1PA_1:

$$9 = b^2 + c^2 + bc \Rightarrow bc = 9 - b^2 - c^2$$
$$16 = c^2 + a^2 + ca \Rightarrow ca = 16 - c^2 - a^2$$
$$25 = a^2 + b^2 + ab \Rightarrow ab = 25 - a^2 - b^2$$

D'altra banda, al ser el triangle $A_1B_1C_1$ rectangle, la seva superfície val:

$$S(A_1B_1C_1) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

En funció d'a, b i c:

$$S(A_1B_1C_1) = S(A_1PB_1) + S(B_1PC_1) + S(C_1PA_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ca) = 6$$

D'aquí, per una banda obtenim que $ab + bc + ca = 8\sqrt{3}$, i d'altra banda, subsituint els valors de ab, bc i ca en l'equació anterior a aquesta última:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ca) = \frac{\sqrt{3}}{4}(50 - 2(a^2 + b^2 + c^2)) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 =$$
$$= \frac{25\sqrt{3} - 12}{\sqrt{3}} = 25 - 4\sqrt{3}$$

Finalment:

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca) = (25-4\sqrt{3}) + (16\sqrt{3}) = 25+12\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

Així doncs, la longitud del triangle equilàter del problema és:

$$AB = BC = AC = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

PROBLEMA* (Olimpíada de Centre Amèrica 2007-2) Considerem un triangle ABC. La bisectriu interior de l'angle A i les cevianes BD i CE (amb D i E en AC i AB, respectivament) concorren en el punt P. Provar que el quadrilàter $AEPD$ admet circumferència inscrita si i solament si $AC = AB$.

Solució:

Comencem provant que si $AEPD$ admet circumferència inscrita, llavors $AB = AC$. Tenim que la recta AP és la bisectriu de l'angle $\angle CAB$, per tant, passarà pel centre de la circumferència inscrita al quadrilàter $AEPD$ si és que aquest en té. Així, com que PA passa pel centre del quadrilàter haurem de tindre que $\angle DPA = \angle APE$, i en conseqüència, $\angle CPA = \angle APB$. D'aquí que els triangles APC i APB siguin iguals, i per tant $AB = AC$.

Finalment, en el cas que ABC sigui isòscel·les, és fàcil veure que pel teorema de Ceva, $AD = AE$ i $DP = PE$, per tant $DP + AE = PE + AD$, d'on se'n deriva la conclusió.

PROBLEMA (Mathematical Reflections) Sigui ABC un triangle no isòscel·les tal que $AB^2+AC^2 = 2BC^2$. M és el punt mig del costat BC i D el punt d'intersecció de MH amb la circumferència circumscrita del triangle ABC, on H és l'ortocentre del triangle. Provar que AD, BC i la línia d'Euler del triangle ABC concorren en un punt.**

Solució:

Sigui K el punt d'intersecció de OH amb BC (O és el circumcentre) i K' el punt d'intersecció de AD amb BC. El nostre objectiu és provar que $K = K'$.

Comencem observant que $\angle ADM = 90$. Posem que E és la intersecció de AO amb la circumferència circumscrita del triangle ABC, és conegut que $AH = 2OM$, juntament amb el fet que $OM \parallel AH$ i $AE = 2AO$, per Tales, obtenim que E, M i H són col·lineals, d'on se'n segueix que $\angle ADM = 90$.

De l'últim fet provat en deduim que, si P és el peu de l'altura de A a BC, els punts D, H, P i K' estan en una circumferència, així com els punts M, P, D i A. Per provar que $K = K'$ doncs, serà suficient en provar que $\angle HKP + \angle HK'A = 90 - \angle PAD$. Però, pel que hem vist $\angle HK'A = \angle HK'D = \angle HPD = \angle APD = \angle AMD$, i, $\angle PAD = \angle PMD$, per tant, la igualtat a provar, $\angle HKP + \angle HK'A = 90 - \angle PAD$, esdevé:

$$\angle HKP + \angle HK'A = \angle HKP + \angle AMD = 90 - \angle PAD = 90 - \angle PMD$$

$$\angle PMD + \angle AMD = \angle PMA = 90 - \angle HKP = \angle MOH$$

Ara ficant, $AM \cap OH = G$ i tenint en compte que $OM \parallel AH$ l'expressió anterior resulta equivalent a:

$$\angle PMA = \angle MOH = \angle OHA = \angle AGH - \angle MAP = \angle AGH - (90 - \angle AMP) \Leftrightarrow \angle AGH = 90$$

Així doncs, $K = K'$ si i només si $\angle AGH = 90$, si i només si $OG^2 + GM^2 = OM^2$. Per veure això utilitzarem els següents fets coneguts:

- $OG = \frac{1}{3}OH$; $GM = \frac{1}{3}AM$
- $OH^2 = 9R^2 - (BC^2 + CA^2 + AB^2)$, on R és el circumradi.
- $AM^2 = \frac{AC^2+AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

Finalment doncs, tal com hem dit, $K = K'$ si i només si, $OG^2 + GM^2 = OM^2$, equivalentment:

$$OG^2 + GM^2 = \frac{1}{9}(OH^2 + AM^2) = \frac{1}{9}(9R^2 - BC^2 - CA^2 - AB^2 + \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}) =$$

$$= R^2 - \frac{BC^2}{4} = OM^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2$$

PROBLEMA (Ivan Borsenco). Sigui ABC un triangle qualsevol i P, Q, R tres punts interiors a aquests tals que els quadrilàters $ABQP$, $ACRP$ i $BCRQ$ són concíclics. Provar que si el centre radical d'aquestes tres circumferències és l'incentre I del triangle ABC, llavors la línia d'Euler del triangle PQR coincideix amb la línia OI, on O és el circumcentre del triangle ABC.**

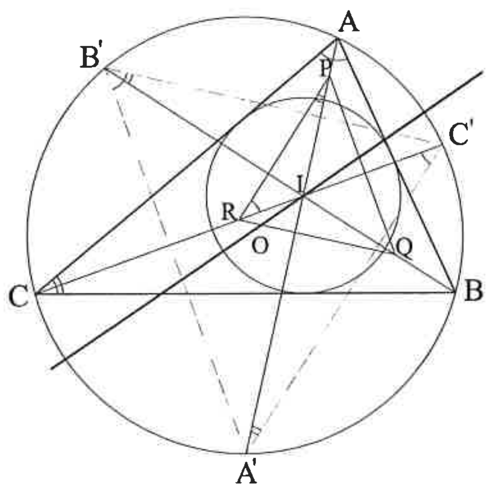


Figura 4.9: Problema Ivan Borsenco

Solució:

Primer de tot notem que si I és el centre radical de les tres circumferències, llavors clarament els punts P, Q i R estan als segments AI, BI i CI, respectivament. A més, al ser quadrilàters concíclics,

$$\frac{\angle A}{2} = \angle PRI = \angle PQI \ , \ \frac{\angle B}{2} = \angle QPI = \angle QRI \ , \ \frac{\angle C}{2} = \angle RPI = \angle RQI$$

Això ens suggereix considerar el triangle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts d'intersecció de les rectes AI, BI i CI amb la circumferència circumscrita del triangle ABC.

Tenim que $\angle CC'A' = \angle CAA' = \dfrac{\angle A}{2}$, per tant, $\angle PRI = \angle CC'A'$ i d'aquí que $A'C' \parallel AC$, anàlogament es té que $A'B' \parallel PQ$ i $B'B' \parallel RQ$. Per tant, concloem que els triangles PQR i $A'B'C'$ són homotècics, i en concret, el centre d'homotècia és l'incentre I.

Tenint en compte les propietats de la homotècia, els circumcentres de tots els possibles triangles PQR estan en una línia que passa per I, així com els seus ortocentres i qualsevol punt notable que no sigui el propi centre d'homotècia. Hem de provar doncs que l'ortocentre i el circumcentre dels triangles PQR es troben en la mateixa línia, que coincideix amb OI.

Tornem a analitzar el triangle $A'B'C'$, tenim que

$$\angle B'A'C' = \angle B'A'A + \angle AA'C' = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

A més:

$$\angle A'B'B = \angle A'AB = \frac{A}{2}$$

Per tant, $\angle C'A'B + \angle A'B'B = \dfrac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90$. D'aquí que $B'I \perp A'C'$ i anàlogament, $A'I \perp B'C'$ i $C'I \perp A'B'$, és a dir que I és l'ortocentre del triangle $A'B'C'$. Com que l'homotècia de centre I, envia el propi centre al mateix punt, concloem que la línia d'Euler del triangle PQR coincideix amb la línia OI.

PROBLEMA (OBM 1986-1) Una línia que passa per l'incentre d'un triangle intersecta la circumferència circumscrita i la inscrita en els punts A, B, C i D, (en aquest ordre). Provar que:**

$$AB \cdot CD \geq \frac{BC^2}{4}$$

Solució:

Siguin O i I el circumcentre i l'incentre respectivament del triangle de l'enunciat, R i r el circumradi i l'inradi. Aplicant la potència de I respecte la circumferència circumscrita:

$$AI \cdot ID = R^2 - OI^2 \Rightarrow (AB + r)(CD + r) = AB \cdot CD + r(AB + CD) + r^2 = R^2 - OI^2$$

Aplicant el teorema d'Euler i simplificant obtenim el valor de $AB \cdot CD$:

$$AB \cdot CD = 2Rr - r^2 - r(AB + CD)$$

Observem que $AB + CD \leq 2(R - r)$, aquest resultat ens permet arribar a la desigualtat de l'enunciat:

$$AB \cdot CD = 2Rr - r^2 - r(AB + CD) \geq 2Rr - r^2 - 2r(R - r) = r^2 = \frac{BC^2}{4}$$

Finalment, la igualtat es produeix quan la recta passa pel circumcentre del triangle o quan el triangle és equilater.

PROBLEMA (IMO Shorlist 2004-18) Considerem un triangle acutangle ABC amb $\angle B > \angle C$. O és el circumcentre de ABC i D el punt d'intersecció de AO amb BC. Siguin E i F respectivament els circumcentres dels triangle ADB i ACD. Els punts G i H es troben respectivament en les extensions de AC i AB a continuació de A de tal manera que $AG = AB$ i $AH = AC$. Provar que $EFHG$ és un rectangle si i només si $\angle ABC - \angle ACB = 60$.**

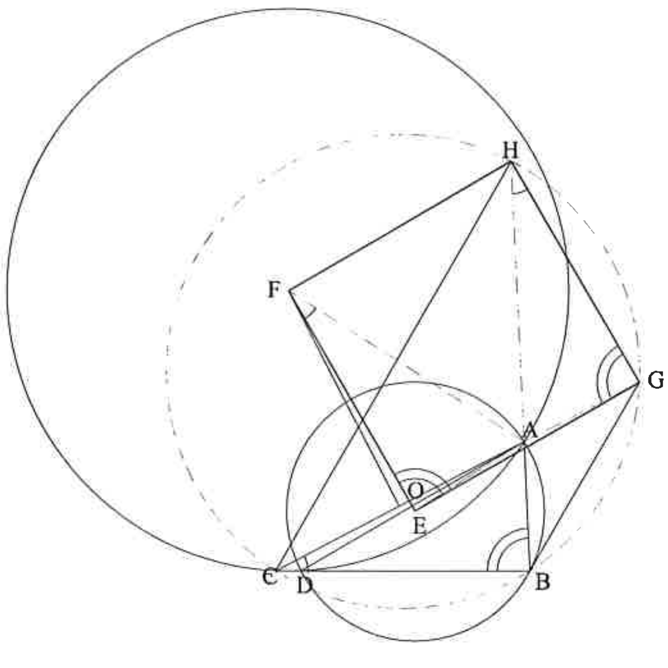


Figura 4.10: IMO Shorlist 2004-18

Solució:

Comencem notant que els triangles HAC i AGB són isòsceles. A més, $\angle HAC = \angle GAB$ i per tant $\triangle HAC$ i $\triangle AGB$ són semblants. Se'n segueix que els punts $BCHG$ es troben en una circumferència. Per tant $\angle AHG = \angle BHG = \angle BCG = \angle BCA$. Anàlogament $\angle AGH = \angle ABC$. Per tant, els triangles HAG i AEF són congruents

D'altra banda EF és perpendicular a AD per ser AD l'eix radical de les dos circumferències amb centres a E i F. Com que a més $FA = FD$ i $EA = ED$, EF és la bisectriu d'ambdós angles $\angle DFA$ i $\angle DEA$. D'acord amb les propietats de la circumferència, $\angle EFA = \angle DCA = \angle BCA$ i $\angle AEF = \angle ABD = \angle ABC$.
D'aquí se'n desprèn que $\triangle ABC$, $\triangle AGH$, $\triangle AEF$ són semblants. Però una de les condicions que ha de complir $HGFE$ perquè sigui rectangle és que $HG = FE$ i per tant els triangles AEF i AGH han de ser congruents. Concloem que els triangles AEF i ABC són iguals. Per tant $FA = FC = AC$ i $AB = EB = EA$, els triangles FCA i AEB són equilàters. Per tant $\angle CDA = 150$ i $\angle ADB = 30$, per ser $\triangle ADC$ obtusangle i $\triangle ADB$ acutangle. D'aquí que $EFHG$ és un rectangle si i només si $\angle CBA - \angle BCA = 60$.

PROBLEMA* (Olimpíada Honk Kong 1999-1) Sigui $PQRS$ un quadrilàter cíclic tal que $\angle PQR = 90$. Designem per H i K les perpendiculars de Q a PS i PR, respectivament. Provar que la línia HK divideix en dues parts iguals el segment SQ.

Solució:
Sigui F el peu de la perpendicular de Q a SR. És un fet conegut que H, K i F estan al·lineats. A més, $QH \parallel SR$ i $QF \parallel PS$, per tant $QHSF$ és un rectangle. Finalment, HF i SQ són les dues diagonals del rectangle $QHSF$ i per tant obviament HF divideix amb dos parts iguals QS.

PROBLEMA (Olimpíada Brasil 2006-5) Sigui $A_1A_2...A_{2006}$ un 2006-agon convex. Les 1003 diagonals conectant els vèrtexs oposats (vèrtexs oposats són A_i i A_{i+1003} on els subíndexs són presos mòdul 2006) i les línies que uneixen els punts mitjos de costats oposats (costats oposats són A_iA_{i+1} i $A_{i+1003}A_{i+1004}$ amb els subíndexs presos també mòdul 2006) concorren en un punt. Provar que els costats oposats són paral·lels i congruents (de mateixa longitud).**

Solució:
Comencem provant el següent lema:
Lema: Siguin A, B, C i D quatre punts al pla, M i N els punts mitjos de AB i CD respectivament, tals que AC, DB i MN són concorrents. Llavors $AB \parallel CD$.
Demostració:
Sigui O el punt on concorren AC, BD i MN. Al ser M i N els punts mitjos de AB i CD, respectivament, tenim que $S(AOM) = S(BOM)$ i $S(DON) = S(ONC)$. A més, $\angle AOM = \angle NOC$ i $\angle MOB = \angle DON$, per tant:

$$\frac{S(AOM)}{S(OMB)} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot OM \sin \angle AOM}{\frac{1}{2}MO \cdot OB \sin \angle MOB} = \frac{\frac{1}{2}NO \cdot OC \sin \angle NOC}{\frac{1}{2}DO \cdot ON \sin \angle DON} = \frac{S(CON)}{S(NOD)} = 1$$

D'on se'n deriva que:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{CO}{DO}$$

Ara, tenint també en compte que $\angle AOB = \angle DOC$, arrivem a que els triangles AOB i COD són semblants, d'on $\angle ABO = \angle ODC$ i per tant $AB \parallel CD$.

Retornant ara al nostre problema original, aplicant el lema provat anteriorment podem deduir que $A_iA_{i+1} \parallel A_{i+1003}A_{i+1004}$, queda provar que $A_iA_{i+1} = A_{i+1003}A_{i+1004}$.
Tenint en compte el lema anterior però, tenim que si O és el punt on concorren les rectes de l'enunciat, els triangles $A_iA_{i+1}O$ i $A_{i+1003}A_{i+1004}O$ són semblants. D'aquí se'n desprén que:

$$\frac{A_iO}{A_{i+1003}O} = \frac{A_{i+1}O}{A_{i+1004}O} = \dots = \frac{A_{i+1003}O}{A_iO}$$

Per tant, $A_iO = A_{i+1003}O$ i finalment, podem concloure que $A_iA_{i+1} = A_{i+1003}A_{i+1004}$, cosa que prova l'enunciat.

PROBLEMA (IMO 2007-2) Considerem 5 punts A, B, C, D i E en el pla tals que $ABCD$ és un paral·lelogram i $BCED$ és un quadrilàter concíclic. Tracem una recta l per A que intersecta interiorment el segment DC en F i a BC en G. Provar que si $EF = EG = EC$, llavors l és la bisectriu de l'angle $\angle DAB$.**

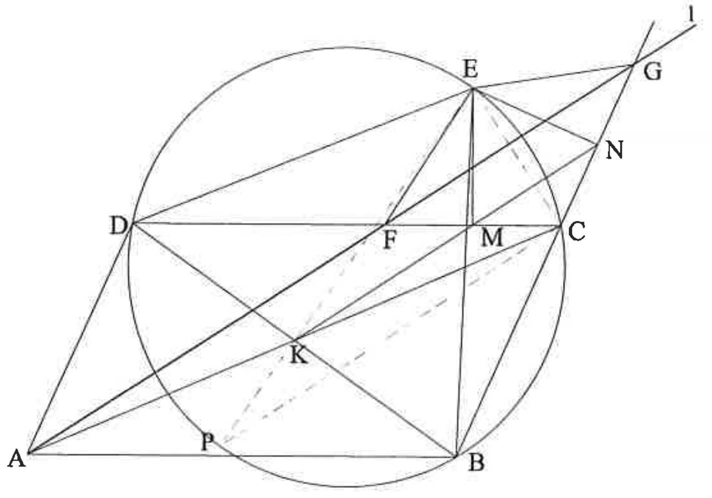


Figura 4.11: IMO 2007-2

Solució:
Siguin M i N els peus de les perpendiculars de E a DC i BC, respectivament. Com que $EF = FG = EC$ clarament, M i N han de ser també els punts mitjos dels segments FC i CG. D'aquí se'n desprèn que la recta de simson de E respecte el triangle DCB, que resulta ser MN, ha de ser paral·lela a l. Considerem K el punt mig de AC. Clarament $\frac{AC}{KC} = \frac{FC}{MC} = \frac{GC}{NC}$ per tant K és el peu de la perpendicular de E a DB i per tant M, N i K estan alineats paral·lelament a l.
Considerem P el punt d'intersecció de EK amb la circumferència circumscrita a $BCED$, clarament EP és un diàmetre d'aquesta i per tant $\angle ECP = 90$. A més CP és la bisectriu

de l'angle $\angle BCD$ cosa que implica que CE és la bisectriu de l'angle $\angle DCG$. Per tant $FC = GC$. Tenint en compte la semblança entre els triangles FCG i FDA arribem a que $DF = DA$. Resulta que aquesta és la condició necessària i suficient perquè l sigui la bisectriu de l'angle $\angle DAB$, ja que si Q és el punt d'intersecció de l amb DB, d'acord amb el teorema de la bisectriu i mitjançant la semblança entre AQB i QDF:

$$\frac{DQ}{QB} = \frac{DA}{AB} = \frac{DF}{AB} \Leftrightarrow DA = DF$$

La demostració és doncs completa.

PROBLEMA (IMO Shorlist 2003-15) Considerem un triangle ABC i P un punt qualsevol. Denotem per D, E i F els peus de les perpendiculars de P a BC, CA i AB, respectivament. Provar que si P és el circumcentre del triangle de vèrtexs els excentres, llavors:**

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = PC^2 + CF^2$$

Solució:
Aplicant pitàgores:

$$0 = (AP^2 + PD^2) - (BP^2 + PE^2) = (AP^2 + PB^2 - DB^2) - (PB^2 + AP^2 - EA^2) =$$

$$= EA^2 - DB^2 \Leftrightarrow DB = EA$$

Anàlogament es té que l'expressió de l'enunciat és condició necessària i suficient perque $CD = AF$ i $CE = FB$.
Siguin ara A', B' i C' els excentres del triangle ABC; M_a, M_b, M_c els punts mitjos dels costats BC, CA i AB; I_a, I_b i I_c les projeccions de l'incentre del triangle ABC, I, en BC, CA i AB, respectivament; i O el circumcentre de ABC. Clarament I és l'ortocentre de $A'B'C'$, O el centre de la circumferència dels nou punts del triangle $A'B'C'$ i per tant els punts O, P i I es troben alineats, en concret, $PO = OI$, per tant $DM_a = M_aI_a$. D'aquí, suposant sense pèrdua de generalitat que $\angle B \geq \angle C$:

$$DB = M_aB + M_aI_a = \frac{a}{2} + (\frac{a}{2} - (s - b)) = a + b - s$$

$$EA = M_bA + M_bI_b = \frac{b}{2} + (\frac{b}{2} - (s - a)) = a + b - s$$

Per tant, en efecte $DB = EA$. Anàlogament s'obtenen les altres igualtats, cosa que prova l'enunciat.

PROBLEMA (Moldàvia Test de Selecció 2008-3) Sigui ABC un triangle no equilàter qualsevol. Designem per (O, R) i per (I, r) la circumferència circumscrita i inscrita al triangle ABC, respectivament. Provar que els baricentres dels triangles $A_iB_iC_i$ inscrits en (O, R) i circumscrits en (I, r) són concíclics.**

Solució:

Siguin G_i i K_i el baricentre i el centre del a circumferència dels nou punts del triangle $A_iB_iC_i$, respectivament.

Primer de tot, com que (O, R) és fixa, el radi de la circumferència dels nou punts del triangle $A_iB_iC_i$ té un radi de longitud fixa, $R/2$. A més, pel teorema de Feuerbach, la circumferència dels nou punts del triangle $A_iB_iC_i$ és tangent interiorment amb la circumferència inscrita del mateix triangle que és (I, r). Se'n segueix que els centres de la circumferència dels nou punts dels triangles $A_iB_iC_i$ són concíclics, i per tant, com que l'homotècia de centre O i raò $1/2$ envia K_i a G_i (ja que $OG_i = G_iK_i$), deduim que si K_i són punts concíclics, també ho són G_i. Com que hem provat que K_i són punts concíclics, concloem que G_i també ho són.

PROBLEMA (IMO Shorlist 2001) Sigui A_1 el centre d'un quadrat $X_1Y_1Z_1T_1$ inscrit en un triangle acutangle ABC amb $X, Y \in BC$, $T \in AC$ i $Z \in AB$. Els punts B_1 i C_1 es defineixen d'igual manera. Provar que les línies AA_1 i BB_1, CC_1 són concorrents.**

Solució:

Construïm exteriorment el quadrat $BCC'B'$ i designem A_2 el centre d'aquest quadrat. Clarament els quadrats $X_1Y_1Z_1T_1$ són homotècics, d'aquí que A, A_1 i A_2 siguin colineals juntament amb $K_1 = AA_2 \cap BC$. Notem a més que $\angle CBA_2 = BCA_2 = 45$, $\angle BA_2C = 90$. Posant $\angle K_1A_2B = \theta$, i aplicant el teorema del sinus als triangles BK_1A_2 i CK_1A_2:

$$\frac{K_1B}{\sin\theta} = \frac{A_2K_1}{\sin 45}\,;\ \frac{K_1C}{\cos\theta} = \frac{A_2K_1}{\sin 45} \Rightarrow \frac{K_1B}{K_1C} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ (*)$$

Aplicant una altra vegada el teorema del sinus als triangles ABA_2 i CAA_2:

$$\frac{AB}{\sin\theta} = \frac{AA_2}{\sin(\angle B + 45)}\,;\ \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{AA_2}{\sin(\angle C + 45)} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AB\cdot\sin(\angle B + 45)}{AC\cdot\cos(\angle C + 45)}$$

Així, substituint (*) obtenim:

$$\frac{K_1B}{K_1C} = \frac{AB\cdot\sin(\angle B + 45)}{AC\cdot\cos(\angle C + 45)}$$

Anàlogament, podem fer el mateix amb els altres dos quadrats. Multiplicant les expressions obtingudes:

$$\frac{K_1B}{K_1C}\cdot\frac{CK_2}{K_2A}\cdot\frac{AK_3}{K_3B} = \frac{AB\cdot\sin(\angle B+45)\cdot BC\cdot\sin(\angle C+45)\cdot CA\cdot\sin(\angle A+45)}{AC\cdot\sin(\angle C+45)\cdot AB\cdot\sin(\angle A+45)\cdot BC\cdot\sin(\angle B+45)} = 1$$

Finalment, d'acord amb el teorema de Ceva, les rectes, AA_1, BB_1 i CC_1 són concorrents, que és el que volíem provar.

