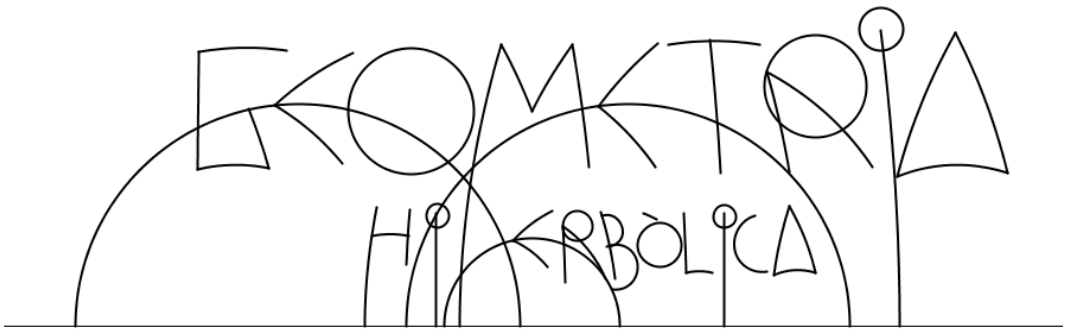


Més enllà d'Euclides

Newton i Neumann

Matèria: Matemàtiques
11 de Desembre de l'any 2015

Para mí sigue siendo una cuestión abierta: si mi trabajo pertenece al ámbito de las matemáticas o al del arte.

-M.C. Escher

Índex

Capítol 1

Introducció

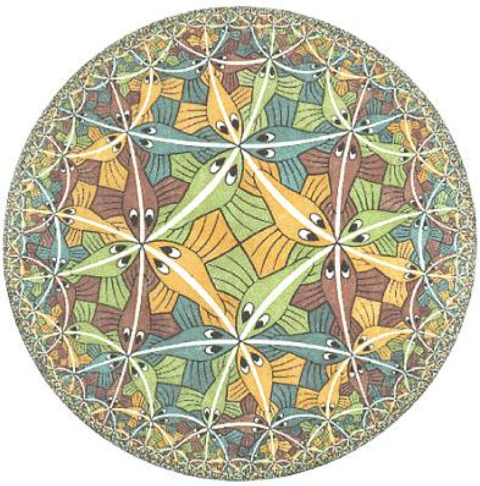
1.1 Motivacions

Som l'Anna Bernardo López i el Jordi Arnau Montañà López, alumnes de Batxillerat de la modalitat tecnològica. El nostre Treball de recerca ha estat un intent d'aproximar-nos a un tipus de geometries noves per a nosaltres: les geometries no euclidianes.
El primer cop que vam sentir a parlar de les geometries no euclidianes va ser a tercer d'ESO, en una classe de matemàtiques del professor Manuel Segura. Ens va dibuixar un triangle hiperbòlic a la pissarra i ens va preguntar que què era. La sorpresa en revelar la resposta no va passar de curiositat. Dos anys més tard, aquesta curiositat va servir com a base del nostre Treball de recerca.
Un cop vam fer recerca en el tema i vàrem descobrir que no tan sols es tractava de triangles de costats curvilinis vam entendre que les geometries no euclidianes desmuntaven les matemàtiques que ens ensenyaven a l'escola. Vam decidir que calia aprofundir en aquest tema, que semblava amagat del nostre dia a dia. Més aviat, calia descobrir els secrets que amagava.
La nostra ambició davant d'aquest propòsit ha estat sempre la màxima possible, intentant que la consciència de la dificultat, la constància i la confiança en nosaltres mateixos fessin que les dificultats es poguessin superar a base de l'esforç.
La satisfacció de veure de mica en mica que aquest nou món matemàtic cobrava sentit per a nosaltres, va fer que la il·lusió que teníem per aquest treball augmentés progressivament i que cada vegada tinguéssim més ganes d'endinsar-nos en aquesta nova geometria i volguéssim aprendre més.
Les matemàtiques no són només fórmules complexes i expressions estranyes; van molt més enllà. Es tracta d'una simfonia ordenada i precisa on sempre

s'obté un resultat exacte. La geometria, és una de les parts més belles de les matemàtiques on, l'art i l'intel·lecte congenien per crear formes i donar vida i sentit als nombres.
En aquest treball de recerca volem obrir les portes a tots els estudiants curiosos i interessats en les matemàtiques que, com nosaltres, vulguin fer un pas més en aquest nou i apassionant món geomètric.
Amb el que ens han ensenyat a l'escola és normal que quan pensem en matemàtiques ens vingui una imatge estranya així al cap:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \gamma(u_n) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(t) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Però...per què no pensar així?



És curiós però aquesta obra d'art, creada per M.C.Escher, mostra moltes de les bases del