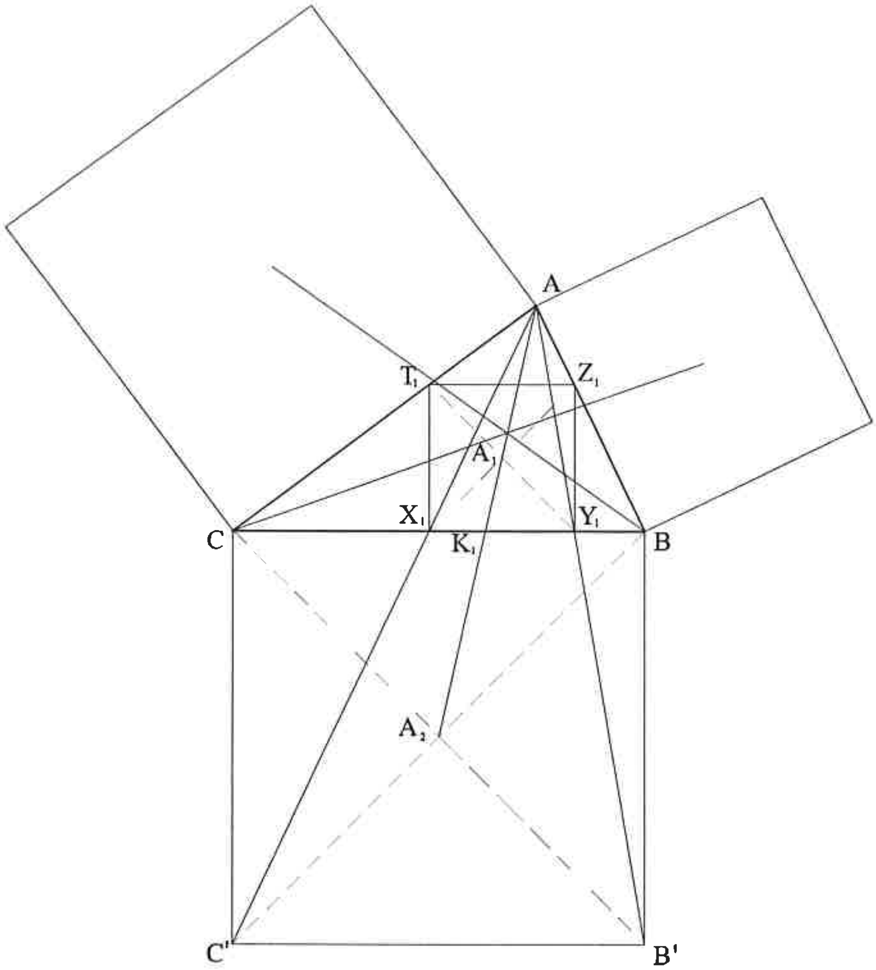


Figura 4.12: Problema IMO Shorlist 2001

4.2 La circumferència

4.2.1 Teoremes i conceptes

Propietats dels angles en una circumferència.

Considerem una circumferència w de centre O.

- Considerem 4 punts diferents X, Y, A, A' en w tals que A i A' es troben en el mateix arc XY. Llavors:

$$\angle XAY = \angle XA'Y$$

- Considerem ara en la situació anterior, un punt B, situat en l'arc XY que no conté ni A ni a A'. Llavors:

$$\angle XBY = 180 - \angle XAY$$

- Ara tracem una recta tangent a w en X i un punt K en aquesta situat en la mateixa banda de XY que B. Llavors:

$$\angle KXY = \angle XAY$$

- Finalment, si O és el centre de w:

$$\angle XOY = 2\angle XAY$$

TEOREMA. Potència d'un punt respecte d'una circumferència.

Considerem una circuferència w de centre O i radi r qualsevol i un punt X exterior a aquesta, a una distància de O igual a d. Tracem per X una recta l que talla a w en A i B, és tangent a w en C. La potència de X respecte w, $P(X, w)$ té un valor constant:

$$P(X, w) = XA \cdot XB = XC^2 = d^2 - r^2$$

independentment de la recta l que haguem traçat.

Utilitzant la mateixa notació anterior, si ara el punt X es troba a l'interior de la circumferència i tracem per X les cordes AB i CD, la potència de X respecte w té també un valor constant:

$$P(X, w) = XA \cdot XB = XC \cdot XD = r^2 - d^2$$

Si el punt X es troba contingut en w, llavors la potència de X respecte w val 0.

DEFINICIÓ. Eix radical de dues circumferències.

L'eix radical de dues circumferències no concèntriques és el lloc geomètric dels punts del pla tals que tenen la mateixa potència respecte de les dues circumferències. En concret, l'eix radical és una recta perpendicular a la línia que uneix els centres de les dues circumferències.

DEFINICIÓ. Centre radical de tres circumferències.

El centre radical de tres circumferències és el punt del pla tal que té la mateixa potència respecte les tres circumferències. En concret, aquest punt és on concorren els tres eixos radicals relatius a cada parella de circumferències.

TEOREMA. Teorema de la papallona.

Considerem una circumferència, una corda qualsevol AB d'aquesta el punt mig de la qual és M. Tracem dues cordes MN i PQ variables que passen per M. Si X i Y són els punt d'intersecció de les cordes MN i PQ amb AB, respectivament, llavors $XM = MY$.

4.2.2 Problemes

PROBLEMA* (OBrM 2002 - 1) L'altura des d'un dels vèrtexs d'un triangle acutangle ABC intersecta al costat oposat en D. Des de D les tracem les perpendiculars DE i DF als altres dos costats. Provar que la longitud EF és la matexa independentment del vèrtex que es tria.

Solució:
Suposem per exemple que triem el vèrtex A. Notem que $\angle DFA = \angle DEA = 90$ per tant els punts $AEDF$ es troben en una circumferència de diàmetre AD. D'aquesta manera, pel teorema del sinus podem establir el valor de la longitud EF:

$$\frac{EF}{\sin \angle FAE} = \frac{EF}{\sin \angle CAB} = AD \ ; \ EF = AD \cdot \sin \angle CAB$$

Tenint en compte la fórmula $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC$ i aplicant altra vegada el teorema del sinus obtenim:

$$EF = AD \cdot \sin \angle CAB = \frac{2 \cdot S(ABC)}{BC} \cdot \frac{BC}{2R} = \frac{S(ABC)}{R}$$

on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle ABC.
Òbviament, la superfície i el radi de la circumferència circumscrita no depenen de l'elecció d'un vèrtex o un altre, cosa que completa la demostració.

PROBLEMA* (OBrM 1998 - 5) En un triangle ABC D és el punt mig del costat AB i E és el punt de trisecció del segment BC que es troba més aprop de C $\left(\frac{BE}{EC} = 2\right)$. Es sap que $\angle ADC = \angle EAB$. Determinar el valor de l'angle $\angle CAB$.

Solució:
Considerem F el punt de trisecció del segment BC que es troba més aprop de B. Notem que $\frac{EF}{FB} = \frac{AD}{DB} = 1$, per tant les rectes AE i DF són paral·leles.
Sigui K el punt d'intersecció de AE i CD. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $KE = 1$. D'aquesta manera, per Tales tenim que

$$\frac{DF}{KE} = DF = \frac{CF}{CE} = 2 \Rightarrow DF = 2$$

I a més,

$$\frac{AE}{DF} = \frac{AK + 1}{2} = \frac{AB}{DB} = 2 \Rightarrow AK = 3$$

Ara tenint en compte que el triangle ADK és isòsceles, per ser $\angle ADC = \angle EAB$, arribem a que $AK = KD = 3$.
Aplicant altra vegada Tales,

$$\frac{DK}{KC} = \frac{3}{KC} = \frac{FE}{EC} = 1 \Rightarrow KC = 3$$

Finalment, $CK = KD = KA$, com que els punts C, D i K estan alineats, concloem que els punts A, C i D es troben en una circumferència de diàmetre CD. Per tant $\angle CAB = \angle CAD = 90$.

PROBLEMA* (Pan African 2000-4) Sigui γ una circumferència qualsevol. Considerem un punt P exterior a γ. Tracem les tangents PA i PB a γ i una recta qualsevol l per P que talla a γ en Q i R, amb Q entre P i R. La paral·lela a QR per A intersecta per segona vegada a γ en S. Provar que si $M = RQ \cap SB$, llavors M és el punt mig de QR.

Solució 1:
Tenint en compte que AP és tangent a γ i que $AS \parallel QR$, obtenim que $\angle PAQ = \angle ASQ = \angle SQR$. A més, $\angle QAB = \angle QSB$. Per tant $\angle QMB = \angle QSB + \angle SQR = \angle PAB$. Sigui O el centre de γ, tenim que $\angle POB = \angle ARB = \angle PAB$. Així, $\angle PMB = \angle QMB = \angle POB = \angle PAB$, d'aquí que P, A, M, O, B estiguin en una circumferència, i doncs, $\angle OMP = \angle OAP = 90$, cosa que implica que M és el punt mig de la corda QR.
Solució 2:
Sigui $K = AB \cap PR$. Com que AB és la polar de P respecte γ, tenint en compte que $AS \cap PR = \infty$, $B(P, K; Q, R) = (B, A; Q, R) = 1$ i $S(B, A; Q, R) = (M, \infty; Q, R) = 1$. Així, $MQ/Q\infty = MR/R\infty$ cosa que implica que $MQ = MR$.

PROBLEMA* (IBERO 1990-2) En un triangle ABC, D, E i F són els punts de tangència de la circumferència inscrita amb els costats BC, CA i AB, respectivament. Designem per P el punt d'intersecció de AD amb la circumferència inscrita al triangles ABC i per M el punt mig de EF. Provar que si I és l'incentre del triangle ABC, els punts P, I, D, M estan en una circumferència.

Solució:
Observem que els triangles AEM i AEI són semblants, per tant:

$$\frac{AM}{EA} = \frac{EA}{AI} \Leftrightarrow AE^2 = AM \cdot AI$$

D'altra banda, aplicant la potència del punt A respecte la circumferència inscrita:

$$AP \cdot AD = AE^2$$

Combinant les dues expressions anteriors obtenim el resultat que se'ns demana provar a l'enunciat:

$$AM \cdot AI = AE^2 = AP \cdot AD$$

Per tant, P, D, I i M estan en una circumferència.

PROBLEMA* (OBrM 1994 - 3) AP, AQ, AR, AS són cordes d'una circumferència donada amb la propietat que

$$\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$$

Provar que

$$AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)$$

Solució:
Primer de tot observem que al tindre $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$, llavors $PQ = QR = RS$ i $PR = QS$ (*).
D'altra banda, aplicant el teorema de Ptolomeu als quadrilàter $APQR$ i $ASRQ$:

$$AP \cdot QR + AR \cdot PQ = PR \cdot AQ \ ; \ QR \cdot AS + AQ \cdot RS = AR \cdot QS$$

Dividint aquestes dues últimes igualtats i tenint en compte (*) s'obtè el resultat:

$$\frac{AP \cdot QR + AR \cdot PQ}{QR \cdot AS + AQ \cdot RS} = \frac{PQ(AP + AR)}{PQ(AS + AQ)} = \frac{AP + AR}{AS + AQ}$$

$$\frac{PR \cdot AQ}{AR \cdot QS} = \frac{AQ \cdot QS}{AR \cdot QS} = \frac{AQ}{AR}$$

És a dir:

$$\frac{AP + AR}{AS + AQ} = \frac{AQ}{AR} \Rightarrow AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)$$

PROBLEMA* (OBrM 2004-2) En un triangle ABC, D i E són els peus de les perpendiculars de A i B a BC i CA. P és el punt d'intersecció de la recta AD amb la semicircumferència que passa per BC construida exteriorment sobre BC i Q el punt d'intersecció de la recta BE amb la semicircumferència que passa per AC i construida exteriorment sobre AC. Provar que $CP = CQ$.

Solució:
Per una banda, tenim que $CP^2 = CD^2 + DP^2$. Com que BC és el diàmetre de la semicircumferència construïda sobre BC, $\angle CPB = 90$. Aplicant el teorema de l'altura al triangle CBP obtenim que $PD^2 = CD \cdot DB$, per tant, $CP^2 = CD^2 + CD \cdot DB = CD \cdot CB$.
Anàlogament es té que $CQ^2 = CE \cdot CA$.
D'altra banda al ser D i E els peus de les perpendiculars de A i B a BC i AC, respectivament, $\angle CAD = 90 - \angle ACD$ i $\angle EBC = 90 - \angle ACD$, per tant $\angle CAD = \angle ACD$ i els triangles ADC i CEB són semblants. D'aquí se'n desprèn que $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE}$, o el que és el mateix, $CA \cdot CE = CB \cdot CD$.
Finalment, $CQ^2 = CP^2$ o $CQ = CP$.

PROBLEMA (RUSS 1997-5) Considerem un triangle isòsceles ABC ($AC = BC$) amb I i O, l'incentre i circumcentre, respectivament. Sigui D un punt en BC tal que OD és perpendicular a BI. Provar que llavors ID i AC són paral·lels.

Solució:

Provarem que O, D, B, I estan en una circumferència. En efecte, $\angle ODB = 90 - \frac{\angle ABC}{2}$, mentre que $\angle OIB = \angle CIB = 180 - \angle CIB - \angle CBI = 180 - (90 - \angle ABC) - \frac{ABC}{2} = 90 + \frac{\angle ABC}{2}$. Així doncs, $\angle ODI = \angle OBI = \frac{\angle ABC}{2} - \angle OBC = \frac{\angle ABC}{2} - (90 - \angle ABC) = \frac{3\angle ABC}{2} - 90$. Finalment, $\angle IDB = \angle ODB - \angle ODI = 90 - \frac{\angle ABC}{2} - (\frac{3\angle ABC}{2} - 90) = 180 - 2\angle ABC = \angle ACB$. Concloem que AC i ID són paral·lels.

PROBLEMA* (Mathematical Reflections) Considerem un triangle ABC rectangle en A. Escollim un punt D en el segment BC. Sigui E el simètric de D respecte AB, F i G la projecció de E sobre AB i la intersecció de EC amb AB, respectivament. H és la projecció de G sobre BC i I la intersecció de HF amb CE. Provar que G és l'incentre del triangle IHA.

Solució:

Comencem provant que $\angle FHG = \angle HGA$. En efecte, els punts D, G, F i H són concíclics, així com els punts H, G, A i C. Per tant, $\angle FHG = \angle FDG = \angle GEF = \angle GCA = \angle GHA$. Ara provarem que $\angle GAI = \angle HAG$, d'on se'n deriva la conclusió. Notem que $\angle HIG = 180 - (\angle FHG + \angle HGI) = 180 - (\angle FDG + \angle BGI + \angle GHB) = 180 - (90 + HGB) = 90 - (90 - \angle HBG) = HBG$. Per tant els punts H, G, I i B estan en una circumferència. D'aquí que $\angle BIC = \angle BIG = \angle BHG = \angle BAC$ i doncs B, I, A i C estan en una circumferència. Finalment doncs, $\angle GAI = \angle BAI = \angle BCI = \angle BCG = \angle HCG = \angle HAG$.

PROBLEMA* (OBrM 2000-1) Dos circumferències secants C_1 i C_2 tenen una tangent PQ comuna que toca C_1 a P i a C_2 a Q. M i N són els punts d'intersecció de les dues circumferències. Provar que els triangles MNP i MNQ tenen la mateixa àrea.

Solució:

Sigui K el punt d'intersecció de MN amb PQ. Notem que $\frac{S(MNP)}{S(MNQ)} = \frac{PK}{KQ}$. Tenim que MN és l'eix radical de C_1 i C_2, per tant qualsevol punt que pertanyi a aquest té la mateixa potència respecte de C_1 que C_2. K pertany a l'eix radical, i a més tant PK i QK són tangents a C_1 i C_2, respectivament. Com que la potència d'un punt respecte a una circumferència és igual al quadrat de la longiud de la recta tangent del punt a la circumferència, concloem que $PK = KQ$. Finalment:

$$\frac{S(MNP)}{S(MNQ)} = \frac{PK}{KQ} = 1 \Rightarrow S(MNP) = S(MNQ)$$

PROBLEMA* (OBM 1993-3) Dues circumferència w_1 i w_2 de centres A i B respectivament són tangents exteriorment en el punt X. Una altra circumferència w de centre C ës tangent interiorment a w_1 i w_2 en els punts X i Y. La tangent a w_1 i w_2 per X ës una corda de w el punt mig de la qual ës M. Provar que $\angle XMY = \angle BAC$.

Solució:
Primer de tot, notem que al ser w_1 i w_2 tangents interiorment a w, llavors tan els punts X, A i C com els punts Y, B i C són colineals. D'aquesta manera, $\angle BCA = \angle YCX$, per tant, l'enunciat es redueix a provar que els puns X, Y, M i C es troben en una circumferència.
Considerem les tangents a w en X i Y i Z el seu punt d'intersecció. Notem que els punts X, C, Y i Z estan en una circumferència de diàmetre ZC. A més, $CM \perp MX$, per tant, si provem que la recta MX contè el punt Z haurem provat que els punts C, M, X, Z, Y es troben en una circumferència, que és el que volem provar.
Observem que la recta MX és de fet l'eix radical de w_1 i w_2, és a dir, és el lloc geomètric dels punts del pla tals que tenen la mateixa potència respecte w_1 i w_2. Però ZX i ZY són tangents a w_1 i w_2, respectivament, per tant el punt Z té la mateixa potència respecte w_1 i w_2. Concloem doncs que Z pertany la recta MX. En conseqüència, els punts C, M, X, Z i Y es troben en una circumferència. Finalment $\angle YCX = \angle BAC = \angle YXM$.

PROBLEMA* (IBERO 2001-2) Considerem un triangle ABC i I el seu incentre. Siguin X, Y i Z els punts de tangència de la circumferència inscrita amb els costats BC, CA i AB. Provar que si $P = BI \cap YZ$ i $Q = CI \cap YZ$, llavors $PX = QX$ llavors el triangle ABC és isòscel·les.

Solució:
Comencem observant que I, Q, Z, B i X estan en una circumferència. En efecte, com que:

$$\angle QZX = \angle YZX = 180 - \angle AZY - \angle ZBX = 90 - \angle ACB = \angle CIX$$

Per tant, I, Q, Z i X són concíclics, d'on se'n segueix que també ho són I, Q, Z, B i X.
Anàlogament es dedueix que I, Y, P, C i X estan en una circumferència.
Finalment, pel teorema del sinus aplicat al triangle PQX:

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{\sin \angle XPZ}{\sin \angle PQX} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC}$$

D'on se'n segueix que si $PX = XQ$, llavors $\angle ACB = \angle ABC$, que és el que volíem provar.

PROBLEMA* Sigui w una semicircumferència de diàmetre AB. Una recta paral·lela a AB intersecta a w en C i D, amb AD entre C i B. Una paral·lela a AD per C talla a w en E. Les rectes EB i CD s'intersecten en F. Una paral·lela a AD per F intersecta AB en P. Provar que PC és tangent a w.

Solució:
Observem que $\angle CAP = 180 - \angle CAB = \angle CDB$. A més, $PA = FD$ i com que $ABDC$ és un trapezi isòscel·les, $CA = DB$. Això implica que els triangles CAP i BDF són iguals, per tant

$\angle PCA = \angle DBF = \angle DBE = \angle ECD = \angle DAB = \angle CBA$. Com que $\angle PCA = \angle CBA$, concloem que PC és tangent a w.

PROBLEMA (IBERO 1999-5) Considerem un triangle no isòscel·les. D, E i F són els peus de les perpendiculars de A, B i C a BC, CA i AB, respectivament. Siguin P i Q els punts d'intersecció de la recta EF amb la circumferència circumscrita al triangle ABC. Si, O és el circumcentre del triangle ABC i M el punt mig de BC se us demana provar:**

- $AO \perp PQ$
- $AP^2 = 2AD \cdot OM$

Solució:
Per provar el primer apartat, per provar que $AO \perp PQ$, provarem equivalentment que $AP = AQ$. Per una banda tenim que $EHFA$ estan en una circumferència (H és l'ortocentre del triangle ABC) i per tant $\angle PEA = 180 - \angle AEF = 180 - \angle AHF = 180 - \angle C = \angle APB$. D'aquí que els triangles APE i ABP siguin semblants. Per tant:

$$\frac{AP}{AE} = \frac{AB}{AP} \Leftrightarrow AP^2 = AE \cdot AB$$

Anàlogament, és fàcil veure que $AQ^2 = Af \cdot AC$.
D'altra banda però, $EHDB$ i $FHDC$ estan en una circumferència, i a més, AD és el seu eix radical. D'aquí que:

$$AP^2 = AE \cdot AB = AH \cdot AD = AF \cdot AC = AQ^2 \Rightarrow AP = AQ$$

Per provar el segon apartat, cal tenir en compte un fet conegut i fàcil de provar que és que la distància d'un vèrtex a l'ortocentre és igual al doble de la distància del circumcentre al costat oposat. En el nostre cas per exemple, $AH = 2OM$. D'aquesta manera la igualtat a provar esdevè:

$$AP^2 = 2OM \cdot AD = AH \cdot AD$$

Però de fet aquesta identitat ja l'hem provat anteriorment, pel fet que E, B, H i D estan en una circumferència.
La demostració és doncs completa.

PROBLEMA (IBERO 1994-4) Sigui ABC un triangle qualsevol i P un punt en l'interior del triangle tal que PA, PB i PC intersecten la circumferència circumscrita del triangle ABC en els punts $X \neq A$, $Y \neq B$ i $Z \neq C$. Determinar com trobar el punt P si sabem que el triangle XYZ és equilàter.**

Solució:

Considerem el problema resolt. Clarament, $60 = \angle YZX = \angle YZP + \angle PZX = \angle PBC + \angle PBA$. Ara considerem l'isogonal conjugat de P [4], al qual direm F. Tenim que $\angle PAC = \angle FAB$ i $\angle PBC = \angle FBA$. Per tant, $\angle AFB = 180 - \angle FAB - \angle FBA = 180 - (60) = 120$. Anàlogament, es pot provar que $\angle BFC = \angle CFA = 120$, d'on deduim que F és el punt de Fermat[5] del triangle ABC.

PROBLEMA (IMO 2004-5) Sigui $ABCD$ un quadrilàter concíclic tal que la diagonal AC no divideix amb dos parts iguals els angles $\angle DAB$ i $\angle BCD$. P és un punt interior a $ABCD$ tal que:**

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ i } \angle PDC = \angle ADB$$

Provar que $ABCD$ és concíclic si i només si $AP = CP$.
Solució:
Comencem suposant que $ABCD$ és concíclic. Considerem els punts $M \neq B$ i $N \neq D$, els punts d'intersecció de les rectes BP i DP amb la circumferència circumscrita a $ABCD$. Per definició de P, $\angle ABM = \angle DBC$ i $\angle NDA = \angle BDC$. Per tant $AM = DC$ i $AN = BC$. Considerem els punts $X = BC \cap AN$ i $Y = CD \cap AM$. Els triangle XAC i YAC són ambdós isòsceles. D'aquí se'n desprèn que $MD \parallel AC \parallel NB$. Se'n segueix que els triangles NBP i PMD són isòsceles, per tant la mediatriu del segment MD que és la mateixa que la mediatriu del segment AC és concorrent amb les rectes BM i ND en P. El mateix passa amb la mediatriu de NB, coincideix amb la mediatriu de AC i concorre amb BM i ND en P. Concluïm que $AP = CP$.
Considerem ara un quadrilàter $ABCD$ amb P un punt interior que satisfà les condicions de l'enunciat i a més $AP = CP$. Cal provar que $ABCD$ és cíclic. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que P es troba en l'interior del triangle ABD. Considerem els punts X i Y en les extensions de BC i CD, respectivament, tals que si m és la mediatriu de AC que per tant contindrà a P, $X, Y \in m$. Clarament, $AX = XC$ i $AY = YC$. Considerem els punts M i N en AY i AX tals que $AN = BC$ i $AM = CD$. Clarament tindrem que $NB \parallel MD \parallel AC$. A més tenim que B, P, M i N, P i D, respectivament, estan alineats, per ser NBP i MDP triangles isòsceles i per ser m, amb $P \in m$ la mediatriu de NB i MD. Tenim doncs que $NBDM$, $ACBN$ i $ACDM$ són trapezis isòsceles i per tant $AB = NC$, $BM = DN$ i $AM = DC$, per tant els triangles ABM i NCD són congruents. Juntament amb el fet que $\angle ABM = \angle DBC$, per definició de P, obtenim que $\angle DNC = \angle DBC$. Concloem que els punts N, B, C i D i per en conseqüència també A i M, es troben en una circumferència. És a dir, que $ABCD$ és concíclic.
L'enunciat queda doncs provat.

---

[4] En un triangle ABC, diem que dos punts X i Y són isogonals conjugats quan Y és el punt d'intersecció de les rectes simètriques de AX, BX i CX respecte les bisectrius (interiors) dels angles $\angle A$, $\angle B$ i $\angle C$, respectivament.

[5] Denotem pel punt de Fermat aquell punt F interior al triangle ABC tal que $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120$.
Una de les propietats més importants d'aquest punt és que és el punt tal que minimitza la suma de les distàncies d'aquest als tres vèrtexs.

PROBLEMA (IBERO 1997-2) Considerem un triangle ABC i el seu incentre I. Tracem una circumferència amb centre en I que intersecta BC en P i D (D entre P i B), CA en E i Q (amb E entre C i Q) i AB en F i R (amb F entre R i A). Les dues diagonals del quadrilàter $QFRE$ s'intersecten en S, les diagonals del quadrilàter $FRDP$ s'intersecten en T i les diagonals del quadrilàter $EQFP$ en U. Provar que les circumferències circumscrites als triangles SFR, TPD i UEQ s'intersecten en un únic punt.**

Solució:

És fàcil veure que com que I equidista dels tres costats, llavors $EQ = FR$ i $QA = AF$, per tant els triangles EAR i QAF són isòscel·les, cosa que implica que $AI \perp ER, QF$ i per tant el quadrilàter $QFRE$ és isòscel·leles. D'aquí que QR, EF i AI siguin concorrents en S. Anàlogament obtenim que T és el punt on concorren les rectes FD, RP i BI, i E el punt on concorren les rectes PQ, EF i CI.

Ara, notem que $\angle QIE = \angle FIR = \angle PID$, ja que tal com hem dit, I equidista dels tres costats. De la relació entre angles anterior obtenim que $\angle FSR = 180 - \angle ESR = 180 - 2\angle ISR = 180 - 2(90 - \angle SRE) = 2\angle QRE = \angle EIQ = \angle FIR$ cosa que implica que els punts S, F, R i I són concíclics. Anàlogament, es prova que els punts P, D, T i I són concíclics, així com els punts E, Q, U i I, cosa que prova l'enunciat.

PROBLEMA (Moldàvia Test de Selecció 2004-6) Siguin C_1 i C_2 dues circumferències, amb C_2 interior a C_1. Considerem dos punts P i Q, amb P interior a C_2 i Q exterior a C_1. Sigui l_i una recta variable que passa per P tal que intersecta C_2 en A_i i B_i. La circumferència circumscrita al triangle A_iQB_i interscta C_1 en M_i i N_i. Provar que, al variar l_i, les rectes M_iN_i concorren en un punt.**

Solució:

Designem per Γ_i la circumferència circumscrita al triangle A_iQB_i, i per $K_i \neq Q$ el punt d'intersecció de PQ amb Γ_i. Comcencem observant que A_iB_i és l'eix radical de Γ_i i C_2, per tant, $PA_i \cdot PB_i = PQ \cdot PK_i$, però com que el producte $PA_i \cdot PB_i$ és constant (per ser C_2 i P fixos), així com la longitud PQ, obtenim que PK_i també ha de ser constant, és a dir que K_i és un punt fix en PQ, que anomenarem a partir d'ara K[6].

Així doncs, KQ és l'eix radical de dues circumferències qualsevols Γ_i i Γ_j. A més, M_iN_i és l'eix radical de C_1 i Γ_i, per tant, $X = M_iN_i \cap KQ$ és el centre radical de C_1, Γ_i i Γ_j, cosa que implica que $M_jN_j \cap KQ = M_iN_i \cap KQ = X$, per tot i i j diferents. Equivalentment, les rectes M_iN_i al variar l_i concorren en X.

[6] A partir d'aquest fet, és immediat veure que el lloc geomètric dels centres de Γ_i al variar l_i és una recta perpendicular a PQ: en efecte, pel que hem dit, KQ és una corda fixa de totes les Γ_i obtingudes al variar l_i, per tant Γ_i són circumferències coaxials, d'on se'n segueix que els centres de Γ_i recorren una recta perpendicular a PQ, en concret, la mediatriu del segment KQ.

PROBLEMA (IBERO 2005-5) Considerem un triangle ABC. Sigui A_1 un punt en l'arc menor BC. A_2 i A_3 són punts en AB i AC respectivament tals que $\angle A_2A_1B = \angle CAO$ i $\angle A_3A_1C = \angle BAO$. Provar que la recta A_2A_3 conté l'ortocentre del triangle ABC.**

Solució:
Sigui O el circumcentre del triangle ABC, $A_2' \neq A_1$ i $A_3' \neq A_1$ els punts d'intersecció de les rectes A_1A_2 i A_1A_3 amb la circumferència circumscrita al triangle ABC, respectivament. Notem que $\angle OCA = \angle CAO = \angle A_2A_1B = \angle A_2'A_1B = \angle A_2'CB$ i anàlogament es prova que $\angle OBA = \angle A_3'BC$. Per tant, d'aquí se'n dedueix que O i $H = CA_2' \cap A_3'B$ són conjugats isogonals i per tant H és l'ortocentre del triangle ABC.
Sigui $X = A_3'H \cap AC$ i $Y = A_2'H \cap AB$. És fàcil veure que $A_3'X = XH$ i $A_2'Y = YH$ i per tant, $\angle XA_3'A_3 = \angle XHA_3$ i $\angle YA_2'A_2 = \angle YHA_2$. D'altra banda, $\angle XHY = 180 - \angle A$ i a més, $\angle A_3A_3'X = \angle BCA_1$ i $\angle YA_2'A_2 = \angle CBA_1$. Per tant:

$$\angle A_3HX + \angle XHY + \angle YHA_2 = \angle BCA_1 + 180 - \angle A + \angle CBA_1 = 180 - (180 - \angle) + 180 - \angle A = 180$$

Així, queda provat uqe A_3, H, A_2 són col·lineals.

PROBLEMA (Bielorússia 1996) $ABCD$ és un quadrilàter circumscrit en una circumferència, amb K, L, M, N els punts de tangència dels costats AB, BC, CD, DA amb la circumferència en qüestió, respectivament. Les rectes DA i BC s'intersecten en S i les rectes BA i CD s'intersecten en P. Provar que si S, K, M estan al·lineats, també ho estan P, L, N.**

Solució:
Primer de tot, aplicant el teorema de Brianchon[7] a l'hexàgon $AKBCMD$ i a l'hexàgon $BLCDNA$ obtenim que les rectes AC, DB, MK i NL concorren en un punt, el qual designarem per I.
Sigui $P' = NL \cap AB$, provarem que $P' \equiv P$. Tenim que NL és la polar[8] de S (respecte la circumferència inscrita en $ABCD$) i per tant $(S, I; M, K)$ formen una divisió harmònica[9], per tant també $(B, A; P, K)$ per extensió de C i també $(L, N; P', I)$ per extensió de S. Se'n segueix que P' és el pol de MK. Però el pol de MK és P, per tant $P' \equiv P$ i els punts N, L, P són doncs col·lineals.

[7]El teorema de Brianchon diu que per a qualsevol hexàgon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ circumscrit en una circumferència, les rectes A_1A_4, A_2A_5 i A_3A_6 concorren en un punt.

[8]Donat una circumferència k de centre O i radi r, i un punt A a l'interior d'aquesta, es diu que la corda XY de k que conté a A i és perpendicular a OA és la polar de A' respecte XY, on A' és la imatge de A respecte una inversió (veure la secció d'inversió) de centre O i raò r. A més, es diu que A' és el pol de XY respecte k.

[9]Definim com $(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ la raò creuada de les parelles de punts (A, B) i (C, D). En concret, quan $(A, B; C, D) = 1$ diem que les parelles de punts (A, B) i (C, D) són harmònics conjugats, o equivalentment, la divisió $(A, B; C, D)$ és harmònica.
Sigui k una circumferència qualsevol, A un punt exterior a k i a la polar de A respecte k. Llavors, si una recta qualsevol l per A intersecta a k en B i D (amb B entre D i A) i a a en C, llavors la divisió $(ACBD)$ és harmònica.

PROBLEMA (IMO Shorlist 2002-10) Considerem dues circumferències secants S_1 i S_2 en dos punts diferents, P i Q. Escollim dos punts qualsevols $A_1 \neq P, Q$ i $B_1 \neq P, Q$, en S_1. Siguin A_2 i B_2 els punts d'intersecció de les rectes A_1P i B_1P en S_2, respectivament. Provar que si C és la intersecció de les rectes A_1A_2 i B_1B_2, llavors els circumcentres dels triangles A_1A_2C al variar A_1 i B_1 estan continguts en una circumferència fixa.**

Solució:
Primer de tot provarem que A_1A_2CQ és un quadrilàter concíclic. En efecte, utlizant angles mòdul 180 graus[10]:

$$\angle A_1CA_2 = \angle CA_1A_2 + \angle CA_2A_1 = \angle CA_1A_2 + \angle PA_2B_2 =$$
$$= \angle CA_1A_2 + \angle PB_2A_2 + \angle B_2PA_2 = \angle CA_1A_2 + \angle PQA_2 + \angle A_1B_1P =$$
$$= \angle A_1B_1P + \angle PQA_2 = \angle A_1QP + \angle PQA_2 = \angle A_1A_2Q$$

Així doncs, el problema es redueix a provar que els circumcentres dels triangles A_1A_2Q al variar A_1 passen per una circumferència fixa. Posem que O_1, O_2 són, respectivament els centres de S_1 i S_2, respectivament i X el circumcentre de A_1QA_2. Tenim que X ve determinat per les mediatrius dels segments A_1Q i A_2Q, rectes que passen, respectivament per O_1 i O_2. A més tenim que si M_1 i M_2 són els punts mitjos de A_1Q i A_2Q, respectivament, llavors el quadrilàter M_1XM_2Q és concíclic. L'angle $\angle A_1QA_2$ és constant i per també també serà constant l'angle O_1XO_2. Finalment, com que $\angle O_2QO_1 = \angle A_1QA_2 = \angle O_2XO_1$, concloem que X, O_1, O_2 i Q són punts concíclics. L'enunciat queda provat.

PROBLEMA Sigui ABC un triangle d'ortocentre H. Siguin B', C' els peus de les perpendiculars a CA i AB des de B i C, respectivament i D el punt d'intersecció de $B'C'$ amb BC. Provar que si R és el punt mig del segment BC, llavors $DH \perp AR$.**

Solució:
Comencem provant l'anomenat teorema de Brokard:
TEOREMA (Brokard): Considerem un quadrilàter $XYZT$ inscrit en una circumferència de centre O. Llavors, O és l'ortocentre del triangle IJK, on $I = XY \cap TZ$, $J = XT \cap ZY$ i $K = XZ \cap TY$.
Demostració:
Siguin M i N els punts d'intersecció de JK amb XI i TI, respectivament. Clarament, les rectes JN, XZ i TY són concorrents en K, se'n segueix que $(XYNI)$ formen una quaterna harmònica i per tant, per extensió de J, també $(TZMI)$. D'aquí que MN sigui la polar de I respecte la circunferència de centre O i per tant $OI \perp JN$. Anàlogament, obtenim que $OJ \perp KI$ d'on se'n segueix que O és l'ortocentre del triangle JIK.

Retornem al problema origina, com que R és el punt mig del segment BC, aquest serà el centre de la circumferència de diàmetre BC en la qual s'hi troba inscrit el quadrilàter

[10]La utilització de angles mòdul 180 graus és molt útil en problemes en les quals apareixen elements en posició general. D'aquesta manera, podem escriure que $\angle XYZ \pm 180 = \angle XYZ$. Ens serà de gran ajuda per provar que determinats punts són concíclics o colineals.

$BCB'C'$. Aplicant el teroema de Brokard, obtenim doncs que M és l'ortocentre del triangle AHD i per tant $AM \perp HD$.

4.3 Geometria amb nombres complexos[11]

4.3.1 Teoremes i conceptes

En aquesta secció tractarem la geometria interpretada mitjançant els nombres complexos, representats al pla complex.
Els nombres complexos són de la forma $z = a + bi$, on i representa $\sqrt{-1}$. Direm que a és la part real del nombre complex z, $Re(z) = a$, i que b és la part imaginària del nombre complex z, $Im(z) = b$. El conjugat de z, $\bar{z}$ és $a - bi$. En el pla complex, compost per l'eix real (correspondria a l'eix de les x que tenim en un sistema de coordenades cartesià) i l'eix imaginari (corresponent a l'eix y en un sistema de coordenades cartesià), les coordenades de l'afix del vector $\overrightarrow{OZ}$ venen donades pel punt (a, b). Per comoditat, denotarem directament per z el vector $\overrightarrow{OZ}$. A continuació exposarem els teoremes i propietats més importants dels complexos que ens serveixen per resoldre problemes [12].

TEOREMA

Per tal de calcular distàncies hem d'utilitzar sempre la següent fórmula: $|a|^2 = a\bar{a}$. En concret, el valor del segment $|BC|$ és: $|BC| = \sqrt{(b-c)(\bar{b}-\bar{c})}$. (En el càlcul de les longituds de diferents segments, pot ser útil que aquests estiguin alineats.)

TEOREMA.

- $ab \parallel cd$ si i només si: $\dfrac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \dfrac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$
- $ab \perp cd$ si i només si: $\dfrac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\dfrac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$
- a, b i c són colineals si i només si: $\dfrac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} = \dfrac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}$
- c s'ha obtingut mitjançant un gir d'angle φ, en direcció positiva (sentit antihorari) de a respecte b si i només si: $c - b = e^{i\varphi}(a - b)$
- $\angle acb = \varphi$, en direcció positiva, si i només si: $\dfrac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi}\dfrac{c-a}{|c-a|}$

PROPIETAT. Propietats de la circumferència unitat.

- a pertany a la circumferència unitat si i només si $\bar{a} = \frac{1}{a}$.

[11] La utilització dels nombres complexos en geometria pot resultar ser útil en determinades situacions. L'inconvenint principal és però la gran quantitat d'operacions, llargues i farragoses, que de vegades mitjançant l'ús d'altres geometries ens estalviem. Es recomana generalment intentar primer una solució mitjançant geometria eucliana o trigonometria, i com a últim recurs, utilitzar complexes.

[12] En aquesta secció els teoremes posats s'han extret de l'article [13].

- El punt d'intersecció de les cordes ab i cd és: $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$. En el cas d'una tangent en x, es considera la corda xx.
- Si c pertany a la corda ab llavors: $\bar{c} = \dfrac{a+b-c}{ab}$.
- Si p és el peu de la perpendicular des d'un punt qualsevol c a la corda ab: $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c-ab\bar{c})$.

TEOREMA. Arrels de la unitat.

Són les arrels de l'equació $x^n = 1$. En el pla complex representen un n-àgon regular, inscrit en la circumferència unitat. Són de la forma $e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, on $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

TEOREMA. Sobre triangles.

- Dos triangles $\triangle abc$ i $\triangle pqr$ són semblants i tenen la mateixa orientació si i només si:

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}$$

- Si g és el baricentre del triangle $\triangle abc$, llavors:

$$\frac{a+b+c}{3}$$

- Si s i h són respectivament el circumcentre i l'ortocentre d'un triangle $\triangle abc$, llavors:

$$h + 2s = a + b + c$$

4.3.2 Problemes

PROBLEMA* (OBM 1984- 2) En un quadrilàter cíclic $ABCD$ considerem A', B', C' i D', els ortocentres dels triangles BCD, CDA, DAB i ABC, respectivament. Provar que els quàdrilaters $ABCD$ i $A'B'C'D'$ són congruents.

Solució:
Considerem el pla complex. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que el quadrilàter $ABCD$ es troba inscrit en la circumferència unitat. D'aquesta manera els ortocentres dels quatre triangles venen donats pels vectors següents:

$$a' = b + c + d \ ; \ b' = c + d + a \ ; \ c' = d + a + b \ ; \ d' = a + b + c$$

D'aquesta manera, tenim que:

$$a' - b' = b - a \ ; \ b' - c' = c - b \ ; \ c' - d' = d - c \ ; \ d' - a' = a - d$$

Així doncs $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, cosa que prova l'enunciat.

PROBLEMA (IMAC 2007-2) Sigui ABCD un paral·lelogram. Considerem les rectes l_1 i l_2, simètriques de CD i AB respecte BD i AC respectivament. El punt d'intersecció de l_1 i l_2 és P. Determinar la raò $\dfrac{AC}{BD}$ en funció de $\dfrac{AP}{PD} = q$.**

Solució:

Considerem el pla complex, podem suposar sense pèrdua de generalitat $k = AC \cap BD = 0$, $b = -1$ i $d = 1$. D'aquesta manera $c = -a$.

Siguin c'' i b'' els punts simètrics de c i b respecte BD i AC respectivament.

Primer de tot tenim que $c'' = \bar{c}$.

Per determinar b'' considerarem el peu de la perpendicular de b en el segment AC, b':

$$\text{Imposem perpendicularitat: } \frac{-1-b'}{-1-\bar{b'}} = -\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} = -\frac{c-(-c)}{\bar{c}-(-\bar{c})} = -\frac{c}{\bar{c}} \Rightarrow \bar{b'} = \frac{\bar{c}(-1-b')}{c} - 1$$

$$\text{Imposem colinealitat: } \frac{b'-c}{\bar{b'}-\bar{c}} = \frac{c-(-c)}{\bar{c}-(-\bar{c})} = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{(b'-c)+c}{(\bar{b'}-\bar{c})+\bar{c}} = \frac{b'}{\bar{b'}} \Rightarrow \bar{b'} = \frac{b'\bar{c}}{c}$$

Igualant les dues equacions obtenim que $b' = -\dfrac{c+\bar{c}}{2\bar{c}}$. Ara, tenint en compte que b' determina el punt mig del segment $B''B$:

$$\frac{b''-1}{2} = b' = -\frac{c+\bar{c}}{2\bar{c}} \Rightarrow b'' = -\frac{c}{\bar{c}}$$

El següent pas és buscar p. Sabem que p pertany a l_1 i l_2, per tant

$$\text{Imposem colinealitat de } a(=-c),\ b'' \text{ i } p\text{: } \frac{p+c}{\bar{p}+\bar{c}} = \frac{b''+c}{\bar{b''}+\bar{c}} = \frac{-\frac{c}{\bar{c}}+c}{-\frac{\bar{c}}{c}+\bar{c}} \Rightarrow \bar{p} = \frac{(\bar{c}^2(c-1))(p+c)}{c^2(\bar{c}-1)} - \bar{c}$$

$$\text{Imposem colinealitat de } d(=1),\ c'' \text{ i } p\text{: } \frac{p-1}{\bar{p}-1} = \frac{c''-1}{\bar{c''}-1} = \frac{\bar{c}-1}{c-1} \Rightarrow \bar{p} = \frac{(c-1)(p-1)}{\bar{c}-1} + 1$$

Igualant les dues equacions i simplificant obtenim que $p = \dfrac{c}{c-1}$. Així doncs:

$$|AP|^2 = (a-p)(\bar{a}-\bar{p}) = \left(-c - \frac{c}{c-1}\right)\left(-\bar{c} - \frac{\bar{c}}{\bar{c}-1}\right) = \frac{c^2\bar{c}^2}{(c-1)(\bar{c}-1)}$$

$$|PD|^2 = (p-d)(\bar{p}-\bar{d}) = \left(\frac{c}{c-1} - 1\right)\left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}-1} - 1\right) = \frac{1}{(c-1)(\bar{c}-1)}$$

Per tant:

$$q = \frac{|AP|}{|PD|} = c\bar{c}$$

Finalment,

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{\sqrt{(a-c)(\bar{a}-\bar{c})}}{\sqrt{(b-d)(\bar{b}-\bar{d})}} = \frac{2\sqrt{c\bar{c}}}{2} = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{q}$$

PROBLEMA* (OBrN 1996-3) Sigui ABC un triangle acutangle i O el seu circumcentre. S és la circumferència que passa per O, A i B. Provar que si S talla als costat AC i BC per segona vegada en els punts P i Q, respectivament, llavors CO és perpendicular a PQ.

Solució:

Considerem el pla complex. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que el triangle ABC es troba inscrit en la circumferència unitat. Designarem els vèrtexs A, B i C amb els afixos dels complexes a, b i c. Per tal de demostrar l'enunciat necessitem determinar els valors de p i q.

Començarem buscant el centre de S, que li direm k. Sabem que k és la intersecció de les tres mediatrius dels segments AB, AO i BO, per simplificar les coses considerarem el punt d'intersecció de les mediatrius de AO i BO. Designem per E i F els punts mitjos dels segments AO i BO, respectivament, per una banda:

$$e = \frac{a}{2}\ ;\ f = \frac{b}{2}$$

D'altra banda, e i f són els peus de les perpendiculars baixades de k a la corda $a(-a)$ i $b(-b)$, per tant:

$$e = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(a + (-a) + k - a(-a)\bar{k})\ ;\ f = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(b + (-b) + k - b(-b)\bar{k})$$

Simplificant i resolent el sistema obtenim que $k = \dfrac{ab}{a+b}$.

Per tal de buscar p i q imposarem que la distància PK i QK són iguals a AK. La distància AK és:

$$|AK|^2 = (a-k)(\bar{a}-\bar{k}) = \frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}+\bar{b}} = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

Imposant doncs que PK és igual a AK:

$$|PK|^2 = (p-k)(\bar{p}-\bar{k}) = \frac{p(a+b)-ab}{(a+b)} \cdot \frac{((a+c-p)(a+b)-ac)}{ac(a+b)} = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

Simplificant obtenim que $p = \frac{b(a+c)}{a+b}$ i anàlogament $q = \frac{a(b+c)}{a+b}$. Per tant la condició de de perpendicularitat de l'enunciat és certa si i només si:

$$\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = -\frac{c-0}{\bar{c}-0} = -c^2$$

És fàcil comprovar que realment això és així:

$$\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = \frac{\frac{c(b-a)}{a+b}}{\frac{c(a-b)}{a+b}} = -c^2$$

PROBLEMA (OBrM 2007 - 3) En un triangle ABC tal que $\angle BAC = 60$ i $AC > AB$, considerem el circumcentre O i l'ortocentre H. La recta OH talla els costats AC i AB en els punts P i Q, respectivament. Provar que $PO = HQ$**

Solució:

Resoldrem el problema mitjançant complexes, utilitzant la notació habitual. Considerem el pla complex, podem suposar sense pèrdua de generalitat que el triangle ABC es troba en la circumferència unitat. Atès que P, O, H i Q es troben alineats, serà suficient provar que si $\angle CAB = 60$, llavors $p = h - q$.

Començarem buscant el valor de p. Per una banda, p pertany a la corda ac, per tant:

$$\bar{p} = \frac{a+c-p}{ac} \quad (*)$$

D'altra banda p, o i h es troben alineats. Tenint en compte que $h + 2\cdot 0 = a + b + c$, obtenim:

$$\frac{p}{\bar{p}} = \frac{a+b+c}{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}} = \frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

Substituint (*) en la última expressió obtenim el valor de p:

$$p = \frac{b(a+b+c)(a+c)}{b^2+ca+2ab+2bc}$$

Anàlogament es té que el valor de q és:

$$q = \frac{c(a+b+c)(a+b)}{c^2+ab+2bc+2ac}$$

D'altra banda, si $\angle BAC = 60$, llavors $COB = 120$, per tant podem suposar sense pèrdua de generalitat que $b = 1$ i $c = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Per simplificar posarem $c = w$, amb $w^2 + w + 1 = 0$. D'aquesta manera obtenim que:

$$p = \frac{(a+w+1)(a+w)}{(1+wa+2a+2w)}$$

$$h - q = (a+w+1)\left(1 - \frac{w(a+1)}{w^2+a+2w+2aw}\right) = \frac{(w+a+1)(w+1)(a+w)}{(w^2+a+2w+2aw)} = \frac{\frac{(w+a+1)(w+1)(a+w)}{w+1}}{\frac{(w^2+a+2w+2aw)}{w+1}} =$$

$$= \frac{(a+w+1)(a+w)}{-w(w^2+a+2w+2aw)} = \frac{(a+w+1)(a+2)}{(-w^3-wa-2w^2-2aw^2)} =$$

$$= \frac{(w+a+1)(w+a)}{(-1-wa-2(-1-w)-2a(-1-w))} = \frac{(a+w+1)(a+w)}{(1+wa+2a+2w)}$$

Concloem doncs que $p = h - q$, cosa que implica que $PO = HQ$.

PROBLEMA. Provar que l'incentre i el circumcentre del triangle ABC, això com l'ortocentre del triange format pels punts de tangència de la circumferència inscrita amb els costats del triangle ABC, estan alineats.**

Solució:
Sigui MNP el triangle format pels punts de tangència de la circumferència inscrita amb els costats del triangle ABC. Primer de tot notem que l'incentre del triangle ABC és justament el circumcentre del triangle MNP. La línia d'Euler del triangle MNP conté el circumcentre, l'ortocentre i el baricentre del triangle MNP, per tant, serà suficient que provem que la línia que uneix el circumcentre i l'incentre del triangle ABC, conté el baricentre del triangle MNP, i,e. els tres punts estan alineats.
Considerem en el pla complex la circumferència unitat. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que és la circmferència inscrita del triangle ABC, d'aquesta manera queden definits els vectors a, b i c, pel teorema 6.2.3, de la següent manera:

$$a = \frac{2np}{p+n}\,,\ b = \frac{2pm}{m+p}\,,\ c = \frac{2mn}{m+n}$$

D'una banda tenim que el circumcentre o del triangle ABC és:

$$o = \frac{2mnp(m+n+p)}{(m+n)(n+p)(p+m)}$$

Mentre que el baricentre g del triangle MNP és:

$$g = \frac{a+b+c}{3}$$

Tenim que o, g i 0 són colineals, que és el que volem provar, si i només si:

$$\frac{o-g}{\bar{o}-\bar{g}} = \frac{g}{\bar{g}} = \frac{(o-g)+g}{(\bar{o}-\bar{g})+\bar{g}} = \frac{o}{\bar{o}} \Leftrightarrow \frac{o}{\bar{o}} = \frac{g}{\bar{g}}$$

Per una banda:

$$\frac{o}{\bar{o}} = \frac{2mnp(m+n+p)(\bar{m}+\bar{n})(\bar{m}+\bar{p})(\bar{n}+\bar{p})}{2\bar{m}\bar{n}\bar{p}(\bar{n}+\bar{n}+\bar{p})(m+n)(n+p)(p+m)} =$$

$$= \frac{m^3n^3p^3(m+n+p)(m+n)(n+p)(p+n)}{m^2n^2p^2(mn+np+pm)(m+n)(n+p)(p+n)} = \frac{mnp(m+n+p)}{mn+np+pm}$$

D'altra banda:

$$\frac{g}{\bar{g}} = \frac{\frac{m+n+p}{3}}{\frac{\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}}{3}} = \frac{m+n+p}{\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}} = \frac{mnp(m+n+p)}{mn+np+pm}$$

Així doncs, l'enunciat queda provat.

PROBLEMA Considerem un quadrilàter $ABCD$ inscrit en una circumferència $C(O)$. Siguin O_{ab}, O_{bc}, O_{cd} i O_{da} els centres de les circumferències simètriques de $C(O)$ respecte de AB, BC, CD i DA, respectivament. Provar que si les circumferències (O_{ab}), (O_{bc}); $(O_{bc}),(O_{cd})$; $(O_{cd}),(O_{da})$; $(O_{da}),(O_{ab})$ s'intersecten en A', B', C' i D', respectivament, llavors el quadrilàter $A'B'C'D'$ és un quadrilàter inscriptible en una circumferència del mateix radi de $C(O)$.

Solució:

Considerem el pla complex. Indicarem per z el complex que determina el punt Z. A més, suposarem que $C(O)$ és la circumferència unitat.

Notem que A' és el punt simètric de A respecte la recta $O_{ad}O_{ab}$, i que al seu torn, O_{ab} i O_{ad} són els simètrics de O respecte AB i BC. Això ens permet trobar facilement el valor de a'. Comencem buscant els valors de O_{ab} i O_{ad}:

$$O_{ab} = a + d \ ; \ O_{ad} = a + d$$

Ara, buscarem la projecció m de A en $O_{ab}O_{ad}$:

$$\text{Imposem que } AM \perp O_{ad}O_{ab} \parallel DB\text{: } \frac{a-m}{\frac{1}{a}-\bar{m}} = -\frac{d-b}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \bar{m} = \frac{1}{a} - \frac{a-m}{db}$$

$$\text{Imposem que } M \in O_{ad}O_{ab}\text{: } \frac{m-(a+b)}{\bar{m}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} = \frac{d-b}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} \Rightarrow m = a + \frac{b+d}{2}$$

Finalment, el càlcul de a' és casi immediat:

$$a' = 2a + b + d - a = a + b + d$$

Permutant cíclicament a, b, c i d obtenim els valors de b':

$$b' = a + b + c$$

Així doncs, $a' - b' = d - c$ cosa que implica que $A'B'$ i $C'D'$ tenen la mateixa direcció i longitud. Raonant anàlogament, arrivem a que els quadrilàters $ABCD$ i $A'B'C'D'$ són congruents, d'on en deduim la conclusió.

4.4 Geometria inversiva

4.4.1 Teoremes i conceptes

Definim una inversió[13] de centre O i raò k, una transformació en el pla tal i que cada punt $A \neq O$ s'associa a un punt A' de manera que O, A i A' estan continguts en el mateix raig, i $|OA| \cdot |OA'| = k^2$.

Considerem els punts P, Q i O, amb $P, Q \neq O$. Si P' i Q' són les seves respectives imatges a l'aplicar una inversió de centre O i raò k, tenim que els triangles $\triangle POQ$ i $\triangle P'OQ'$ són semblants, ja que $\angle POQ = \angle P'OQ'$ i a més $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$, per tant $\angle OPQ = \angle OQ'P'$. En el cas d'invertir el propi punt O, aquest és enviat al punt infinit P_∞.

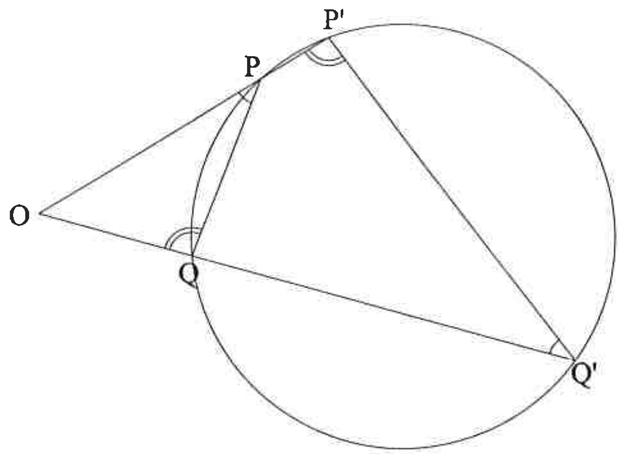


Figura 4.13: La inversió

Propietats de la inversió:

- La imatge d'una línia que passa pel centre d'inversió és ella mateixa.

- La imatge d'una circumferència que passa pel centre d'inversió és una línia que no passa pel centre d'inversió

- La imatge d'una línia que no passa pel centre d'inversió és una circumferència que passa pel centre d'inversió.

- La imatge d'una circumferència que no passa pel centre d'inversió és una altra circumferència que no passa pel centre d'inversió.

- Es conserven el nombre de punts de tall entre dos elements qualsevols (o circumferències o rectes o una de cada). Es considera que P_∞ és el punt de tall de dos rectes paral·leles.

[13]Per adquirir més informació sobre aquest tema, consultar [7]

4.4.2 Problemes

PROBLEMA (OBrM 1995-5) Siguin A, B i C, en aquest ordre, tres punts en una línia qualsevol l_1. Tracem les semicircumferències k i l, de diàmetres AB i BC, respectivament, ambdues en la mateixa banda de l_1. La circumferència t és tangent a k en el punt P, a l en el punt $T \neq C$ i a la perpendicular n de l_1 que passa per C en Q. Provar que AT és tangent a l.**

Solució:
Considerem una inversió de centre T i raò r:

- t' i l', imatges de t i l respectivament, són dos rectes paral·leles que no contenen T.

- k' i n', imatges de k i n, esdevenen dues circumferències tangents a t' en P' i Q' i a l' en B' i C', respectivament. A més k' i n' tenen el mateix radi, i mentre que n' conté a $T'(=T)$, k' no.

- La imatge de l_1, l_1' és una circumferència que passa pel centre d'inversió T, per C' i B' i talla a k' en A'.

Considerem la mediatriu del segment $B'C'$, clarament, B' i C' són simètrics respecte aquesta, així com A' i T, per pertanyer a circumferències congruents. D'aquí se'n desprèn que $A'T$ és paral·lel a t' i l'. Per tant, si ara desfem la inversió i tornem a la situació inicial, clarament AT és la tangent de l i t.

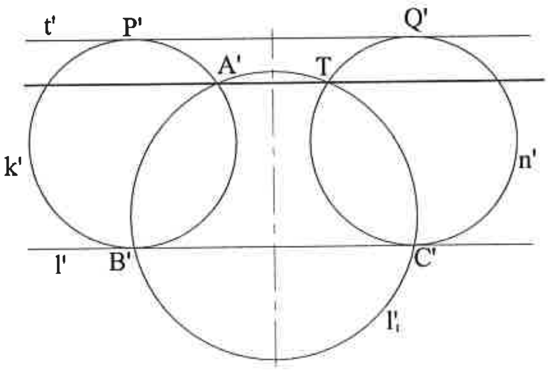


Figura 4.14: OBrM 1995-5

PROBLEMA* (OBrM 2000-1) Dos circumferències secants C_1 i C_2 tenen una tangent comuna que toca C_1 a P i C_2 a Q. Les dos circumferències s'intersecten en M i N, N es troba més aprop de PQ que M. La línia PN intersecta la circumferència C_2 en $R \neq P$. Provar que MQ divideix en dos parts iguals l'angle PMR.

Solució 1:
El nostre objectiu és provar que $\angle QMP = \angle QMR$.
Al ser QP tangent a C_1 i C_2:

$$\angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \angle NQP + \angle NPQ = 180 - \angle QNP = \angle QNR = \angle QMR$$

Solució 2:

Apliquem una inversió de centre M i raò arbitrària k, el que obtenim és el següent:

- C_1' i C_2' són dues rectes secants en N' que no passen per $M' = M$.
- La recta QP s'inverteix en una circumferència tangent a C_1' i C_2' en P' i Q'.
- La recta PN s'inverteix en la circumferència circumscrita al triangle $P'M'N'$ que talla C_2' en R'.

El nostre objectiu es provar que $\angle R'M'Q' = \angle Q'M'P'$

Posem $\angle Q'M'P' = \alpha$ i $\angle Q'R'M' = \beta$. Llavors, tenim que:

$$\angle R'M'Q' = 180 - (\beta) - (\angle R'Q'M') = (180 - \beta) - (180 - \angle N'Q'P' - \angle P'Q'M') =$$

$$= (180 - \beta) - (180 - \beta - \alpha) = \alpha$$

Hem arribat doncs, a que $\angle R'M'Q' = \angle Q'M'P'$.

PROBLEMA* (OBrM 2001 - 2) Una circumferència S és tangent interiorment a una altra T en A. Considerem un punt $P \neq A$ qualsevol de T. Les cordes PQ i PR són tangents a S en X i Y, respectivament. Provar que $\angle QAR = 2\angle XAY$.

Solució:

Considerem la inversió de centre A i una raò arbitrària k, el que obtenim és el següent:

- S i T s'inverteixen en S' i T' dues rectes paral·leles que no passen per $A' = A$.
- P' és un punt que pertany a T'. Les rectes PX i PY s'inverteixen en dues circumferències congruents tangents a S' en X' i Y', respectivament, que passen per P' i A' i que tallent T' per segona vegada en Q' i R'.

El nostre objectiu és provar que $\angle Q'A'R' = 2\angle X'A'Y'$.

Notem que els triangles $Q'P'X'$ i $P'Y'R'$ són isòsceles i iguals. A més, les rectes $Q'R'$ i $X'Y'$ són paralel·leles, per tant:

$$\angle Q'A'R' = \angle Q'A'P' + \angle R'A'P' = (\angle Q'A'X' + \angle X'A'P') + (\angle P'A'Y' + \angle P'A'R') =$$

$$= (\angle Q'P'X' + \angle Q'P'X') + (\angle P'R'Y' + \angle Y'P'R') = 2(\angle X'Q'P' + \angle P'R'Y') =$$

$$= 2(\angle X'A'P' + \angle P'A'Y') = 2\angle X'A'Y'$$

PROBLEMA* (OBrM 1994 - 4) Els punts P i Q es troben en una circumferència w, i P és un punt tal que PR i PQ són tangents a w. A és un punt en l'extensió del segment PQ, i y és la circumferència circumscrita al triangle PAR. La circumferència y talla w per segona vegada en B, i AR intersecta w en C. Provar que $\angle PAR = \angle ABC$.

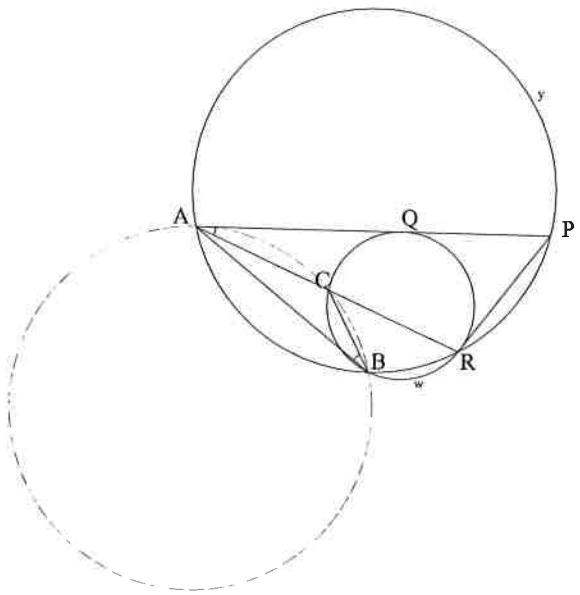


Figura 4.15: OBrM 1994-4 (1)

Solució:

Primer de tot, notem que si $\angle PAR = \angle ABC$, llavors la circumferència circumscrita al triangle AB és tangent a la recta que conté A, P i R en A. Provarem doncs que així és mitjançant una inversió de centre Q i una raò arbitrària k. El que obtenim és el següent:

- La recta que conté a A, P i Q es converteix en ella mateixa.

- La circumferència w, al ser tangent a la recta anterior en el centre d'inversió es converteix en la recta w', paral·lela a $A'P'$.

- La recta QR, no passa pel centre d'inversió i a més és tangent a w, per tant, s'inverteix en una circumferència que passa per $Q' = Q$ la qual és tangent a w' en R'.

- La circumferència y com que no passa pel centre d'inversió es converteix en una altra cirumferència y' que passa per A', P' i R'. El punt de tall de y' amb w' és B'.

- La recta AR no passa pel centre d'inversió, per tant s'inverteix en una circumferència que passa per A', R' i $Q' = Q$ i que talla w' en C'.

El nostre objectiu és doncs provar que la circumferència circumscrita al triangle $A'B'C'$ és tangent a la recta $A'P'$ en A'.

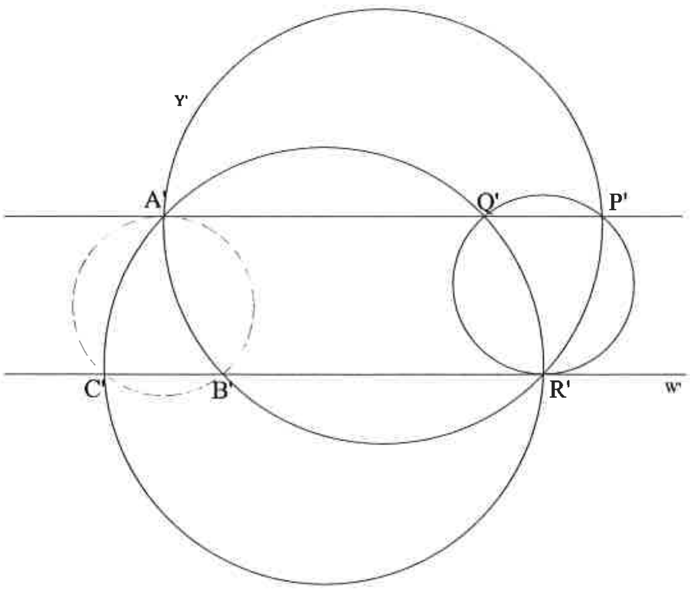


Figura 4.16: OBrM 1994-4 (2)

Notem que al ser $A'P'$ i $B'R'$ cordes paral·leles d'una mateixa circumferència, les rectes $A'B'$ i $P'R'$ són simètriques respecte la mediatriu de $A'R'$, que coincideix amb la mediatiu del segment $B'R'$. Però la circumferència circumscrita al triangle $P'R'Q'$ és tangent a w' en R', a més, la recta $P'Q'$ és a paral·lela a w' per tant la recta $Q'R'$ és la simètrica de $P'R'$ respecte la mediatriu del segment $P'Q'$, que és paral·lela a la mediatriu del segment $A'P'$. Per tant concloem que $A'B'$ és paral·lel a $Q'R'$.
Anàlogament $A'Q'$ i $C'R'$ són cordes paral·leles d'una mateixa circumferència, per tant les rectes $A'C'$ i $R'Q'$ són simètriques respecte la mediatriu de $A'Q'$ que coincideix amb la mediatriu del segment $C'R'$. Però tal com hem dit la recta $Q'R'$ és la simètrica de $P'R'$ respecte la mediatriu del segment $P'Q'$, que és paral·lela a la mediatriu del segment $A'Q'$, per tant $A'C'$ és paral·lel a $R'P'$.
Clarament doncs, els triangles $A'B'C'$ i $P'R'Q'$ són homotècics de raò -1, per tant, com que la circumferència circumscrita a $P'R'Q'$ és tangent a w' en R', la circumferència circumscrita al triangle $A'B'C'$ ho és a $A'P'$ en A', que és el que volíem provar.

PROBLEMA* (OBrM 1993-4) La circumferència w_1 és tangent interiorment a una altra w_2 en el punt M. P és un punt sobre w_1 i Q i R són els dos punts de tall amb w_2 de la tangent a w_1 en P. Demostrar que $\angle PMQ = \angle RMP$.

Solució:
Considerem una inversió de centre M i raò arbitrària k, el que obtenim és el següent:

- w_1' i w_2' són dues rectes paral·leles que no contenen $M' = M$.
- La recta tangent a w_1 en P s'inverteix en una circumferència que passa per $M' = M$, tangent a w_1' en P' i secant a w_2' en R' i Q'.

El nostre objectiu es provar que $\angle R'M'P' = \angle P'M'Q'$.
Notem que el triangle $R'P'Q'$ és isòscel·les, en concret, $R'P' = P'Q'$. D'aquí que P' sigui el punt mig de l'arc $R'P'$, concluim doncs que $M'P'$ és la bisectriu interior de l'angle $R'M'Q'$, cosa que prova que $\angle R'M'P' = \angle P'M'Q'$.

PROBLEMA* Considerem un triangle ABC. P i Q són els peus de les perpendiculars a la bisectriu interior de l'angle A baixades des de B i C. Si H és la perpendicular baixada a BC des de A i M el punt mig del costat BC, provar que els punts M, H, P i Q es troben en una circumferència.

Solució:
Siguin K i $L \neq A$ el punt d'intersecció de la bisectriu interior de l'angle A amb BC i la circumferència circumscrita al triangle ABC, respectivament.
La condició necessària i suficient per tal que els quatre putns M, H, P i Q es trobin en una circumferència és:

$$PK \cdot KQ = MK \cdot KH$$

Això és el que provarem. De moment, fixem-nos en els quatre triangle CKQ, MKL, KPB i KAH. Són tots semblants per tenir els tres angles iguals. D'aquí que:

$$\frac{MK}{KL} = \frac{KQ}{KC} \Rightarrow MK = \frac{KQ \cdot KL}{KC}$$

$$\frac{KH}{KA} = \frac{KP}{KB} \Rightarrow KH = \frac{KP \cdot KA}{KB}$$

Multiplicant aquestes dues expressions:

$$MK \cdot KH = \frac{KQ \cdot KL \cdot KP \cdot KA}{KC \cdot KB}$$

Finalment tenint en compte que $AK \cdot KL = CK \cdot KB$, arribem al resultat desitjat:

$$MK \cdot KH = \frac{KQ \cdot KL \cdot KP \cdot KA}{KC \cdot KB} = KP \cdot KQ$$

4.5 Identitats trigonomètriques importants.

4.5.1 Teoremes i conceptes

Fórmules addició.

Per a qualsevol α i β reals, tenim que:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmules suma-producte.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Fórmula conseqüència de la fórmula de Moivre.

$$\cos n\alpha = \binom{n}{0}\cos^n\alpha - \binom{n}{2}cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha\ldots$$
$$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha\ldots$$

Fórmules angle meitat.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ ; \ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ ; \ \tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$$

Altres fórmules.
Posant $x = \tan\frac{\theta}{2}$, llavors:

$$\sin\theta = \frac{2x}{x^2+1} \ ; \ \cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Capítol 5

Àlgebra

5.1 Equacions i polinomis

5.1.1 Teoremes i conceptes

TEOREMA. Solucions de l'equació quadràtica.

Les solucions de qualsevol equació quadràtica del tipus $ax^2 + bx + c = 0$, venen donada per la fórmula següent:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El valor del discriminant $D = b^2 - 4ac$, determina el nombre de solucions, en concret, si $D > 0$ l'equació té dues solucions reals, si $D = 0$ té una solució real i si $D < 0$ té dues solucions complexes.

DEFINICIÓ. Nombres combinatòrics.

Per a $n, r \in N$ i $0 \leq r \leq n$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

DEFINICIÓ. El binomi de Newton.

Per a $n, \in N$ i $x, y \in R$:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

TEOREMA. Teorema de Bezout.

Un polinomi $P(x)$ és divisible per $(x - a)$ si i només si $P(a) = 0$.

DEFINICIÓ. Polinomis simètrics i polinomis simètrics elementals.

- Un polinomi simètric $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables, és tal que si intercanviem les variables, el polinomi segueix sent el mateix.
-Els polinomis simètrics elementals són de la forma $\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$.

FÓRMULA. Fòrmules Cardano-Vieta.

Siguin α_i, δ i c_i nombres complexos tals que $P(x) = \delta(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = c_0x^n + c_1x^{n-1}\cdots c_n$. Llavors:

$$\frac{c_k}{c_0} = (-1)^k\sigma_k(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

TEOREMA. Teorema de les arrels racionals.

Si $x = \dfrac{p}{q}$, amb $\gcd(p,q) = 1$, és una arrel del polinomi $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, llavors $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

TEOREMA. Teorema Eisenstein (Extensió).

Sigui $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomi de coeficients enters. Si existeix un nombre primer p i un nombre k, amb $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ tals que $p \mid a_0, a_1, \cdots, a_k$ i $p^2 \nmid a_0, a_{k+1}$, llavors existeix un factor irreductible $Q(x)$ de $P(x)$ de grau al menys k.

TEOREMA. Identitats polinòmiques

$$x^{m\cdot n} - y^{m\cdot n} = (x^m - y^m)((x^m)^{n-1} + (x^m)^{n-2}(y^m) + (x^m)^{n-3}(y^m)^2 + \ldots + (x^m)(y^m)^{n-2} + (y^m)^{n-1})$$

$$x^{m\cdot(2n+1)} + y^{m\cdot(2n+1)} = (x^m + y^m)((x^m)^{2n+1} - (x^m)^{2n}(y^m) + \ldots - (x^m)(y^m)^{2n} + (y^m)^{2n+1})$$

5.1.2 Exercicis i problemes

PROBLEMA (OMC 1965-5) Si fem $s = x + y$ i $p = xy$, expressar $(x-y)^4$ com a polinomi en s i p.

Solució:
Tenim que $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x+y)^2 - 4xy = s^2 - 4p$. Finalment, $(x-y)^4 = ((x-y)^2)^2 = (s^2-4p)^2 = s^4 - 8ps^2 + 16p^2$.

PROBLEMA* (OME 1999-1) Donats els polinomis:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

trobar les condicions que han de complir els paràmetres reals a, b i c, amb $a \neq c$ per tal que $P(x)$ i $Q(x)$ tinguin dos arrels comunes, i resoldre després en aquest cas les equacions $P(x) = 0$ i $Q(x) = 0$.

Solució:
Suposem que α és una de les arrels comunes als dos polinomis, llavors, $P(\alpha) = Q(\alpha)$, o el que és el mateix:

$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + 1 = \alpha^4 + c\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 \Rightarrow \alpha(a-c)(\alpha^2-1) = 0$$

Per una banda, se'ns imposa a l'enunciat que $a \neq c$, per tant podem dividir l'expressió per $(a-c)$. A més $\alpha \neq 0$, ja que $P(0) = Q(0) = 1 \neq 0$, per tant també podem dividir per α obtenint així:

$$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Així doncs, les dos arrels comunes a $P(x)$ i $Q(x)$ són ± 1. Però no oblidem que a l'enunciat se'ns demana la condició que han de complir els paràmetres reals a, b i c perquè així sigui, per tant, s'ha d'imposar:

$$P(1) = Q(1) = 1 + a + b + c + 1 = a + b + c + 2 = 0$$
$$P(-1) = Q(-1) = 1 - a + b - c + 1 = -a + b - c + 2 = 0$$

Sumant les dues equacions obtenim:

$$b = -2 \Rightarrow a = -c$$

Acabem de resoldre doncs la primera qüestió del problema. Queda ara determinar les altres dos arrels de cada un dels polinomis. Substituint els valors obtinguts de a, b i c, els polinomis queden:

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1 = (x^2-1)(x^2+ax-1)$$

$$Q(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1 = (x^2-1)(x^2-ax-1)$$

Dividint els dos polinomis per (x^2-1):

$$x^2 + ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$$
$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$$

Finalment, les arrels de $P(x)$ són:

$$x_{p(x)} = \pm 1, \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$$

Les arrels de $Q(x)$ són:

$$x_{q(x)} = \pm 1, \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$$

PROBLEMA* (OME (Fase Local) 1999-6) Se sap que el polinomi $x^3 - x + k$ té tres arrels enteres. Determinar el valor de k.

Solució 1:
Utilitzant les fórmules de Cardano-Vieta obtenim que, si α_1, α_2 i α_3 són arrels del polinomi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = -1 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -k \end{cases}$$

És a dir,

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 = 0 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1) = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-2 \Rightarrow \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 2$$

Calarament doncs una de les arrels ha de ser necesàriament 0. Obtenim llavors que $k = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$.

Solució 2:
Siguin α_1, α_2, α_3 les tres arrels del polinomi, llavors tenim que

$$k = \alpha_1(1-\alpha_1)(1+\alpha_1) = \alpha_2(1-\alpha_2)(1+\alpha_2) = \alpha_3(1-\alpha_3)(1+\alpha_3)$$

És a dir:

$$\alpha_1 - \alpha_1^3 = \alpha_2 - \alpha_2^3 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - 1) = 0$$

Per tant o $\alpha_1 = \alpha_2$ o $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 1$.
En el primer cas, substituint $\alpha_1 = \alpha_2$ en les equacions de Cardano obtenim

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \cdot (-2\alpha_1) = 5\alpha_1^2 = 1$$

però llavors α_1 no és un enter.
En el segon cas, $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 1$, suposem sense pèrdua de generalitat que $\alpha_1 < \alpha_2$, llavors:

$$1 = \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 > 3\alpha_1^2$$

Obtenim que α_1 és necessàriament igual a zero. Per tant $k = 0$.

PROBLEMA* Siguin a, b i c les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$. Trobeu el valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

Solució:
Notem que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) =$$
$$= ((a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca))^2 - 2((ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c))$$

Si escrivim les fòrmules de Cardano el que tenim és:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=1 \\ abc=-5 \end{cases}$$

Substituint aquests valors a la primera equació podem calcular el valor de $a^4+b^4+c^4$:

$$a^4+b^4+c^4=((a+b+c)^2-2(ab+bc+ca))^2-2((ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c))=$$

$$=((2)^2-2(1))^2-2((1)^2-2(-5)(2))=-38$$

PROBLEMA* Si les arrels del polinomi x^3+ax^2+bx+c estan

a. en progressió aritmètica, demostreu que $2a^2-9ab+27c=0$
b. en progressió gemomètrica, demostreu que $a^3c=b^3$.
Solució:
Comencem amb l'apart a. D'acord amb les fórmules de Cardano, si $x-d$, x i $x+d$ són les tres arrels, que com podem veure estan en progressió aritmètica de diferència d, llavors:

$$\begin{cases} x+x+d+x-d=3x=-a \\ x(x+d)+x(x-d)+(x+d)(x-d)=3x^2-d^2=b \\ x(x-d)(x+d)=x^3-xd^2=-c \end{cases}$$

Substituint els valors de a, b i c a la identitat que hem de demostrar:

$$2a^2-9ab+27c=2(-27x^3)-9(-3x)(3x^2-d^2)+27(-x^3+xd^2)=27x^3(-2+3-1)+d^2(-27x+27x)=0$$

Així doncs, l'aparta a queda demostrat.

Pel que fa a l'apartat b. D'acord amb les fórmules de Cardano, si $\frac{x}{r}$, x i xr són les tres arrels, que com podem veure estan en progressió geomètrica de raò r, llavors:

$$\begin{cases} \frac{x}{r}+x+xr=\frac{x(1+r+r^2)}{r}=-a \\ \frac{x\cdot x}{r}+x\cdot xr+\frac{x}{r}\cdot xr=\frac{x^2(1+r+r^2)}{r}=b \\ x\frac{x}{r}\cdot xr=x^3=-c \end{cases}$$

Substituint els valors de a, b i c a la identitat que hem de demostrar:

$$\frac{a^3c}{b^3}=\frac{-\frac{x^3(1+r+r^2)^3}{r^3}\cdot -x^3}{\frac{x^6(1+r+r^2)^3}{r^3}}=1$$

Concloem doncs que $a^3c=b^3$. Així doncs l'apartat b queda demostrat.

PROBLEMA* (OMC 1967 - 5) Demostrar que el polinomi $p(x) = x^{31} - x^{30} + ... + x - 1$ és divisible per $q(x) = x^{16} + 1$. Trobar el polinomi quocient sense fer la divisió, demostreu que aquest quocient és divisible per un binomi anàleg al $q(x)$, i determineu-lo. Repetint el procés les vegades que calgui demostreu que $p(x)$ té només una arrel real.

Solució:
Per demostrar que $q(x)$ divideix a $p(x)$ només cal veure que:

$$p(x) = x^{31} - x^{30} + ... + x - 1 = (x^{31} + x^{15}) - (x^{30} + x^{14}) + ... - (x^{16} + 1) =$$
$$= x^{15}(1 + x^6) - x^{14}(1 + x^6) + ... - (x^{16} + 1) = (x^{16} + 1)(x^{15} - x^{14} + ... - 1)$$

Analitzem ara el quocient obtingut, $(x^{15} - x^{14} + ... - 1)$, és fàcil veure que $x^8 + 1$ el divideix:

$$x^{15} - x^{14} + ... - 1 = x^{15} + x^7 - (x^{14} + x^6) + ... - (x^8 + 1) =$$
$$= x^7(x^8 + 1) - x^6(x^8 + 1) + ... - (x^8 + 1) = (x^8 + 1)(x^7 - x^6 + ... - 1)$$

Aplicant el mateix procediment successivament obtenim:

$$p(x) = x^{31} - x^{30} + ... + x - 1 = (x^{16} + 1)(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x - 1)$$

Finalment doncs, com que l'equació $x^{2k} = -1$ no té solució en els reals, concloem que l'única arrel real de $p(x)$ és $x = 1$.

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2004- 2) Considerem els polinomis $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$; $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x és la variable, A, B, C són paràmetres). Suposem que, si a, b, c són les tres arrels de P, les de Q són $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$. Determinar tots els possibles polinomis P, Q.

Solució:
Comencem aplicant les fórmules de Cardano al polinomi P:

$$A = -(a + b + c) \ (1)$$
$$B = b(a + c) + ac \ (2)$$
$$C = -abc \ (3)$$

Fent el mateix amb el polinomi Q:

$$\frac{2A}{3} = -(b + \frac{a+c}{2}) \ (1')$$
$$\frac{B}{3} = \frac{(a+b)(b+c)}{4} = \frac{b^2 + b(a+c) + ac}{4} \ (2')$$

Substituint el valor de A de (1) en (1') obtenim:

$$2b = a + c \Rightarrow A = -3b$$

Substituint el valor de B de (2) en (2') obtenim:

$$B = 3b^2$$

Substituim ara $a + c = 2b$ i $B = 3b^2$ en (2):

$$b^2 = ac$$

Així doncs, resolent el sistema:

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ b^2 = ac \end{cases}$$

Obtenim que $a = b = c = \lambda$, per a λ un real.
Finalment, els polinomis P i Q són doncs de la forma:

$$P(x) = x^3 - 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^3; Q(x) = 3x^2 - 6\lambda x + 3\lambda^2$$

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2005-1) Siguin x_1, x_2 les arrels del polinomi $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, sent m un nombre real. Provar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

Solució:
La condició necessària i suficient per tal que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$ és que:

$$3x_1^6+3mx_1^3+m^2-1 = 3x_2^6+3mx_2^3+m^2-1 \Rightarrow 3(x_1^6-x_2^6)+3m(x_1^3-x_2^3) = 3(x_1^3-x_2^3)(x_1^3+x_2^3+m) = 0$$

Utilitzem ara les fórmules de Cardano, aquestes ens diuen que:

$$x_1 + x_2 = -m$$
$$x_1 x_2 = \frac{m^2 - 1}{3}$$

Per tant,

$$(x_1+x_2)^3 = -m^3 = x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2) = x_1^3+x_2^3+3(-m)\frac{m^2-1}{3} = x_1^3+x_2^3-m^3+m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + m = 0$$

Efectivament doncs, com que $x_1^3 + x_2^3 + m = 0$, llavors $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2006-5) Un nombre positiu x verifica la relació

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

és un enter y calcular el seu valor.
Solució:
Primer de tot observem que

$$(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

Així doncs:

$$(x+\frac{1}{x})^5 = 3^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 243 - 5(x^3 + \frac{1}{x^3}) - 10(x + \frac{1}{x}) = 213 - 5(x^3 + \frac{1}{x^3})$$

Necessitem doncs calcular el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$:

$$(x+\frac{1}{x})^3 = 27 = x^3 + 3(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Finalment:

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 213 - 90 = 123$$

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2006-4) Calcular els nombre p i q tals que les arrels de l'equació són

$$x^2 + px + q = 0$$

siguin D y $1 - D$, sent D el discriminant d'aquesta equació de segon grau.
Solució:
Aplicant les fórmules de Cardano a l'equació de l'enunciat obtenim:

$$D + (1 - D) = 1 = -p$$

$$D(1 - D) = q \text{ (*)}$$

Per tant $p = -1$. D'aquí que $D = 1 - 4q$, substituint en (*) s'obtè:

$$(1 - 4q)(1 - (1 - 4q)) = 4q(1 - 4q) = q$$

Una possibilitat és doncs: $q = 0$, l'altra s'obtè resolent l'equació:

$$4(1 - 4q) = 1 \Rightarrow q = \frac{3}{8}$$

Finalment, els possibles valors de p i q són doncs: $(p, q) = (-1, 0), (-1, \frac{3}{8})$.

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2006-1) Els nombres reals no nuls a i b verifiquen la igualtat

$$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$$

Trobar, raonadament, tots els valors que pot prendre l'expressió

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

Solució:
Desenvolupant la primera expressió obtenim:

$$a^2b^2=a^4-2b^4\Rightarrow 2b^4=a^2(a^2-b^2)\Rightarrow a^2-b^2=\frac{2b^4}{a^2}$$

Substituint el valor de a^2-b^2 a la segona expressió de l'enunciat obtenim:

$$\frac{2b^4}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{2b^4}{a^4+a^2b^2}\ (1)$$

Tornant a la primera expressió de l'enunciat, $a^4+a^2b^2=2b^2(a^2+b^2)$. Substituint-ho en (1) obtenim:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{2b^4}{2b^2(a^2+b^2)}=\frac{b^2}{(a^2+b^2)}\Rightarrow\Rightarrow a^2-b^2=b^2\Rightarrow a^2=2b^2$$

Finalment doncs:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2}{2b^2+b^2}=\frac{1}{3}$$

PROBLEMA* (OME (Fase local) 2006-5) Trobar totes les solucions reals del sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=7 \\ x^2y+xy^2=-2 \end{array}\right.$$

Solució:
Posem $x+y=p$ i $xy=s$, llavors el sistema a resoldre queda:

$$\left\{\begin{array}{l} p^2-3s=7 \\ ps=-2 \end{array}\right.$$

De la segona equació tenim que $s=-\dfrac{2}{p}$, substituint això a la primera equació obtenim:

$$p^2+\frac{6}{p}=7\Rightarrow p^3-7p+6=p(p^2-1)-6(p-1)=(p-1)(p^2+p-6)=(p-1)(p-2)(p+3)=0$$

Per una banda doncs els possibles valors de p són $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = -3$. D'aquesta manera substituint aquests valors a l'equació $s = -\frac{2}{p}$ obtenim els possibles valors de s que són: $s_1 = -2$, $s_2 = -1$, $s_3 = \frac{2}{3}$.
Considerem ara el següent sistema:

$$\begin{cases} p = x + y \\ s = xy \end{cases}$$

Substituint a s i p els valors $(s,p) = (1,-2),(2,-1),(-3,\frac{2}{3})$ i resolent el sistema format obtenim els possibles valors de x i y:

$$(x,y) = (-1,2),(2,-1),(1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}),(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}),$$
$$(\frac{-9+\sqrt{57}}{6},\frac{-9-\sqrt{57}}{6}),(\frac{-9-\sqrt{57}}{6},\frac{-9+\sqrt{57}}{6})$$

PROBLEMA* Provar la següent identitat:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Solució:
Procedirem per inducció sobre n:
- Comencem provant el cas per a $n = 1$. En efecte:

$$\binom{1}{1} = 1 \ ; \ 1 \cdot 2^{1-1} = 1$$

- Suposem ara que per a un cert n la identitat de l'enunciat es compleix:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

- Queda provar que llavors, per a $n+1$ també es complirà:

$$\sum_{r=1}^{n+1} r\binom{n+1}{r} = (n+1)\binom{n+1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} r\binom{n+1}{r} = n+1+\sum_{r=1}^{n} r\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\right) =$$

$$= n+1+\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} + \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r-1} = n+1+n2^{n-1}+\sum_{r=1}^{n}\left((r-1)\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-1}\right) =$$

$$= n+1+n2^{n-1}+\sum_{r=1}^{n}(r-1)\binom{n}{r-1}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1} = n+1+n2^{n-1}+n2^{n-1}-n\binom{n}{n}+2^n-\binom{n}{n} =$$

$$= n2^n + 2^n + n + 1 + -n - 1 = (n+1)2^n$$

PROBLEMA* Demostrar que el polinomi $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ no té arrels negatives.

Solució:
Sigui $P(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$. El problema es equivalent a provar que $P(-x) > 0$ per tot $x \geq 0$. En efecte:

$$P(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^3 - 4(-x)^2 - 7(-x) + 4 = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x + 4 =$$

$$= x^4 + x^3 + 4x^3 - 4x^2 + x + 6x + 4 = x^4 + x^3 + x(2x-1)^2 + 6x + 4 > 0 \ ; \forall x \geq 0$$

PROBLEMA* (OME 1999-6) Siguin a, b i c nombres reals. Provar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

Llavors també:

$$\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}$$

Solució:
Desenvolupant la primera expressió de l'enunciat obtenim:

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc \Rightarrow 3abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) = (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Per tant almenys o $a = -b$, $b = -c$ o $c = -a$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $c = -a$, llavors la expressió a provar de l'enunciat esdevè:

$$\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{-a^{1999}} = \frac{1}{b^{1999}}$$

$$\frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} - a^{1999}} = \frac{1}{b^{1999}}$$

Concloem doncs que:

$$\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}$$

PROBLEMA* El producte de dues de les quatre arrels de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

és -32. Determineu k.
Solució:

Siguin α_1, α_2, α_3 i α_4 les arrels del polinomi de l'enunciat. Segons l'enunciat tenim que $\alpha_1\alpha_2 = -32$. A més, utilitzant les fórmules de Cardano:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 18 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 = k \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -200 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -1984 \end{cases}$$

De l'última igualtat, tenint en compte que $\alpha_1\alpha_2 = -32$, obtenim que $\alpha_3\alpha_4 = 62$. D'altra banda, la tercera equació es pot reescriure d'aquesta manera:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_3\alpha_4(\alpha_1+\alpha_2) =$$
$$= -32(\alpha_3+\alpha_4)+62(\alpha_1+\alpha_2) = -200 \ (*)$$

Tenint en compte la primera equació substituïnt el valor de $\alpha_3+\alpha_4$ en (*):

$$-32(\alpha_3+\alpha_4)+62(\alpha_1+\alpha_2) = -32(-18-(\alpha_1+\alpha_2))+62(\alpha_1+\alpha_2) = -200 \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2 = -\frac{776}{30} = -\frac{388}{15}$$

Per tant, $\alpha_1+\alpha_2 = -\frac{388}{15}$, $\alpha_3+\alpha_4 = \frac{118}{15}$. Substituint aquestes dades a la segona equació podem trobar el valor de k:

$$k = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 =$$
$$= (\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)+(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) = (-32+62)+\left(-\frac{388}{15}\right)\left(\frac{118}{15}\right) = -\frac{45334}{15}$$

PROBLEMA* Siguin a_1, a_2, ... ,a_n nombres enters. Demostrar que el polinomi $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1$ és irreductible.

Solució:
Suposem el contrari, és a dir que $p(x) = q(x)\cdot r(x)$ per a q i r polinomis no constants. Primer de tot observem doncs que $\deg q(x), \deg r(x) < \deg p(x) = n$[1].
A més tenim que $p(a_i) = q(a_i)\cdot q(a_i) = -1$. Per tant o bé $q(a_i) = -1$ i $r(a_i) = 1$ o $q(a_i) = 1$ i $r(a_i) = -1$. En tots dos casos $q(a_i)+r(a_i) = 0$. Considerem doncs el polinomi $s(x) = q(x)+r(x)$, s té n zeros. Apart $\deg s(x) \leq \max\{\deg q(x), \deg r(x)\} < n$. Hem arribat doncs a una contradicció.

PROBLEMA* (OCanM 1997-1) Si α, β i γ són les arrels del polinomi $P(x) = x^3-x-1$, calcular el valor de

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

Solució:

[1]La utilització de la notació $\deg p(x)$ ens indica el grau del polinomi $p(x)$. Així, per exemple, si $p(x) = x^7-5x^3+1$ és clar que $\deg p(x) = 7$.
És fàcil provar que $\deg(p(x)+q(x)) = \max(\deg p(x), \deg q(x))$ així com $\deg(p(x)\cdot q(x)) = \deg p(x)+\deg q(x)$.

Operant i tenint en compte les relacions de Cardanno:

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=3-2\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)=$$

$$=3-2\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\right)=3-2\left(\frac{-0+2(-1)-3(-1)}{-P(-1)}\right)=1$$

PROBLEMA Sigui p un nombre primer, demostrar que el polinomi $\Phi_p(x) = x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1$ és irreductible.**

Solució:
Fem la substitució de x per $x+1$:

$$\Phi_p(x+1)=(x+1)^{p-1}+(x+1)^{p-2}+...+(x+1)+1=$$
$$=\frac{(x+1)^p-1}{x}=x^{p-1}+\binom{p}{p-1}x^{p-2}+...+\binom{p}{1}x+p$$

Observem doncs que $p \mid a_0 = p$, $p \mid a_1 = \binom{p}{1}$, ... , $p \mid a_{p-1} = \binom{p}{p-1}$, però p no divideix a $a_p = 1$ ni tampoc p^2 divideix a $a_0 = p$. Aplicant doncs l'extensió del teorema d'Einsenstein, trobem a què $\Phi_p(x+1)$ és irreductible. Així doncs també ho és $\Phi_p(x)$[2].

PROBLEMA (OBM 2000-1) Si x i y són reals positius tals que:**

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$$

provar que $x+y=10$.
Solució:
Manipulant l'expressió inicial:

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2x^3+2y^3+3xy(x+y+10)=2(x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy(x+y+10)=$$
$$=2(x+y)((x+y)^2-3xy)+3xy(x+y+10)=2(x+y)^3+3xy(x+y-2(x+y)+10)=$$
$$=2(x+y)^3+3xy(10-(x+y))=2000$$

Podem comprovar que efectivament quan $x+y=10$ la igualtat anterior es compleix. Això ens permet pensar que podrem factoritzar l'expressió anterior:

$$2(x+y)^3-2000+3xy(10-(x+y))=2((x+y)^3-10^3)+3xy(10-(x+y))=$$
$$=2(x+y-10)((x+y)^2+10(x+y)+10^2)+3xy(10-(x+y))=$$
$$=(x+y-10)(2x^2+4xy+2y^2+10x+10y+100-3xy)=$$
$$=(x+y-10)(2x^2+xy+2y^2+10x+10y+100)=0$$

De l'última igualtat en deduïm que o bé $x+y-10=0$, d'on $x+y=10$, o bé $2x^2+xy+2y^2+10x+10y+100=0$ que és impossible al ser x i y reals positius.

[2] Els polinomis $\Phi_p(x)$ són els anomenats polinomis ciclotòmics. Per trobar-ne més informació consulteu per exemple http://reflections.awesomemath.org/2008_2/cyclotomic.pdf

PROBLEMA (TST Perú 2007-1) Sigui $P(x)$ un polinomi de coeficients enters. Provar que per tot enter positiu k existeix un enter positiu N tal que k divideix a:**

$$P(1)+P(2)+...+P(N)$$

Solució:
Tenint en compte la coneguda propietat dels polinomis de coeficients enters que ens diu que per a enters positius a i b i un polinomi de coeficients enters, $a-b \mid f(a)-f(b)$ arrivem a què:

$$P(n+k(k-1)) \equiv P(n+k(k-2)) \equiv ... \equiv P(n+k) \equiv P(n) \bmod k$$

Per tant, prenent $N=k^2$:

$$P(1)+P(2)+...+P(k^2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-1}P(i+jk) \equiv \sum_{i=1}^{k}kP(i) \equiv 0 \bmod k$$

Queda doncs l'enunciat provat.

PROBLEMA (IBERO 1992-2) Siguin $a_1<a_2<...<a_n$ reals positius. Definim $f(x)$ com:**

$$f(x)=\frac{a_1}{x+a_1}+\frac{a_2}{x+a_2}+...+\frac{a_n}{x+a_n}$$

Determinar la unió de tots els intervals tals que $f(x)>1$.
Solució:
Provarem que la resposta a l'enunciat és $\sum_{i=1}^{n}a_i$.
Primer de tot, observem que $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, on $P(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{j\neq i}(x+a_j)$ i $Q(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)$.
Si considerem el polinomi $g(x)=P(x)-Q(x)$, les n arrels d'aquest són els valors de r_i tals que $f(r_i)=1$. Com que $\lim_{x\to -a_i^-}f(x)=\infty$ i $\lim_{x\to -a_i^+}f(x)=-\infty$, $-a_n<r_n<-a_{n-1}<...<-a_1<r_1$. És fàcil veure doncs que $f(x)>1$ per tot x tal que $x\in[-a_i,r_i)$. Així, el valor que ens demanen buscar a l'enunciat serà $(r_n-(-a_n))+...+(r_1-(-a_1))=r_n+r_{n-1}+...+a_n+...+a_1$. Provarem que $\sum_{i=1}^{n}r_i=0$, d'on se'n desprén la conclusió.
D'acord amb el que hem dit anteriorment, r_i són les arrels de $g(x)=P(x)-Q(x)$. Així doncs, el valor de $\sum_{i=1}^{n}r_i$ coincideix amb el coeficient canviat de signe de x^{n-1} en $g(x)$ dividit pel coeficient principal. Però $g(x)=-x^n+x^{n-1}(a_1+a_2+...+a_n-(a_1+a_2+...+a_n))+...=-x^n+x^{n-1}(0)+....$ Per tant $\sum_{i=1}^{n}r_i=0$ i l'enunciat queda provat.

5.2 Desigualtats

5.2.1 Teoremes i conceptes

Desigualtats entre mitjanes

Primer de tot definim els diferents tipus de mitjanes de n nombres reals positius a_1, a_2, ..., a_n:

Mitjana quadràtica: $MQ = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$

Mitjana aritmètica: $MA = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

Mitjana geomètrica: $MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

Mitjana harmònica $MH = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$

La desigualtat entre mitjanes estableix el següent:

$$\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \geq MQ \geq MA \geq MG \geq MH \geq \min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz

La desigualtat de Cauchy estableix que el quadrat del producte escalar de dos vectors a, b no excedeix al producte dels quadrats dels seus mòduls:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |a|^2 \cdot |b|^2$$

Així, considerant $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dos vectors n-dimensionals s'obtè:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Compliment-se la igualtat quan els vectors són linialment dependents, és a dir quan $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Desigualtat de Jensen

Denotarem per I i I' els intervals $[a, b]$ i (a, b), respectivament, amb $a, b \in R$. Per tal d'entendre en què consisteix aquesta desigualtat donarem abans uns conceptes previs:

Funció convexa en un interval I:

Direm que una funció f és convexa en un interval I si i només si per a $x, y \in I$ i $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Equivalentment, si f és una funció contínua en l'interval I i doble diferenciable en I', llavors direm que f és convexa si i només si $f''(x) \geq 0$ per tot $x \in I$.

Funció còncava en un interval I:

Direm que una funció f és còncava en un interval I si i només si per a $x, y \in I$ i $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Equivalentment, si f és una funció contínua en l'interval I i doble diferenciable en I', llavors direm que f és còncava si i només si $f''(x) \leq 0$ per tot $x \in I$.

Desigualtat de Jensen

Sigui $f : I \longrightarrow R$ una funció convexa i w_1, w_2, ..., w_n n reals positius, llavors:

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + ... + w_n f(x_n) \geq (w_1 + w_2 + ... + w_n) f\left(\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}\right)$$

Si la funció f és còncava, llavors el signe de la desigualtat s'inverteix.

Desigualtat de Schur

Per a a, b, c reals positius i r un real qualsevol:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Desigualtat del reordenament

Sigui $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ dues seqüències de nombres reals positius. La desigualtat del reordenament estableix:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \geq a_{\pi(1)} b_{\pi'(1)} + a_{\pi(2)} b_{\pi'(2)} + ... + a_{\pi(n)} b_{\pi'(n)} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$$

on $a_{\pi(i)}$ i $b_{\pi'(i)}$ són permutacions de a_i i b_i, respectivament.

5.2.2 Exercicis i problemes.

PROBLEMA Provar que per a nombres reals a, b i c:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a+b+c)^2$$

Solució 1:
Desenvolupant i agrupant termes:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

La igualtat es produeix quan $a = b = c$.
Solució 2:
Aplicant la desigualtat $MQ \geq MA$ el resultat és immediat:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a+b+c)^2$$

La igualtat s'obtè quan $a = b = c$.

PROBLEMA* (MOP 2001-1) Provar que per a a, b, c, reals positius:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Solució:
Operant i simplificant obtenim:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$$

Dividint entre abc la desigualtat a provar esdevé òbvia:

$$\frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{abc} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \cdot 3 = 6$$

La igualtat es produeix quan $a = b = c$.

PROBLEMA* Determinar les solucions reals x, y, z de l'equació següent:

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

Solució:
Tenint en compte que el recorregut de la funció $f(x) = x^r$, per a $r \in R$, són els reals positius, podem aplicar la desigualtat AM-GM obtenint d'aquesta manera:

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} = \sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3}} =$$
$$= \sqrt[3]{3^{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}}$$

Observem que $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0$, per tant:

$$1 = 3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} \geq \sqrt[3]{3^0} = 1$$

Concloem doncs, que $x = y = z = 1$ és la única solució real a l'equació.

PROBLEMA* (OBrM 2002-3) Siguin x, y i z reals positius tals que $x^2+y^2+z^2=1$. Provar que

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$$

Solució:
Primer de tot, aplicant la desigualtat $MA - MG$ tenim que:

$$\frac{1}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq (xyz)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

Aplicant ara Cauchy:

$$xyz^2 + xy^2z + x^2yz \leq (x^2+y^2+z^2)^2(3x^2y^2z^2)^2 = (3x^2y^2z^2)^2 \leq 9\frac{1}{3^3} = \frac{1}{3}$$

La igualtat es produeix quan $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROBLEMA* (OME 1987-2) Provar que per a tot natural $n > 1$:

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2\sqrt{\binom{n}{2}} + ... + n\sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}$$

Solució:
Comencem analitzant els primers casos:
Per a $n = 2$:

$$1\sqrt{\binom{2}{1}} + 2\sqrt{\binom{2}{2}} = \sqrt{2} + 2$$

$$\sqrt{2^{2-1} \cdot 2^3} = 4$$

Clarament $2 + \sqrt{2} < 4$
Per a $n = 3$:

$$1\sqrt{\binom{3}{1}} + 2\sqrt{\binom{3}{2}} + 3\sqrt{\binom{3}{3}} = 3\sqrt{3} + 3$$

$$\sqrt{2^{3-1} \cdot 3^3} = 6\sqrt{3}$$

Clarament $3\sqrt{3} + 3 < 6\sqrt{3}$.
Utilitzant ara la desigualtat de Cauchy per als vectors $u = (1, 2, ..., n)$ i $v = (\sqrt{\binom{n}{1}}, \sqrt{\binom{n}{2}}, ..., \sqrt{\binom{n}{n}})$ obtenim:

$$1\cdot\sqrt{\binom{n}{1}}+2\sqrt{\binom{n}{2}}+...+n\sqrt{\binom{n}{n}}\leq\sqrt{(1^2+2^2+...+n^2)(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n})}=$$

$$=\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot 2^n}=\sqrt{2^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}$$

Ens queda doncs provar que per tot $n \geq 3$:

$$\sqrt{2^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}<\sqrt{2^{n-1}n^3}$$

Operant i simplificant la desigualtat a provar és equivalent a:

$$3n^2 > 2n^2+3n+1 \Rightarrow n^2-3n-1=(n-1)(n-2)>3$$

Efectivament, per a $n \geq 4$, $(n-1)(n-2) \geq 3\cdot 2 = 6 > 3$. Per tant l'enunciat queda provat.

PROBLEMA* (Olimpíada de Belarus, quarta ronda - 4) Siguin a, b i c reals positius tals que $a^2+b^2+c^2=3$. Provar que:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

Solució:
Aplicant la desigualtat $AM-HM$ obtenim:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}$$

Finalment, tenint en compte que $3=a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

PROBLEMA* Olimpíada Matemàtica del Riu de la Plata 2002-4. Provar que per a reals positius a, b i c:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq\frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Solució:
Primer de tot, utilitzant Cauchy:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\Leftrightarrow\frac{9}{a+b+c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

D'aquesta manera, la desigualtat a provar esdevè:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

I ara agrupant els termes a l'esquerra obtenim:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(b-a)+(c-a)}{a^2}+\frac{(a-b)+(c-b)}{b^2}+\frac{(a-c)+(b-c)}{c^2}=$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}+\frac{(b-c)^2(b+c)}{b^2c^2}+\frac{(c-a)^2(c+a)}{c^2a^2}$$

PROBLEMA* (Titu Andreescu) Provar que per a a, b, c, reals positius:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

Solució:
Posant $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$ i $z=\frac{c}{a}$ la desigualtat a provar esdevè:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

Multiplicant per dos i agrupant termes s'obtè el resultat:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$$

La igualtat es produeix quan $x=y=z$.

PROBLEMA* Siguin a_1, a_2, a_3, ..., a_n nombres reals positius. Provar que

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+...+\frac{a_n^3}{a_1}\geq a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

Solució:
Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_n$, d'aquesta manera tenim que $a_1^3\geq a_2^3\geq ...\geq a_n^3$ i $\frac{1}{a_n}\geq ...\geq\frac{1}{a_1}$. Per tant aplicant el teorema del reordenament:

$$a_1^3\cdot\frac{1}{a_2}+a_2^3\cdot\frac{1}{a_3}+...+a_n^3\cdot\frac{1}{a_1}\geq a_1^3\cdot\frac{1}{a_1}+a_2^3\cdot\frac{1}{a_2}+...+a_n^3\cdot\frac{1}{a_n}=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

PROBLEMA (OME 2008 2-4) Determinar quin dels dos nombres, $999!$ o 500^{999} és major.

Solució:
Per determinar el resultat de l'enunciat primer provarem el següent lema:

Lema:
Si a i b són dos reals positius tals que la seva suma és constant, $a+b=k$, llavors el valor maxim del seu producte s'assoleix quan $a=b=k/2$.

Demostració:
Suposem que $a < b$. En efecte, posant $a = k/2 - \epsilon$ i $b = k/2 + \epsilon$, amb $\epsilon > 0$ un real positiu obtenim:

$$ab = \frac{k^2}{4} - \epsilon^2 < \frac{k^2}{4}$$

Retornem al problema. Fiquem que $a_i = 500 - i$ i $b_i = 500 + i$. És clar que $999! = 500\prod_{i=1}^{499} a_i b_i$. A més, $a_i + b_i = 1000$ que és constant, per tant com que per tot $1 \leq i \leq 499$ $a_i < b_i$, aplicant el lema provat anteriorment:

$$900! = 500\prod_{i=1}^{499} a_i b_i < 500((500)^2)^{499} = 500^{999}$$

PROBLEMA* Provar que si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, per a $x, y, z > 0$, llavors:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$$

Solució:
Desenvolupant els parèntesis i tenint en compte que $xyz - xy - yz - zx = 0$ la desigualtat a provar queda:

$$x + y + z - 1 \geq 8 \Rightarrow x + y + z \geq 9$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la geomètrica i tenint en compte que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ s'arriba a que:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Rightarrow x + y + z \geq \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 9$$

PROBLEMA (José Luis Díaz Barrero) Siguin a, b i c reals positius, provar que**

$$\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(a^3+c^3)}} + \frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \leq 2$$

Solució:
Utilitzant la desigualtat de Jensen en la funció còncava $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, obtenim:

$$8\sqrt[3]{\frac{4(a^3+b^3)}{8}} \geq 4a + 4b \Rightarrow \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \geq a + b$$

Per tant:

$$\frac{1}{a + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} \leq \frac{1}{a+b+c}$$

Aplicant-ho a la desigualtat del nostre problema obtenim el resultat:

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(a^3+c^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\leq\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}=2$$

PROBLEMA (OCanM 1997-2) Determinar totes les solucions reals del sistema d'equacions**

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2}=z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2}=x$$

Solució:
Mitjançant algunes manipulacions:

$$\frac{1}{y}=\frac{1+4x^2}{4x^2}=\frac{1}{4x^2}+1\Leftrightarrow 4x^2(1-y)=y$$

D'aquí en deduïm que $y\in[0,1)$, perquè sinó, si $y>1$ llavors $y=4x^2(1-y)<0$ i si $y<0$ llavors $y=4x^2(1-y)>0$, contradicció. Per tant podem suposar que x, y i z són positius. Ara utilitzant la desigualtat $AM-MG$, obtenim que $4x^2+1\geq 4x$ i per tant:

$$y=\frac{4x^2}{1+4x^2}\leq\frac{4x^2}{4x}=x$$

Anàlogament obtenim que $y\leq x$, $z\leq y$ i $x\leq z$, d'on deduim que $x=y=z$. Ara és fàcil calcular que les úniques solucions als sistema són: $(x,y,z)=(0,0,0),(1/2,1/2,1/2)$.

PROBLEMA (IBERO 1995-2) Determinar totes les col·leccions de nombres reals $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$, tals que $x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 1$ i $x_{n+1}\geq 0$ tals que:**

- $x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{3}{2}}+...+x_n^{n-\frac{1}{2}}=n(x_{n+1}^{\frac{1}{2}})$
- $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=x_{n+1}$

Solució:
Utilitzant la desigualtat de Cauchy:

$$x_1+x_2^3+...+x_n^{2n-1}\leq\sqrt{(x_1+x_2^3+...+x_n^{2n-1})(x_1+x_2+...+x_n)}=$$
$$=\sqrt{(x_1+x_2^3+...+x_n^{2n-1})nx_{n+1}}\Rightarrow x_1+x_2^3+...+x_n^{2n-1}\leq nx_{n+1}$$

D'altra banda, utilitzant la desigualtat $MQ-MA$:

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2^3+...+x_n^{2n-1}}{n}}\geq\frac{x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{3}{2}}+...+x_n^{n-\frac{1}{2}}}{n}=$$

$$= \sqrt{x_{n+1}} \Rightarrow nx_{n+1} \leq x_1 + x_2^3 + ... + x_n^{2n-1}$$

És fàcil veure doncs, que $x_1 + x_2^3 + ... + x_n^{2n-1} = nx_{n+1}$. Llavors:

$$x_1 + x_2^3 + ... + x_n^{2n-1} = nx_{n+1} = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

Però d'acord amb l'enunciat, $x_i \geq 1$, això implica que si $a > b$, $x_i^a \geq x_i^b$ produint-se la igualtat si i només si $x_i = 1$. Per tant, deduim que l'única col·lecció de nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ és $x_1 = x_2 = ... = x_{n+1} = 1$.

PROBLEMA (Balkan MO 2006-1) Provar que per a reals positius** a, b, c**:**

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Solució:
Manipulant i utilitzant la desigualtat $AM - GM$:

$$(1+abc)(\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)}) + 3 =$$

$$= \frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)} + \frac{1+abc+bc+b}{b(c+1)} + \frac{1+abc+ac+c}{c(a+1)} =$$

$$= \frac{a+1}{a(b+1)} + \frac{b+1}{b(c+1)} + \frac{c+1}{c(a+1)} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{c(a+1)}{c+1} \geq 6$$

PROBLEMA (IMO Shorlist 2003-16) Sigui** $a_1, a_2, ..., a_i, ...$ **una seqüència infinita de nombres reals positius tals que per tot** i $0 \leq a_i \leq c$**, amb** c **un real positiu, i**

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$$

Provar que $c \geq 1$**.**
Solució:
Per algun n, considerem una permutació $(a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_n})$ de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tal que $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq ... \leq a_{k_n}$. Tenint en compte la desigualtat $AM - HM$ el resultat és casi immediat:

$$c \geq a_{k_n} - a_{k_1} = (a_{k_n} - a_{k_{n-1}}) + (a_{k_{n-1}} - a_{k_{n-2}}) + ... + (a_{k_2} - a_{k-1})$$

$$\geq \frac{1}{k_n + k_{n-1}} + \frac{1}{k_{n-1} + k_{n-2}} + ... + \frac{1}{k_1 + k_2} \geq \frac{(n-1)^2}{2(k_1 + ... + k_n) - k_n - k_1} \geq$$

$$\geq \frac{(n-1)^2}{2\frac{n(n+1)}{2} - 3} = \frac{(n-1)^2}{n^2 + n - 3} = 1 - \frac{3n+4}{n^2+n-3}$$

Ara observem que quan $n \to \infty$ llavors $\frac{3n+4}{n^2+n-3} \to 0$. Per tant, concloem que $c \geq 1$.
Finalment observem que prenent un n suficientment gran el membre de la dreta tendeix a 1. Per tant, concloem que $c \geq 1$.

PROBLEMA (IMO 2003-5) Siguin $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ nombres reals. Demostrar que:**

- $\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$

- **La igualtat per a la desigualtat anterior s'assoleix si i només si els nombres $x_1, X_2, ..., x_n$ estan en progressió aritmètica.**

Solució:
La idea més important d'aquest problema se'ns ha d'acudir al llegir el segon apartat: necessitem utilitzar una desigualtat que ens permeti provar que la igualtat només s'obté quan els nombres de l'enunciat estan en progressió aritmètica. Aquest raonament ens podria portar a utilitzar la típica $AM - GM$ si les diferències que trobem a la desigualtat fossin del tipus $x_{i+1} - x_i$, però el fet que es restin indistintatament $x_i - x_j$ ens fa pensar que la situació d'igualtat ha de ser imposada quan $(x_i - x_j)/(i - j)$ sigui constant. Ara ja es veu clarament que hem d'utilitzar la desigualtat de Cauchy. D'aquesta manera obtenim:

$$(\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2)(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2) \geq (\sum_{i,j=1} |i-j||x_i - x_j|)^2$$

Ara és fàcil provar per inducció per exemple, que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

I que:

$$\sum_{i,j=1} |i-j||x_i - x_j| = \frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|$$

Substituint aquestes dues identitats obtenim el resultat que se'ns demana provar a l'enunciat.

PROBLEMA (IMO Shorlist 2004-5) Siguin $a, b, c > 0$ tals que $ab + bc + ca = 1$. Provar que:**

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

Solució:
Aplicant la desigualtat ampliada per a les mitjanes:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq 3\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 6(a+b+c)}{3}}$$

Tenint en compte que $ab + bc + ca = 1$, és fàcil veure que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$, per tant, la desigualtat a provar és equivalent a:

$$27\,(1 + 6abc(a+b+c)) \leq \frac{3}{a^2b^2c^2}$$

Aplicant $AM - GM$, observem que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow \frac{1}{a^2b^2c^2}\geq 27$$

Per tant, serà suficient provar que:

$$27\left(1+6abc(a+b+c)\right)\leq 27\cdot 3\Leftrightarrow abc(a+b+c)\leq \frac{1}{3}$$

Ara, tenint en compte que $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ i per tant $xy+yz+zx\leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ es fàcil veure que la desigualtat anterior és efectivament certa:

$$(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=abc(a+b+c)\leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Algunes desigualtats geomètriques.

PROBLEMA* (Titu Andreescu) En un triangle ABC m_a i l_a són respectivament la mitjana i la bisectriu interior relatius al costat a. Provar que

$$m_a^2 - l_a^2 \leq \frac{(b-c)^2}{2}$$

Solució:
Aplicant el teorema d'Stewart es troba que $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ i que $l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$. D'aquesta manera la desigualtat a provar és:

$$\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \leq \frac{(b-c)^2}{2}$$

Operant:

$$\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{(b+c)^2}{2} - 2bc - a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{2(b+c)^4 + 4a^2bc - (b+c)^2(a^2+8bc)}{4(b+c)^2}$$

Agrupant termes:

$$2(b+c)^4 + 4a^2bc \leq 2(b-c)^2(b+c)^2 + (b+c)^2(a^2+8bc) = (b+c)^2(a^2+8bc+2(b-c)^2) =$$

$$= (b+c)^2(a^2+2(b+c)^2) = (b+c)^2a^2 + 2(b+c)^4$$

Simplificant:

$$4a^2bc \leq (b+c)^2a^2 \Rightarrow b^2+c^2 \geq 2bc$$

Essent la última desigualtat òbvia.

PROBLEMA* Sigui G el baricentre i O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC. Demostrar que

$$OG \leq \frac{R}{3}$$

essent R el radi de la circumferència circumscrita.
Solució:
És conegut que $OH = 3OG$, on H és l'ortocentre del triangle. Per tant, la desigualtat anterior és equivalent a:

$$OH \leq R$$

Clarament, si el triangle és acutangle l'ortocentre H es troba a l'interior del triangle i per tant la desigualtat és òbvia. Finalment només caldria dir que la igualtat es produeix quan l'ortocentre coincidex amb algun dels tres vèrtexs del triangle, és a dir quan el triangle és rectangle.

PROBLEMA* Siguin a, b, c els costats d'un triangle p el seu semiperímetre i r el radi de la seva circumferència inscrita. Demostrar que

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}$$

Solució:
Utilitzant la fórmula $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ la desigualtat a provar és equivalent a:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}+\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}\geq p$$

Fent el canvi de variable $x=p-a$, $y=p-b$ i $z=p-c$ la desigualtat a provar esdevé:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq(x+y+z)\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq xyz(x+y+z)$$

Que aquesta és equivalent a la següent desigualtat òbvia:

$$(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\geq 0$$

Finalment només cal dir que la igualtat s'obté quan $xy=yz=zx$, és a dir que $a=b=c$.

PROBLEMA* Provar la següent desigualtat per a reals positius:

$$\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Solució 1 (Enric S. Cusell):
Considerem la següent substitució:

$$x=\frac{-a+b+c}{2}\ ;\ y=\frac{a-b+c}{2}\ ;\ z=\frac{a+b-c}{2}$$

La desigualtat a provar queda llavors:

$$\frac{x+y}{2z}+\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}\geq 3\Leftrightarrow\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 6$$

Clarament l'última desigualtat és certa, per tant l'enunciat queda provat.
Solució 2:
Primer de tot observem que la desigualtat és homogènia. Per tant podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a+b+c=3$. D'aquesta manera la desigualtat anterior es pot reescriure com:

$$\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}\geq 3$$

Considerem la funció $f(x)=x^{-1}$, clarament f és convexa ($f''(x)=2x^{-3}>0$) per a $x>0$. Aplicant la desigualtat de Jensen obtenim:

$$\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}=af(3-2a)+bf(3-2b)+cf(3-2c)\geq$$

$$\geq (a+b+c)f\left(\frac{3(a+b+c)-2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\right)=3f\left(\frac{9-2(a^2+b^2+c^2)}{3}\right)$$

Cal doncs provar el següent:

$$\frac{3}{9-2(a^2+b^2+c^2)}\geq 1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3$$

Considerem ara la funció $g(x)=x^2$. Clarament g és convexa ($g''(x)=2>0$.) Aplicant la desigualtat de Jensen obtenim:

$$a^2+b^2+c^2=g(a)+g(b)+g(c)\geq 3g(\frac{a+b+c}{3})=3g(\frac{3}{3})=3$$

Així doncs, la demostració és completa.

PROBLEMA (IBERO 1992-6) Sigui ABC un triangle qualsevol. Siguin A_1 i A_2 punts en les prolongacions de AB i AC respectivament tals que $AA_1=AA_2=BC$, definim anàlogament B_1, B_2 i C_1, C_2. Provar que $S(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)\geq 13S(ABC)$.**

Solució:

Posem que $BC=a$, $CA=b$ i $AB=c$, tenim que:

$$\frac{S(A_1AA_2)+S(AB_2C_1)}{S(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}\sin\angle CAB(a^2+(b+c)^2))}{\frac{1}{2}(bc\sin\angle CAB)}=\frac{a^2+(b+c)^2}{bc}$$

Sumant les expressions obtingudes anàlogament permutant cíclicament a, b i c i tenint en compte que $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 9$ en virtut de $AM-HM$ obtenim el resultat que se'ns demana provar:

$$\frac{S(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)+2S(ABC)}{S(ABC)}=\sum_{cyclic}\frac{a^2+(b+c)^2}{bc}=$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+6\geq 15\Rightarrow S(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)\geq 13S(ABC)$$

5.3 Logaritmes

5.3.1 Teoremes i conceptes

DEFINICIÓ $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

PROPIETAT $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.

PROPIETAT $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

PROPIETAT $\log_a b^c = c \log_a b$.

PROPIETAT $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

PROPIETAT $\frac{\log_a c}{\log_b c} = \log_a b$.

5.3.2 Problemes

PROBLEMA (AIME 1984-5) Els nombres reals x i y satisfan $\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$ i $\log_8 y + \log_4 x^2 = 7$. Trobar el valor de xy.

Solució:
Sumant les dues equacions i aplicant les propietats dels logaritmes:

$$(\log_8 x + \log_4 y^2) + (\log_8 y + \log_4 x^2) = (\log_8 x + 2\log_4 y) + (\log_8 y + 2\log_4 x) = \log_8 xy + 2\log_4 xy = 12$$

Tenim doncs que $8^a = xy = 4^b \Rightarrow 8^a = 2^{3a} = 4^b = 2^{2b} \Rightarrow 3a = 2b$. Aplicant-ho a l'equació que teníem abans:

$$\log_8 xy + 2\log_4 xy = a + 2b = a + 3a = 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

Finalment, $xy = 8^3 = 2^9 = 512$.

PROBLEMA (AIME 1983-1) x, y, z són nombres reals majors que 1 i w és un nombre real positiu. Si $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ i $\log_{xyz} w = 12$, trobar el valor de $\log_z w$.

Solució:
Les primeres tres proposicions de l'enunciat, per definició de logaritme es poden expressar d'aquesta manera:

$$\log_x w = 24 \Leftrightarrow x^{24} = w \Leftrightarrow x = w^{\frac{1}{24}}$$

$$\log_y w = 40 \Leftrightarrow y^{40} = w \Leftrightarrow y = w^{\frac{1}{40}}$$

$$\log_{xyz} w = 12 \Leftrightarrow (xyz)^{12} = w \Leftrightarrow z = \frac{w^{\frac{1}{12}}}{xy}$$

Substituint els valors de x i y de les dues primeres equacions a la tercera obtenim:

$$z = \frac{w^{\frac{1}{12}}}{xy} = \frac{w^{\frac{1}{12}}}{w^{\frac{1}{24}} w^{\frac{1}{40}}} = \frac{w^{\frac{1}{12}}}{w^{\frac{1}{15}}} = w^{\frac{1}{12}-\frac{1}{15}} = w^{\frac{1}{60}}$$

Finalment, aplicant les propietats dels logaritmes obtenim el resultat:

$$\log_z w = \frac{1}{\log_w z} = \frac{1}{\frac{1}{60}} = 60$$

PROBLEMA (AIME 1988-3) Si $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$, trobar el valor de $(\log_2 x)^2$.

Solució:
Si $8^a = 2^b = x$, llavors, clarament $b = 3a$, i a més podem escriure $\log_8 x = a$ i $\log_2 x = 3a$.
D'aquesta manera l'equació inicial queda: $\log_2 a = \log_8 3a$.
D'aquí obtenim que: $2^c = a$ i $8^c = (2^c)^3 = 3a$.
Substituint: $a^3 = 3a$. Els possibles valors de a són 0 i $\pm\sqrt{3}$, tanmateix, la funció logaritme està definida en els reals positius (el zero no hi està inclòs), i per tant l'únic valor possible de a, és $\sqrt{3}$.
Finalment, $(\log_2 x)^2 = b^2 = (3a)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$.

PROBLEMA (AIME 1994-4) Trobar un n tal que $\lfloor\log_2 1\rfloor + \lfloor\log_2 2\rfloor + \lfloor\log_2 3\rfloor + ... + \lfloor\log_2 n\rfloor = 1994$

Solució:
Definim $f(x) = \lfloor\log_2 1\rfloor + \lfloor\log_2 2\rfloor + \lfloor\log_2 3\rfloor + ... + \lfloor\log_2 x\rfloor$, per a x un natural positiu. És fàcil, veure que $f(x) = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + ... + x \cdot 2^x$, ja que $\lfloor\log_2 2^k\rfloor = \lfloor\log_2 2^k + 1\rfloor = ... = \lfloor\log_2 2^{k+1} - 1\rfloor$.
Tenim que $7 \cdot 2^7 = 896 < 1994 < 8 \cdot 2^8 = 2048$. Així doncs: $1994 = 2^0 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + ... + 2^7 \cdot 7 + 8(n - (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^7)) = 1538 + 8n - 255 \cdot 8 = 8n - 502$.
Finalment, $n = 312$.

PROBLEMA (AIME 1995 - 2) Trobar el producte de les arrels positives de l'equació $\sqrt{1995}x^{\log_{1995} x} = x^2$

Solució:
Simplificant obtenim:

$$\sqrt{1995}x^{\log_{1995} x} = x^2 \Rightarrow \sqrt{1995} = x^{2-\log_{1995} x} \Rightarrow 1995 = x^{4-2\log_{1995} x}$$

Passant ara a logaritmes:

$$\log_x 1995 = \frac{1}{\log_{1995} x} = 4 - 2\log_{1995} x \Rightarrow 2(log_{1995}x)^2 - 4\log_{1995} x + 1$$

Si resolem ara l'equació quadràtica en $\log_{1995} x$, obtenim:

$$\log_{1995} x = 2 \pm \sqrt{2} > 0 \Rightarrow x_1 = 1995^{2+\sqrt{2}} \ ; \ x_2 = 1995^{2-\sqrt{2}}$$

Finalment, el que se'ns demana a l'enunciat, és el valor del producte de $x_1 \cdot x_2$:

$$x_1 \cdot x_2 = 1995^{2-\sqrt{2}} \cdot 1995^{2+\sqrt{2}} = 1995^2$$

PROBLEMA (AIME 2000-1) Trobar el valor de $\frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2000^6}$

Solució:
Primer de tot, aplicant les propietats dels logaritmes:

$$\frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2000^6} = \frac{2}{6\log_4 2000} + \frac{3}{6\log_5 2000} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_4 2000} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_5 2000}$$

Simplificant encara més:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_4 2000} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_5 2000} = \frac{1}{3} \cdot \log_{2000} 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_{2000} 5 = \log_{2000} 4^{\frac{1}{3}} + \log_{2000} 5^{\frac{1}{2}} = \log_{2000} 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

D'altra banda tenim que: $2000 = 4^2 \cdot 5^3 = (4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}})^6$, que en llenguatge logarítmic es tradueix com:

$$\left(\log_{2000} 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 6 \cdot \left(\log_{2000} 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

Finalment:

$$\frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2000^6} = \log_{2000} 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

PROBLEMA* (AIME 1986-8) Trobar la part entera de $\sum \log_{10} k$, on k recorre tots els divisors de 10^6 excepte el mateix 10^6.

Solució:
Aplicant les propietats dels logaritmes, tenim que $\sum \log_{10} k = \log_{10} \prod k$. Així doncs, necessitem conéixer quant val el producte dels divisors de 10^6 exceptuant el mateix 10^6.
En aquests casos, quan es vol obtindre un producte o una suma determinada que aparentment sembla difícil de calcular es pot mirar d'agrupar els sumands o factors, d'alguna manera que en poguem treure profit, en aquest cas serà en parelles.
Considerem tots els divisors de $10^6 = 2^6 5^6$, n'hi ha exactament $(6+1)(6+1) = 49$. D'aquests traiem ara el 10^3. Observem que si d_k és un dels divisors que tenim, llavors $\frac{10^6}{d_k}$ també és un divisor de 10^6 diferent de d_k. A més el seu producte és precisament 10^6. Això és el que volíem aconseguir.
El nombre de parelles que tenim, exceptuant la que formen 10^6 i 1, per restricció en l'enunciat, és igual a $\frac{49-1}{2} - 1 = 23$. Per tant, el valor del producte total, incloent-hi el 10^3 que primer havíem tret, és: $10^3 \cdot (10^6)^{23}$.
Finalment, $\sum \log_{10} k = \log_{10}(10)^{141} = 141$.

PROBLEMA* (OMC 1972-4) Demostrar que

$$\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a = 1$$

Solució:

Senzillament, aplicant les propietats dels logaritmes:

$$\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a = \frac{\log_b c}{\log_b a} \cdot \frac{\log_d a}{\log_c d} = \log_a c \log_c a = \frac{\log_a c}{\log_a c} = 1$$

5.4 Seqüències

5.4.1 Problemes

PROBLEMA (Cangur 2001 Nivell 4 - 14) Determinar, en la successió de quadrats, $1, 4, 9, 16, ...$, quin nombre ocupa el lloc següent a 10^8.

Solució:
Primer de tot, és fàcil veure que la successió de quadrats és de la forma $a_n = n^2$, per a $n \geq 1$. D'aquí se'n desprèn que el nombre n^2, ocupi el lloc número n en la successió. Conseqüentment el nombre $10^8 = (10^4)^2$ ocupa el lloc 10^4. Finalment, el següent quadrat, ocupa el lloc $10^4 + 1$.

PROBLEMA (Cangur 2003 Nivell 4 - 16) Un ordinador escriu la llista de les setenes potències de tots els nombres naturals positius, és a dir, la successió $1^7, 2^7, 3^7, 4^7, ...$. Determinar el nombre de termes d'aquesta successió que hi ha entre els nombres 5^{21} i 2^{49} (aquests dos exclosos en cas que siguin elements de la successió).

Solució:
Primer de tot està clar que la successió de l'enunciat és de la forma $a_n = n^7$, per a $n \geq 1$. D'aquí se'n desprèn que el nombre n^7 ocupa el lloc número n en la successió. Per tant, el nombre $5^{21} = (5^3)^7 = 125^7$ i el nombre $2^{49} = (2^7)^7 = 128^7$ ocupen els llocs 125, i 128 en la successió (a_n) respectivament. Per tant, entre ells dos hi ha exactament 2 termes, el 126 i 127.

PROBLEMA (Cangur 2003 Nivell 4 - 19) Determinar el resultat de

l'operació:

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - ... + 2^2 - 1^2$$

Solució:
El que farem serà operar, però de manera ordenada:

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - ... + 2^2 - 1^2 = (100^2 - 1^2) - (99^2 - 2^2) + (98^2 - 3^2)... =$$

$$(101 \cdot 99) - (101 \cdot 97) + (101 \cdot 95) - ... = 101(99 - 97 + 95 - 93 + ...) = 101 \cdot 2 \cdot 25 = 5050$$

PROBLEMA (Cangur 2003 Nivell 4 - 30) Una successió (a_n) està definida per a $n \geq 0$ de la manera següent:

$$a_0 = 4 \ , \ a_1 = 6 \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ per a } n \geq 1.$$

Determinar el valor del terme a_{2003} d'aquest sucessió.
Solució:
Primer de tot calculem els primers termes de la successió:

$$a_0 = 4\ ;\ a_1 = 6\ ;\ a_2 = \frac{3}{2}\ ;\ a_3 = \frac{1}{4}\ ;\ a_4 = \frac{1}{6}\ ;\ a_5 = \frac{2}{3}\ ;\ a_6 = 4\ ;\ a_7 = 6\ ;\ a_8 = \frac{3}{2};$$

Notem doncs que la successió és periòdica de període 6. Com que $2003 \equiv 5 \bmod 6$, llavors $a_{2003} = a_5 = \frac{2}{3}$.

PROBLEMA (Cangur 2005 Nivell 4 - 7) Els nombres a, b, c, d i e formen una progressió aritmètica. Si $b = 5,5$ i $e = 10$, determinar el valor de a.

Solució:
Tenim que $b = a + x$ i $e = a + 4x$, on x és la diferència de la progressió aritmètica. Per tant, substituint les dades de l'enunciat, podem plantejar aquest sistema d'equacions:

$$\begin{cases} a + x = 5,5 \\ a + 4x = 10 \end{cases}$$

Resolent-lo, obtenim que $a = 4$.

PROBLEMA* (OME 1965-7) Determinar una progressió geomètrica de set termes si sabem que la suma dels tres primers és 7, i la suma dels tres últims és 112.

Solució:
Si a_1, a_2, ... ,a_7 és la progressió de l'enunciat, podem escriure: $a_1 = \frac{a}{r^3}$, $a_2 = \frac{a}{r^2}$, $a_3 = \frac{a}{r}$, $a_4 = a$, $a_5 = ar$, $a_6 = ar^2$ i $a_7 = ar^3$, d'aquesta manera l'enunciat queda:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{a\,r(1-r^3)}{r\,r^3(1-r)} = \frac{a(1-r^3)}{r^3(1-r)} = 7$$

$$a_5 + a_6 + a_7 = ar(1 + r + r^2) = \frac{ar(r^3-1)}{r-1} = 112$$

Dividint les dues equacions:

$$r^4 = \frac{112}{7} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{112}{7}}$$

Així doncs:

$$a = \frac{112(r-1)}{r^3-1} = \frac{112\left(\sqrt[4]{\frac{112}{7}} - 1\right)}{\left(\sqrt[4]{\frac{112}{7}}\right)^3 - 1} = \frac{112\sqrt{7}(112^{\frac{1}{4}} - 7^{\frac{1}{4}})}{112^{\frac{3}{4}} - 7^{\frac{3}{4}}}$$

Finalment només cal substituir els valor de a i r per tal d'obtindre la progressió.

PROBLEMA* (OMC 1966-4) Demostrar que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, no poden formar ni una progressió aritmètica ni geomètrica.

Solució :
Primer provarem que no poden formar una progressió aritmètica:
Suposem el contrari, és a dir:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=d\ ;\ \sqrt{4}-\sqrt{3}=d$$

Igualant les dues equacions i elevant al quadrat:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{4}-\sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{3}=2+\sqrt{2}\Rightarrow 12=8+2\sqrt{2}$$

Hem arribat a una contradicció. Per tant els nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{4}$, no poden formar una progressió aritmètica.

Anem ara a provar que no poden formar una progressió geomètrica.
Suposem el contrari, és a dir:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=r\ ;\ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=r$$

Igualant les dues equacions:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\Rightarrow 3=2\sqrt{2}$$

Hem arribat a una altra contradicció. Per tant, els nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{4}$, no poden formar una progressió geomètrica.

PROBLEMA* (AIME 2002-11) El valor de la suma de dos progressions geomètriques diferents, és en ambdues 1. Sabem que el segon terme és el mateix en les dues i que una de les dos té el tercer termer igual a $\frac{1}{8}$. Determinar el segon terme.

Solució:
Sigui a, r i b, q, respectivament, el membre inicial i la raò de les dues progressions geomètriques. Segons l'enunciat, podem plantejar el següent sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=1\Rightarrow a=1-r \\ \dfrac{b}{1-q}=1\Rightarrow b=1-q \\ ar=bq \\ ar^2=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Substituint els valors de a i b de les dos primeres equacions a l'equació $ar=bq$ i simplificant obtenim:

$$r^2-r+q-q^2=0\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{1-4q+4q^2}}{2}=\frac{1\pm(1-2q)}{2}\Rightarrow r=q,1-q$$

Com que a l'enunciat se'ns especifica que les dues progressions no són iguals, llavors $r = 1-q$. D'aquesta manera obtenim $a = q$ i $b = r = 1 - q$. Substituint aquests valors a l'última equació:

$$q(1-q)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 - 2q^2 + q - \frac{1}{8} = (q - \frac{1}{2})(q^2 - \frac{3q}{2} + \frac{1}{4}) = 0$$

Resolent l'equació de segon grau que se'ns ha format en l'últim parèntisi s'arriba a què els únics valors que pot prendre q són $q = \frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.
Amb el primer valor obtenim $r = q$ i el segons valor és major que 1, per tant prendrem l'últim valor.
Finalment el segon terme de la progressió val:

$$ar = q(1-q) = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \cdot \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \cdot \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$$

PROBLEMA (AIME 1985-1) Sigui $x_1 = 97$, $x_2 = \frac{2}{x_1}$, $x_3 = \frac{3}{x_2}$, $x_4 = \frac{4}{x_3}$, ... , $x_8 = \frac{8}{x_7}$. Trobar el valor de $x_1 x_2 ... x_8$.

Solució:
Es podria anar substituint successivament per trobar els valors de $x_1, x_2, ..., x_8$ i després multiplicar-ho, però és més senzill multiplicar-ho de manera astuta, amb parelles de dos, d'aquesta manera marxen les lletres i el que obtenim és:

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6)(x_7x_8) = x_1\frac{2}{x_1}x_3\frac{4}{x_3}x_5\frac{6}{x_5}x_7\frac{8}{x_7} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$$

PROBLEMA (AIME 2001-3) La seqüència $a_1, a_2, a_3, ...$ és definida per $a_1 = 211$, $a_2 = 375$, $a_3 = 420$, $a_4 = 523$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$. Trobar el valor de $a_{531} + a_{753} + a_{975}$.

Solució:
Primer de tot, comencem estudiant què és el que passa si sumem dos nombres de la successió consecutius:
$a_n + a_{n+1} = (a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}) + (a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}) = a_n - a_{n-4} \Rightarrow a_{n+1} = -a_{n-4}$
D'aquesta manera hem aconseguit simplificar bastant les coses: $a_{5k+h} = a_h(-1)^k$, on $h = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és a dir, la successió té període 10.
Per tant:

$$a_{531} + a_{753} + a_{975} = a_1(-1)^{106} + a_3(-1)^{150} + a_5(-1)^{194} = a_1 + a_3 + a_5 =$$

$$= a_1 + a_3 + (a_4 - a_3 + a_2 - a_1) = a_4 + a_2 = 523 + 375 = 898$$

PROBLEMA (AIME 1985-5) La seqüència d'enters a_1, a_2, a_3, ... satisfà $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ per a $n > 0$. La suma dels 1492 termes és 1985, i la suma dels primers 1985 termes és 1492. Troba el valor de la suma dels primers 2001 termes.

Solució:

Procedirem de manera similar a l'anterior. Observem què és el que passa si sumem dos nombres consecutius de la seqüència donada: $a_{n+2} + a_{n+3} = (a_{n+1-a_n}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_m \Rightarrow a_{n+3} = -a_n$.

Per tant, la successió té període 6, en concret, $a_{3k+h} = a_h(-1)^k$ on $h \in \{1,2,3\}$. Això implica que la suma de qualsevol 6 termes consecutius de la sèrie donada és igual a 0. Per tant, donat que $1492 \equiv 4 \mod 6$ i $1985 \equiv 5 \mod 6$ i segons el que diu l'enunciat podem plantejar el següent sistema:

$$\sum_{i=1}^{1492} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + (-a_1) = a_2 + a_3 = 1985$$

$$\sum_{i=1}^{1985} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + (-a_1) + (-a_2) = a_3 = 1492$$

D'aquí se'n desprèn que $a_3 = 1492$ i $a_2 = 493$. En conseqü ència, $a_3 = a_2 - a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 - a_3 = 493 - 1492 = -999$.

Finalment, tenint en compte que $2001 \equiv 3 \mod 6$:

$$\sum_{i=1}^{2001} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 986$$

PROBLEMA* (AIME 2000-10) La seqüència $x_1, x_2, ..., x_{100}$ té la propietat que, per cada k, x_k és k menys vegades el valor de la suma dels altres 99 nombres. Trobar el valor de x_{50}.

Solució:

Posem per simplificar les coses que $x_1 + x_2 + ... + x_{100} = s$, llavors segons l'enunciat:

$$x_k = x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_{100} - k = s - x_k - k \Rightarrow x_k = \frac{s-k}{2}$$

Sumant totes les equacions obtingudes al variar k de 1 a 100, obtenim:

$$s = 50s - \frac{1+2+...+100}{2} = 50s - \frac{100 \cdot 101}{4} \Rightarrow s = \frac{25 \cdot 101}{49}$$

Finalment, $x_{50} = \dfrac{\frac{25 \cdot 101}{49} - 50}{2} = \dfrac{2525 - 2450}{49 \cdot 2} = \dfrac{75}{98}$.

PROBLEMA (OBM 1994-3) Una seqüència d'enters u_0, u_1, u_2, ... satisfà que $u_0 = 1$ i per tot $n \geq 1$:

$$u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$$

on k és un enter positiu fixat. Si $u_{2000} = 2000$, determinar tots els possibles valors de k.

Solució:

D'acord amb l'enunciat tenim que:

$$u_{n+1}u_{n-1} = ku_n \ ; \ u_n u_{n-2} = ku_{n-1}$$

Multiplicant aquestes dues equacions obtenim:

$$u_{n+1}u_{n-1}u_n u_{n-2} = k^2 u_n u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1}u_{n-2} = k^2$$

De l'última igualtat en deduim que:

$$u_{n+1} = u_{n-5}$$

Així doncs, hem arrivat a que la successió de l'enunciat és periòdica, en concret, de període 6. D'acord amb això doncs, $u_{2000} = u_2$. A partir d'aquí és fàcil veure que:

$$u_0 = 1 \ ; \ u_1 = \frac{u_2}{k} \ ; \ u_2 = u_2 \ ; \ u_3 = k^2 \ ; \ u_4 = \frac{k^3}{u_2} \ ; \ u_5 = \frac{k^2}{u_2}$$

Per tant, si $u_2 = u_{2000} = 2000$, k ha de ser un enter positiu tal que $u_1 = \frac{2000}{k}$ i $u_4 = \frac{k^3}{2000}$ siguin enters positius. De que $k \mid 2000$ se'n desprén que $k = 2^a 5^b$ amb $0 \leq a \leq 4$ i $0 \leq b \leq 3$. De que $2000 \mid k^3$ se'n desprén que $3a \geq 4$ i $3b \geq 3$. És a dir que:

$$4 \geq a \geq 2 \ ; \ 3 \geq b \geq 1$$

Finalment doncs, els possibles valors de k són:

$$k = \{20, 40, 80, 100, 200, 400, 500, 1000, 2000\}$$

PROBLEMA (OME 1997 - 1) Calcular la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica, sabent que la suma d'ells val -1, i que la suma dels termes de lloc parell val $+1$.**

Solució:

Sigui a_1, a_2,..., a_{100}, la progressió aritmètica de l'enunciat, de diferència d. Tenim que $a_n = a_1 + (n-1)d$. Segons el que se'ns diu a l'enunciat podem plantejar el següent sistema:

$$\begin{cases} 50(a_1 + 50d) = 1 \\ 100a_1 + 99 \cdot 50d = -1 \end{cases}$$

Resolent-lo, obtenim:

$$a_1 = -\frac{149}{50} \ ; \ d = \frac{3}{50}$$

A l'enunciat però se'ns demana el valor de la suma dels cent primers quadrats de la progressió. Notem que:

$$a_k^2 = (a_1 + (k-1)d)^2 = a_1^2 + 2a_1(k-1)d + (k-1)^2d^2$$

Per tant la suma dels cent primers quadrats és:

$$\sum_{k=1}^{100} a_k^2 = \sum_{i=1}^{100}(a_1^2 + 2a_1(k-1)d + (k-1)^2d^2) = 100a_1^2 + 2da_1\sum_{k=1}^{100}(k-1) + d^2\sum_{k=1}^{100}(k-1)^2 =$$

$$= 100a_1^2 + 2da_1 \cdot \frac{99\cdot(99+1)}{2} + d^2 \cdot \frac{99(99+1)(2\cdot 99+1)}{6} = 100a_1^2 + 9900da_1 + 328350d^2 =$$

$$= 100\cdot\frac{(-149)^2}{2500} + 9900\cdot\frac{3}{50}\cdot\frac{-149}{50} + 328350\cdot\frac{9}{2500} = 299.98$$

Hem utilitzat les fórmules:

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

PROBLEMA (IBERO 2000-4) Tenim una progressió aritmètica d'infinits nombres reals $1, a_1, a_2, \cdots$. Sabem que si eliminem alguns dels seus termes obtenim una progressió geomètrica d'infinits termes $1, b_1, b_2, \cdots$. Determinar tots els possibles valors que pot prendre la raò de la progressió geomètrica.**

Solució:

Provarem que si q és la raò en la progressió geomètrica, q pot prendre el valor de qualsevol enter positiu.

Primer de tot provem que q ha de ser un nombre natural. Tenim que per algun a_i, $b_1 = a_i$, $b_j = a_i + (n_j - 1)d$, on d és la diferència de la progressió aritmètica i n_j un enter positiu. D'acord amb la definició de progressió geomètrica podem escriure:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_i + n_1d}{a_i} = 1 + \frac{n_1d}{a_i} \Leftrightarrow q - 1 = \frac{n_1d}{a_i}$$

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{a_i + n_2d}{a_i} = 1 + \frac{n_2d}{a_i} \Rightarrow (q-1)(q+1) = \frac{n_1d}{a_i}\cdot(q+1) = \frac{n_2d}{a_i} \Rightarrow n_1(q+1) = n_2$$

De la última expressió en deduim que, com que n_1 i n_2 són enters positius, també ho serà q. Així doncs, q és un enter positiu.

Finalment, podem veure com en efecte per qualsevol enter positiu q existeix una progressió aritmètica de la qual es poden eliminar termes per formar la progressió geomètrica $1, q, q^2, ..., q^n, ...$ Prenent $d = q - 1$ i $n_i = q^{i-1} + q^{i-2} + ... + q + 1$:

$$a_{n_i} = b_i = 1 + (q-1)(q^{i-1} + q^{i-2} + ... + q + 1) = 1 + q^i - 1 = q^i$$

L'enunciat queda doncs provat, la resposta és tots els enters positius.

Capítol 6

Combinatòria

6.1 Principi de les caselles

6.1.1 Teoremes i conceptes

TEOREMA (Principi de les caselles)
El principi de les caselles o principi de Palomar estableix que si repartim n objectes en k compartiments n'hi ha almenys $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ objectes en una mateixa casella.

6.1.2 Exercicis i problemes

EXERCICI Demostreu que entre els individus d'un grup de set persones, sempre n'hi ha almenys quatre del mateix sexe.

Solució:
D'acord amb el principi de les caselles, de 7 persones, com que només hi ha dos sexes permesos, hi ha almenys $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor + 1 = 4$ persones del mateix sexe.

EXERCICI Demostrar que entre els individus d'un grup de 3000 persones, sempre n'hi ha 9 que tenen el mateix dia d'aniversari.

Solució:
D'acord amb el principi de les caselles, de 3000 persones, com que només hi ha 365 dates d'aniversari possibles, hi ha almenys $\lfloor \frac{3000}{365} \rfloor + 1 = 9$ persones amb la mateixa data d'aniversari.

PROBLEMA Les persones d'una reunió han fet encaixades de mans en arribar. Suposem que ningú es dóna la mà a ell mateix i cap parella de persones s'ha donat la mà més d'una vegada. Demostreu que hi ha dues persones a la reunió que han encaixat el mateix nombre de mans.

Solució:
Suposem que a la reunió hi assisteixen n individus. Com que qualsevol persona no es pot donar la mà a ell mateix i tampoc pot donar més d'una vegada la ma a un altre individu, el nombre de donades de mans realitzades ha de pertànyer al conjunt $\{1, 2, ..., n-1\}$. Com

que hi ha n individus, d'acord amb el principi de les caselles hi ha d'haver almenys 2 que hagin donat el mateix nombre de mans.

PROBLEMA Entre els individus d'un grup de 2 o més persones, sempre n'hi ha dues amb el mateix nombre d'amics dins del grup. (Suposem que tot individu és sempre amic d'ell mateix i que l'amistat és una relació simètrica.)

Solució:

Provarem l'enunciat indirectament, suposant el contrari i arribant així a una contradicció.

D'acord amb l'enunciat, el nombre d'amistats que pot tindre un individu ha de pertànyer al conjunt $\{1, 2, ..., n\}$. Si suposem que no hi ha dos individus que tinguin el mateix nombre d'amistats, en deduïm que necessàriament tots han de tindre un nombre diferent d'amistats, però això és una contradicció perquè si hi ha una persona que té només un amic (ell mateix), com que la relació d'amistat és simètrica, no hi pot haver una altra persona que tingui n amics, perquè seria amic del primer.

PROBLEMA* (OIsrM 1988) Un grup de persones visita un a exposició de 100 quadres. Cap no arriba a veure tots els quadres, però tots els quadres han estat vistos per algun dels visitants. Proveu que hi ha una parella de visitants (v_1, v_2) i una parella de quadres (α, β) tals que v_1 ha vist α però no ha vist β i v_2 ha vist β però no ha vist α.

Solució:

Sigui v_1 un visitant qualsevol de l'exposició. Aquest no ha pogut veure tots els quadres d'aquesta, per tant, ha d'existir un quadre, diem-li α que no hagi estat vist per v_1. Com que tots els quadres han estat vistos per algú, ha d'existir un altre visitant v_2 que hagi vist α. Ara poden passar dues coses: o bé que dels quadres que ha vist v_1 n'existeix un, diem-li β tal que no ha estat vist per v_2, llavors hauríem acabat, les parelles demanades a l'enunciat serien (v_1, v_2) la parella de visitants i (β, α) la parella de quadres; o bé que els quadres que ha vist v_1 han estat tots vistos també per v_2, llavors, com que tots els quadres no poden haver estat vistos per v_2, ha d'existir un quadre, diem-li α' que no hagi estat vist ni per v_1 ni per v_2, com que tots els quadres han estat vistos per algú ha d'existir un tercer visitant, diem-li v_3 tal que aquest hagi vist α'. Arribats en aquest podem distingir dos casos. El primer cas és que dels quadres que hagi vist v_2 n'hi hagi un, diem-li β' que no hagi estat vist per v_3, llavors hauríem acabat, prenent com (v_2, v_3) la parella de visitants i (β', α') la parella de quadres. El segon cas és que tots els quadres vistos per v_2 hagin estat vistos per v_3, llavors, haurà d'existir un altre quadre que no hagi estat vist ni per v_1 ni per v_2 ni per v_3 però sí per un altre visitant, diem-li v_4...

Com que hi ha un nombre finit de quadres però, aquest raonament no pot seguir aplicant-se indefinidament. Concloem que ha d'existir un vistant v_k tal que hagi vist un quadre no vist per v_{k-1} però que no hagi vist algun dels quadres que ha vist v_{k-1}.

Per tant, sempre existeix una parella de visitants i de quadres que compleixi l'enunciat.

PROBLEMA* (Putnam 1953) Distribuïm sis punts a l'espai sense que n'hi hagi tres d'alineats ni tampoc quatre de coplanaris. Ara tracem segments, en total quinze, que els uneixin dos a dos. Alguns els pintem de color blau i els altres de color vermell. Proveu que hi ha lamenys un triangle que té tots els costats del mateix color.

Solució:
Agafem un punt qualsevol, diem-li A. D'aquest en surten 5 segments, cap als altres 5 vèrtexs, diem-los B, C i D, per tant almenys $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor + 1 = 3$ segments, suposem que són AB, AC i AD, són del mateix color, per exemple blau. Si un dels tres segments BC, CD i BD és de color blau, llavors tenim un triangle, si cap dels tres segments és blau, llavors el triangle BCD és vermell.

PROBLEMA (IMO 1964-4) Disset persones s'escriuen entre elles, cada una amb totes les altres. En les cartes només tracte n tres temes. Cada parella de corresponsals, però, només tracta un dels temes. Proveu que almenys n'hi ha tres que escriuen sobre el mateix tema.**

Solució:
L'enunciat és equivalent a provar que si en un conjunt de 17 punts en el pla tals que qualsevol tres d'ells no són colineals, tracem tots els segments possibles entre ells, i aquests els coloregem amb qualssevol tres colors, sempre existeix un triangle el qual té els costats del mateix color.
Per veure això seguirem el següent raonament:
Primer de tot escollim qualsevol vèrtex dels 17 possibles. D'aquest vèrtexs en surten exactament 16 segments. Per tant, d'acord amb el principi de les caselles hi ha almenys $\lfloor \frac{16}{3} \rfloor + 1 = 6$ segments amb el mateix color, diguem-n'hi el color A (així els altres dos colors els direm B i C).
Considerem ara l'hexàgon $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ format pels 6 vèrtexs diferents del vèrtex inicial escollit. Si qualsevol dels $\binom{6}{2} = 15$ segments és de color A, ja hem acabat. Suposem el contrari, és a dir que els 15 segments són o bé de color B o de color C. Escollim un vèrtex qualsevol de l'hexàgon, per exemple X_1. D'aquest en surten exactament 5 segments dels quals, pel principi de les caselles almenys $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor + 1 = 3$ són del mateix color, suposem que aquest és B. Suposem que aquests tres segments són X_1X_3, X_1X_4 X_1X_5 si un dels segments X_3X_4, X_4X_5 o X_3X_5 són de color B, sens forma un triangle. En cas contrari, els tres segments són de color C i formen un triangle.

PROBLEMA Provar que en tot conjunt de 5 nombres, hi ha sempre tres nombres la suma dels quals és divisible per 3.

Solució:
Considerem els 5 nombres, diem-los x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5, mòdul 3. Aquests hauran de pertànyer al conjunt $\{0, 1, 2\}$. D'acord amb el principi de les caselles hi ha almenys $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor + 1 = 2$ nombres iguals mòdul 3, siguin aquests x_1 i x_2. Dels altres tres nombres restants, si n'hi ha un que sigui igual a x_1 i x_2, llavors aquests tres sumen un múltiple de 3. Sinó, dels 3 restants pot ser o que n'hi hagi dos diferents, en aquest cas al conjunt tindriem els nombres 0, 1 i 2, que

sumen 0; o que siguin tots tres iguals, en aquest cas la seva suma dóna també un múltiple de 3.
Veiem doncs que sempre existeixen tres nombres tals que la seva suma és un múltiple de 3.

PROBLEMA* Sigui $C = \{r_1, ..., r_{n+1}\}$ un conjunt format per $n + 1$ nombres reals tal que $0 \leq r_i < 1$. Provar que hi ha almenys dos elements $r_i, r_j \in C$ tals que $|r_i - r_j| < \frac{1}{n}$.

Solució:
Observem que:

$$[0,1) = [0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \cup ... \cup [\frac{n-1}{n}, 1)$$

Per tant si repartim els $n+1$ r_i en aquests n intervals, almenys n'hi haurà dos que estaran a l'interior del mateix interval. Se'n segueix que aquests dos elements, r_i i r_j compleixen que $|r_i - r_j| < \frac{1}{n}$.

PROBLEMA* Cada dia posem a una guardiola una moneda de 1 euro o una moneda de 2 euros i el total que tenim al cap de n dies és de m euros. Demostreu que per cada enter $0 \leq k \leq 2n - m$ hi ha un conjunt de dies consecutius durant els quals el contingut de la guardiola s'ha incrementat en k pta.

Solució:
Sigui d_i el nombre d'euros que te la guardiola en el dia i. Si cada dia posem almenys una moneda i al cap de n dies tenim m euros, podem plantejar la següent cadena de desigualtats:

$$0 < d_1 < d_2 < ... < d_n = m$$

Si sumem ara k:

$$k < d_1 + k < d_2 + k < ... < d_n + k = m + k \leq 2n$$

Si ara repartim els $2n$ valors d_1, d_2, ..., d_n, $d_1 + k$, $d_2 + k$, ..., $d_n + k$ entre $2n$ nombres enters (els compresos entre 1 i $2n$, ambdós inclusius), o almenys n'hi ha dos, posem d_i i $d_j + k$, que ocupen el mateix enter, tenint així $d_i = d_j + k$, o bé tots ocupen un enter diferent, que és quan cada dia s'ha posat una única moneda diferent i quan per tant sempre trobar una seqüència de dies consecutius durant els quals el contingut de la guardiola s'ha incrementat en k euros.

PROBLEMA* Sigui A un conjunt de 20 nombres enters diferents de la progressió aritmètica $1, 4, 7, .., 100$. Demostrar que el conjunt A conté dos enters diferents la suma dels quals és 104.

Solució:
Observem que A és a unió de 17 subconjunts disjunts:

$$A = \{1, 4, 7, ..., 100\} = \{1, 52\} \cup \{4, 100\} \cup \{7, 97\} \cup ... \cup \{49, 55\}$$

D'acord amb el principi de les caselles, almenys hi ha $\lfloor\frac{20}{17}\rfloor+1 = 2$ enters al mateix subconjunt. Si aquests dos enters estan a un dels subconjunts $\{4, 100\}$, $\{7, 97\}$, ..., $\{49, 55\}$ aquests dos nombres sumen 104. Si aquests dos enters ocupen justament el subconjunt $\{1, 52\}$ no sumen 104. Ara però, d'acord amb el principi de les caselles, si distribuim $20 - 2 = 18$ enters entre $17 - 1$ subconjunts, n'hi haurà almenys $\lfloor\frac{18}{16}\rfloor + 1 = 2$ al mateix subconjunt. Com que totes les parelles d'enters que es troben a la resta de subconjunts sumen 104 aquesta és la parella de nombres que sumen a 104.

PROBLEMA* Donat un conjunt de 10 enters positius diferents i menors que 107, demostrar que hi ha dos subconjunts disjunts que tenen la mateixa suma.

Solució:
Els possibles valors de les sumes de qualsevol conjunt de 10 enters positius diferents i menors que 107 està comprès entre 0 i $97+98+99+100+101+102+103+104+105+106 = 1015$. En total doncs, hi ha 1016 valors que poden prendre totes les sumes possibles dels elements dels subconjunts de l'enunciat. D'altra banda, hi ha 1024 sumes possibles, corresponents a tots els subconjunts que es poden formar del conjunt de 10 elements. Per tant, d'acord amb el principi de les caselles, hi ha almenys $\lfloor\frac{1024}{1015}\rfloor+1 = 2$ subconjunts que tenen la mateixa suma, diguem-los A_i i A_j. Si $A_i \cap A_j = \phi$ ja hem acabat, sinó els dos subconjunts $A_i - A_i \cap A_j$ i $A_j - A_i \cap A_j$ són disjunts i tenen la mateixa suma.

PROBLEMA* Donat un conjunt de n enters positius qualsevol, hi ha un subconjunt tal que la suma dels seus elements és divisilbe per n. Demostrar-ho.

Solució:
Sigui a_1, a_2, $...a_n$ els n enters positius. Considerem les següents sumes, avaluades mòdul n:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Si existeix una s_i tal que $s_i = 0$ ja hem acabat, sinó vol dir que els possibles valors de les n sumes pertanyen al conjunt $\{1, 2, ..., n-1\}$. Com que hi ha n sumes, d'acord amb el principi de les caselles almenys $\lfloor\frac{n-1}{n}\rfloor + 1 = 2$ sumes són iguals, posem s_p i s_q, $p < q$. Se'n segueix que la seva diferència és divisible per n, és a dir que $s_q - s_p = a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q$ és divisible per n.

PROBLEMA* (OME 2008 3-3) Demostrar que d'entre 17 enters positius qualsevols que no tenen cap factor primer major de 7, sempre n'hi ha dos tals que el seu producte és un quadrat perfecte.

Solució:
Sigui X el conjunts dels 17 nombres de l'enunciat, aquest pot ser definit de la següent manera:

$$X = \{2^{a_i}3^{b_i}5^{c_i}7^{d_i}; a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{N}; 1 \le i \le 17\}$$

Considerem els exponents a_i, b_i, c_i, d_i mòdul 2. Aquests poden o ser 1 o 0, per tant hi ha com a molt $2^4 = 16$ nombres diferents. D'acord amb el principi de les caselles n'hi ha almenys $\lceil 17/16 \rceil = 2$, tals que són iguals, i.e, la paritat dels exponents de cada factor primer respectivament és la mateixa. Se'n segueix que la suma dels exponents relatius a cada factor primer de cada nombre és divisible per 2, equivalentment, el producte dels dos nombres és un quadrat perfecte.

PROBLEMA Demostrar que en qualsevol conjunt A de 13 reals diferents, existeixen $x, y \in A$ tals que:**

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} \le 2 - \sqrt{3}$$

Solució:
Sigui $x_i = \tan \alpha_i$. Llavors:

$$\frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = \tan(\alpha_i - \alpha_j)$$

A més, observem que:

$$\tan(2arctan(2-\sqrt{3})) = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} = \tan 15$$

Considerem ara la circumferència goniomètrica, dividim-la en 4 quadrants. És clar que $\tan \alpha = \tan(180 + \alpha)$, per tant podem suposar sense pèrdua de generalitat que tots els α_i es troben en els dos primers quadrants, que formen una semicircumferència. És clar que si distribuïm 13 angles entre dos quadrants, d'acord amb el principi de les caselles n'hi haurà alemenys 7 en un mateix quadrant. Dividim aquest quadrant en 6 sectors circulars iguals, d'aquesta manera, qualssevol dos angles que estiguin en un mateix sector difereixen com a molt de $\frac{90}{6} = 15$ graus. Per tant, altra vegada d'acord amb el principi de les caselles, de 7 angles almenys n'hi haurà dos, α_i i α_j, amb $\alpha_i > \alpha_j$; que estaran en el mateix sector circular i que per tant la seva diferència serà igual o menor que 15. Tenint en compte les propietats de la funció tangent se'n segueix que:

$$0 < \tan(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \le \tan 15 = 2 - \sqrt{3}$$

PROBLEMA (OCanM 1997-3) Sigui $f(n)$ el nombre de permutacions a_1, a_2, ..., a_n de $1, 2, ..., n$ tals que:**

- $a_1 = 1$

- $|a_i - a_{i+1}| \le 2$, $i = 1, 2, ..., n-1$

Determinar si $f(1996)$ és o no divisible per 3.
Solució:
Considerem els primers casos:

- $n = 1$: (1)
- $n = 2$: $(1, 2)$
- $n = 3$: $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$
- $n = 4$: $(1, 3, 4, 2); (1, 3, 2, 4); (1, 2, 4, 3); (1, 2, 3, 4)$
- $n = 5$: $(1, 2, 4, 3, 5); (1, 3, 5, 4, 2); (1, 3, 2, 4, 5); (1, 2, 3, 5, 4); (1, 2, 3, 4, 5); (1, 2, 4, 5, 3)$

Per tal de buscar una recurrència per a $f(n)$, definim $g(n)$, $h(n)$ i $i(n)$ de la següent manera:

- $g(n)$: El nombre de permutacions de l'enunciat tals que $a_n = n$.
- $h(n)$: El nombre de permutacions de l'enunciat tals que $a_n = n - 1$.
- $i(n)$: El nombre de permutacions de l'enunciat en què n i $n - 1$ són dos nombres consecutius tals que cap dels dos es troba al final de la permutació.

Començarem buscant $g(n)$. Considerem les permutacions de l'enunciat de longitud $n - 1$. Si volem afegir-hi un $a_n = n$ al final per obtindre una permutació de longitud n, o bé $a_{n-1} = n - 1$ o $a_{n-1} = n - 2$. Que acabin amb $n - 1$ n'hi ha exactament $g(n - 1)$. Per a les que s'acaben amb $n - 2$, les possibilitats pel valor de a_{n-2} són, $a_{n-2} = n - 3, n - 1$. Si $a_{n-2} = n - 3$ llavors no podríem col·locar el nombre $n - 1$. En canvi, si $a_{n-2} = n - 1$ llavors $a_{n-3} = n - 3$ i com que la resta de nombres que queda per col·locar són tots menors que $n - 3$, això ens permet assegurar que hi ha exactament $g(n - 3)$ permutacions de longitud $n - 1$ tals que $a_{n-1} = n - 2$. En conclusió, hem arrivat a que $g(n) = g(n - 1) + g(n - 3)$.
Prosseguim buscant $h(n)$. Considerem les permutacions de longitud $n - 1$. Si volem afegir-hi el nombre n entre dos nombres d'aquesta per per tal d'obtindre una permutació de longitud n que acabi amb $n - 1$, necessàriament n l'haurem de posar entre $n - 1$ i $n - 2$, és a dir que haurem de tindre que $a_{n-2} = n - 2$, $a_{n-1} = n$ i $a_n = n - 1$. Per tant és fàcil veure que $h(n) = g(n - 2)$.
Finalment calculem $i(n)$. Per tal de construir les permutacions per al cas n a partir de $n - 1$, necessitem afegir el nombre n entre dos membres consecutius no finals, és a dir, a dos membres a_i, a_{i+1} amb $1 < i < n - 1$, a les permutacions de longitud $n - 1$ tals que els seus valors siguin $n - 1$ i $n - 2$, o afegir n entre els membres consecutius $n - 1$ i $n - 2$ de les permutacions de $n - 1$ tals que $a_{n-1} = n - 2$. En el primer cas en trobem $i(n - 1)$, en el segon cas, com que $a_{n-2} = n - 1$ i $a_{n-1} = n - 2$, necessàriament $a_{n-3} = n - 3$ i per tant d'aquests n'hi ha $g(n - 3)$. En total doncs, $i(n) = i(n - 1) + g(n - 3)$, com a conseqüència, $i(n) = g(n - 3) + g(n - 4) + ... + g(1) + i(3) = g(n - 3) + g(n - 4) + ... + g(1)$.
Ara, a partir de $g(n)$, $h(n)$ i $i(n)$ és fàcil construir una recurrència per a $f(n)$:

$$f(n) = g(n-1)+h(n-1)+i(n-1) = g(n-2)+g(n-4)+g(n-3)+g(n-3)+g(n-4)+...+g(1) =$$

$$= g(n-2) + 2(g(n-3) + g(n-4) + ... + g(1))$$

Com que d'acord l'expressió anterior $f(n-1) = g(n-3) + 2(g(n-4) + g(n-5) + ...)$, llavors $2(g(n-4) + g(n-5) + ...) = f(n-1) - g(n-3)$. Per tant, $f(n) = g(n-2) + 2g(n-3) + f(n-1) - g(n-3) = f(n-1) + g(n-2) + g(n-3)$.
Si prenem ara $f(n)$ i $g(n)$ mòdul 3 es pot veure que $f(n)$ té de període 24:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f(n)	1	1	2	1	0	0	2	0	1	1	2	1	0	2
g(n)	1	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1	2	0	1

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
f(n)	1	1	0	1	2	1	0	0	2	0	1	1	2
g(n)	0	0	1	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1

Finalment, com que $1996 \equiv 4 \bmod 24$, $f(1996) \equiv f(4) \equiv 1 \bmod 3$, concloem que $f(1996)$ no és divisible per 3.

PROBLEMA* (OME 1996-5) A Port Aventura s'hi troben 16 agents secrets. Sabem que si l'agent A vigila a l'agent B, llavors B no vigila a A. A més, qualssevol 10 agents poden ser numerats de tal manera que el primer vigila al segon, el segon vigila al tercer, ..., l'últim (el desé) vigila al primer. Provar que qualssevol 11 poden ser numerats de la mateixa manera.

Solució:
Sigui $X = \{A_1, A_2, ..., A_{16}\}$ el conjunt dels 16 agents. La primera observació que cal fer és que tot agent A ha de vigilar almenys 7 agents més, ja que en cas contrari, si suposem que A només vigila a $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_6}$ el grup de 10 agents $X/A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_6}$ no podria ser numerat com se'ns diu a l'enunciat. De la mateixa manera, es prova que almenys A ha de ser vigilat per 7 agents. Per tant, el nombre d'agents que vigilen a un agent A més el nombre d'agents que vigila A ha de ser com a mínim 15.
Ara, escollim qualssevol 10 agents i numerem-los de tal manera que el primer diem-li A_{j_1} vigila al segon A_{j_2}, el segon vigila al tercer A_{j_3}, ..., l'últim $A_{j_{10}}$ vigila al primer. Escollim un agent qualsevol, suposem A_{j_1}, si A_{j_1} vigila a un agent el qual vigila a A_{j_2} ja hem acabat, podríem numerar aquest agent A'_{j_2} i la resta $A'_{j_1} = A_{j_1}$, $A'_{j_3} = A_{j_2}$, ..., $A'_{j_11} = A_{j_10}$, de tal manera que el primer vigilaria al segon, el segona al tercer, ..., l'últim (onzé) al primer.
Suposem ara el cas en què no existeix tal agent, és a dir, que A_{j_1} no vigila a cap agent el qual vigili a A_{j_2}, com que A_{j_1} i A_{j_2} vigilen com a mínim 7 agents cada un, i com a mínim són vigilats per 7 agents, i a més no poden vigilar un agent que els vigili a ells, ha d'existir un únic agent, diem-li B, que no sigui vigilat per A_{j_1} i que no vigili a A_{j_2}, però això és una contradicció, perquè llavors, el nombre d'agents que vigila B més el nombre d'agents que vigilen a B seria com a molt $16 - 2 = 14 < 15$. Per tant hem arrivat a una contradicció i per tant no pot existir el tal agent B.
Concloem que es poden numerar 11 agents de manera que el primer vigili al segon, el segon al tercer i així successivament fins a que el onzè vigili al primer.

PROBLEMA (Moldàvia Test de Selecció 2008-2) Direm que un conjunt $\{1, 2, 3, ..., 3k\}$ te la propietat P si pot ser descomposat en ternes disjuntes tals que en cada una d'elles hi hagi un nombre que sigui igual a la suma dels altres dos nombres. Provar que:**

- **El conjunt $\{1, 2, 3, ..., 3324\}$ té la propietat P.**
- **El conjunt $\{1, 2, 3, ..., 3309\}$ no té la propietat P.**

Solució:
Primer de tot observem que la condició necessària perquè un conjunt $\{1, 2, 3, ..., 3k\}$ tingui la propietat P és que la suma dels seus elements sigui parell, per tant hem d'imposar que:

$$1 + 2 + ... + 3k = \frac{3k(3k+1)}{2} \equiv 0 \bmod 2 \Leftrightarrow 3k(3k+1) \equiv 0 \bmod 4 \Leftrightarrow k \equiv 0, 1 \bmod 4$$

Així doncs, d'acord amb el que hem provat, el segon conjunt no pot tindre la propietat P ja que $3309 = 3 \cdot 1103 = 3 \cdot (4 \cdot 275 + 3)$. Queda veure doncs, que el primer conjunt té efectivament la propietat P. Per veure això observem que el conjunt $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ té la propietat P:

$$\{1, 2, 3, ..., 12\} = (1, 11, 12) \cup (2, 6, 8) \cup (3, 7, 10) \cup (4, 5, 9)$$

Per tant, com que $12 \mid 3324$ podem partir el conjunt $\{1, 2, ..., 3324\}$ en subconjunts disjunts $\{12k + 1, 12k + 2, ..., 12k + 12\}$ amb $0 \leq k \leq 276$ de tal manera que cada un d'aquests subconjunts disjunts té la propietat P, d'aquesta manera, queda provat que el conjunt $\{1, 2, ..., 3324\}$ també té la propietat P.

PROBLEMA (IBERO 1993-5) Siguin P i Q dos punts diferents en el pla. Definim $m(PQ)$ la mediatriu del segment PQ. Sigui S un conjunt finit de punts en el pla, amb més d'un element tal que compleix la següent propietat:**

- **Si dos punts P i Q estan en S, llavors $m(PQ)$ intersecta a S.**
- **Si P_1Q_1, P_2Q_2 i P_3Q_3 són tres segments diferents amb extrems pertanyents a S, llavors no hi ha cup en S tal que pertanyi als tres segments $m(P_1Q_1)$, $m(P_2Q_2)$ i $m(P_3Q_3)$.**

Determinar el nombre de punts que pot tindre S.
Solució:
Sigui n el nombre de punts d'un conjunt S de propietats esmentades a l'enunciat. Provarem que S només pot tindre o bé 3 o bé 5 punts.
Per veure això, primer de tot, d'acord amb segona condició de l'enunciat:

$$\frac{\binom{n}{2}}{2} \leq n \Leftrightarrow n \leq 5$$

Per tant només queda considerar els casos en què $n = 2, 3, 4, 5$. Els casos $n = 3$ i $n = 5$ són possible, només cal tindre un tres punt que formin un triangle equilàter i cinc punts que

formin un pentàgon regular, respectivament, per veure que efectivament es compleixen les dos propietats requerides a l'enunciat. Anem a veure perquè els casos $n = 2$ i $n = 4$ no són possibles.
En el cas $n = 2$, si només existeixen dos punts en S, diguem-los P i Q, llavors $m(PQ)$ hauria de contindre un tercer punt X que és diferent de P i Q, que és una contradicció.
En el cas $n = 4$, suposem que els punts que tenim són A, B, C i D. Hi han d'haver exactament $\binom{4}{2} = 6$ mediatrius, per tant almenys hi haurà un punt, suposem que és A pertanyent a dos mediatrius, posem $m(BC)$ i $m(CD)$. Aquestes dues mediatrius han de ser diferents, perque en cas contrari trindríem que $B = D$ que és una contradicció, per tant al ser $m(BC)$ i $m(CD)$ diferents, A és el circumcentre del triangle BCD i com a conseqüència $m(DB)$ també intersecta a A, cosa que contradiu l'enunciat.
Així doncs, els possibles valors són $n = 3$ i $n = 5$.

PROBLEMA (IBERO 2000-1) Considerem un polígon regular de n costats ($n \geq 3$). Numerem els vèrtexs de l'1 fins a n i tracem totes les diagonals possibles. Demostrar que per a un n senar sempre és possible a cada diagonal i cada costat un nombre del conjunt $\{1, 2, ..., n\}$ de tal manera que es verifiquin aquestes condicions:**

- **El nombre assignat a un segment no sigui igual a cap dels dos nombres que té als seus extrems.**
- **Els nombres assignats a tots els segments que surten d'un mateix vèrtex siguin tots diferents.**

Solució:
Provarem que assignant al segment que té d'extrems els nombres i i j, amb $i, j < n$ el nombre $i + j \bmod n$ i al segment que té d'extrems els nombres n i j el nombre $2j \bmod n$ es compleix les restriccions imposades en l'enunciat.
En efecte, suposem el contrari, que per algun segment d'extrems i i j amb $i, j < n$, el nombre assignat en aquest sigui igual a un dels nombres dels extrems, llavors tenim que $i + j \equiv i \bmod n$ o $i + j \equiv j \bmod n$. En tots dos casos arrivem a què $i \equiv j \bmod n$, que és una contradicció, perquè $i, j < n$ i $i \neq j$. Ara suposem que per algun segment d'extrems n i j, el nombre assignat en aquest sigui igual a un dels nombres dels seus extrems, llavors tindríem que $2j \equiv j \bmod n$ on arrivem a què $j \equiv 0 \bmod n$ que és una contradicció ja que $j < n$ o $2j \equiv n \bmod n$ que també és una contradicció pel fet que n és senar.
Ara suposem que per un vèrtex de nombre j surten dos segments d'extrems $j + k$ i $j + h$ tals que el nombre assignat en ells sigui igual, llavors tindríem que $j + k \equiv j + h \bmod n$ i per tant $k \equiv h \bmod n$ que és una contradicció perquè $h \neq k$.
Per tant, queda provat l'enunciat.

PROBLEMA (IBERO 1997-3) Sigui $n \geq 2$ un nombre natural i D_n el conjunt de punts (x, y) en el pla tals que $x, y \in \mathbb{Z}$ i $|x|, |y| \leq n$. Provar que:**

- **Si col·loregem D_n amb tres colors diferents (cada punt només es pot pintar d'un únic color), sempre existeixen dos punts del mateix color en D_n tals**

que estan continguts en una recta que no conté a cap altre punt de D_n.

- **Determinar una manera de col·lorejar els punts de D_n amb 4 colors diferents de tal manera que tota recta que contingui només dos punts de D_n, llavors aquests dos punts tinguin colors diferents.**

Solució:

Començant provant el primer apartat. Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que hem col·lorejat D_n amb 3 colors i que tota recta en D_n que només conté 2 punts aquests dos punts tenen colors diferents. Veurem com això no és possible.

Sigui Q_1 el quadrat de vèrtexs (n,n), $(n-1,n)$, $(n-1,n-1)$ i $(n,n-1)$, Q_2, Q_3 i Q_4 els quadrats simètrics de Q_1 respecte l'eix y, la recta $y=-x$ i l'eix x, respectivament. Cada un d'aquests quadrats té 4 punts de D_n, per tant, pel principi de les caselles hi haurà almenys $\lfloor 4/3 \rfloor + 1 = 2$ punts del mateix color. D'acord amb la hipòtsis plantejada doncs, necessàriament hem de tindre que $(n-1,n-1),(n,n)$ en Q_1, $(-(n-1),n-1)$ en Q_2, $(-n,-n),(-(n-1),-(n-1))$ en Q_3 i $(n,-n),(n-1,-(n-1))$ en Q_4 siguin les parelles de punts d'igual color (els dos punts de cada parella tenen el mateix color), que anomenem respectivament P_1, P_2, P_3 i P_4, ja que sinó ja hem arrivat a una contradicció.

Suposem que els tres colors de què disposem són A, B i C. Suposem que hem assignat a P_1 el color A i a P_2 el color B. Llavors, almenys un dels punts de Q_1/P_1 ha de ser o B o C, suposem que aquest és $(n-1,n)$ (el cas en què aquest punt sigui $(n,n-1)$ el raonament és el mateix). Si el punt $(n-1,n)$ el pintem de color B, arrivem a una contradicció perquè se'ns formaria una recta d'extrems $(n-1,n)$ i $(-n,n)$ del mateix color que no conté cap altre més punt de D_n. Si suposem que el punt $(n-1,n)$ el pintem de color C, llavors, el punt $(-n,n-1)$ no pot ser pintat de color A ni color C i per tant s'ha de pintar de color B. Això ens porta a què el punt $(-(n-1),n)$ s'ha de pintar de color C, i raonant anàlogament, arrivem a què perquè no es produeixi cap contradicció, hem de tindre $(-n,-n),(-n,-(n-1)),(-(n-1),-(n-1))$ de color A, $(n,-n),(n,-(n-1)),(n-1,-(n-1))$ de color B i $(-(n-1),-n),((n-1),-n)$ de color C. Ara però, tant si pintem el punt $(n-2,-n)$ de color A, B o C arrivem a una contradicció ja que llavors la recta d'extrems $(n-2,-n),(-n,-(n-1))$, $(n-2,-n),(n,-(n-1))$ o $(n-2,-n),(n-1,n)$ respectivament, té els extrems del mateix color i a més no conté cap altre punt de D_n.

En resum doncs, hem arrivat que per qualsevol col·loració de D_n amb tres colors sempre existeixen una parella de punts del mateix color que determinen una recta que no conté cap altre punt de D_n, que és el que se'ns demana provar al primer apartat.

El segon apartat és força més fàcil que el primer. Si A, B, C i D són els colors de què disposem és suficient pintar un punt de coordenades (x,y) d'acord amb la següent regla. A si tant x com y són parells, B si x és parell però y senar, C si x és senar però y parell i D si tant x com y són senars.

És fàcil verificar que d'acord amb aquestes condicions s'aconsegueix al què se'ns demana a l'enunciat.

PROBLEMA (OME 2008-6) Pintem el pla amb 7 colors diferents. És possible trobar un trapezi inscriptible en una circunferència tal que els seus quatre vèrtexs siguin del mateix color?**

Solució:

La resposta és que sí.

Considerem H un octàgon regular $A_1A_2...A_8$ de centre O. Sigui F la família d'octàgons homotècics a H sent l'homotècia de centre O. Numerarem tot octàgon $H' \neq H$ de F com $X_1X_2...X_8$ amb X_1, X_2, ..., X_8 en els raigs OA_1, OA_2, ..., OA_8, respectivament.

Observem que cada octàgon, almenys tindrà, pel principi de colomar, una corda d'extrems amb els mateixos colors. Si ara prenem un n tal que $\lfloor n/7 \rfloor + 1 > \binom{8}{2}$, és fàcil veure que si escollim n octàgons de F, com que les cordes d'un mateix octàgon només tenen $\binom{8}{2}$ direccions, pel principi de palomar, almenys 2 octàgons $M_1M_2...M_8$ i $N_1N_2...N_8$ tindràn dues cordes M_iM_j i N_iN_j, respectivament, tals que tenen els extrems del mateix color i a més són homotèciques de centre O. Se'n segueix, que $M_iM_jN_iN_j$ és un trapezi isòscel·les, i per tant inscriptible en una circumferència.

Capítol 7

Conclusió

Les matemàtiques no són tan sols una ciència, no són una simple eina de càlcul com alguns pensen, són una manera d'entendre els nous reptes, una manera d'enfrontar-nos a noves situacions, i ha estat un dels grans motors del desenvolupament de la nostra societat. El fet de tindre un cert interès pel que passa al nostre voltant, el fet que, en el moment de sorgir-nos un dubte o preguntar-nos una determinada qüestió tinguem la inquietud per buscar-ne una resposta, una causa o una raó, ha estat un dels principals elements que justifica el progrés experimentat en bona part de la nostra història i és aquesta, en part, l'essència que trobem en les matemàtiques, més en concret, en la resolució de problemes matemàtics. Actualment, les matemàtiques tenen un paper molt destacat sobretot en l'educació (a part de la investigació). En un país en què el nivell educatiu ha baixat tant en picat en darrers anys les matemàtiques han esdevingut un dels pocs lluitadors ferms en contra d'aquesta precarietat en l'ensenyament.

Tal com il·lustra aquest treball, la resolució de problemes permet potenciar moltes de les capacitats de l'estudiant: la capacitat lògica i deductiva, la capacitat d'abstracció, la capacitat de concentració, adquirir una actitud crítica amb un mateix i amb l'entorn, disposar d'un cert grau d'autonomia moral per prendre decisions i inclús la capacitat creativa, aptitud associada molts cops solament a l'art. La gran dificultat dels problemes proposats en el present treball en comparació amb la dels problemes o exercicis convencionals que es realitzen a l'escola o institut reflexa aquest dèficit en el sistema educatiu del nostre país i mostra la necessitat d'adquirir un compromís col·lectiu per tal de pal·liar-lo.

En un enfocament més pràctic, també queda demostrada la necessitat de l'estudiant d'imposar-se un mètode de treball estructurat i pautat, uns hàbits d'estudi i la necessitat d'adquirir la iniciativa d'aprendre per ell mateix, d'una manera independent però igualment rigorosa, que li permeti assolir amb èxit els objectius acadèmics que es proposi en el futur. Creiem profundament, que la iniciativa que hem pres en aquest treball/manual, permetrà a l'estudiant endinsar-se en nous horitzons en què descobreixi la vertadera essència i bellesa de les matemàtiques i la resolució de problemes, i contribuir així a què les matemàtiques siguin valorades com una matèria divertida, atractiva i interessant, esborrant la idea distorsionada que tenen alguns de què aquesta és una ciència ensopida, basada en càlculs avorrits i extenuants.

Per tancar aquest últim apartat, només queda expressar com a últimes paraules, la nostra voluntat de que aquest treball esdevingui l'inici d'un projecte col·lectiu de difusió de les matemàtiques que serveixi com un compendi de problemes olímpics, i que s'ampliï i es complementi amb idees, suggeriments, correccions i aportacions de tercers.

Bibliografia

[1] AIGNER, M., AND ZIEGLER, G. M. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2000.

[2] ANDREESCU, T. *Contests 1996-1997: Olympiad problems from around the world, with solutions, AMC 1998*. Springer, 1996.

[3] ANDREESCU, T. *Contests 1997-1998: Olympiad problems from around the world, with solutions, AMC 1999*. Springer, 1997.

[4] ANDREESCU, T. *104 Number Theory Problems*. Dover, 2001.

[5] COLECTIU. *Competiciones Matemáticas en Estados Unidos*. Euler Editorial, 1994.

[6] COXETER, H., AND GREITZER, S. *Retorno a la Geometria*. Euler Editorial, 1993.

[7] DJUKIC, D. *Inversion*. `http://www.imomath.com/tekstkut/inversion_ddj.pdf`.

[8] DJUKIC, D. *Quadratic Congruences*. `http://www.imomath.com/tekstkut/quadcong_ddj.pdf`.

[9] DÖRRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, 1965.

[10] ENGEL, A. *Problem Solving Strategies*. Springer, 1997.

[11] LUKIC, M. *Projective Geomtry*. `http://www.imomath.com/tekstkut/projg_ml.pdf`.

[12] MURRAY, S. *Olimpíadas Matemáticas II*. Euler Editorial, 1993.

[13] RADOVANOVIC, M. *Complex Numbers in Geometry*. `http://www.imomath.com/tekstkut/cnum_mr.pdf`.

[14] SHRKLARSKY, D., CHENTZOV, N., AND YAGLOM, I. *The USSR Olympiad Book*. Dover Publications, 1993.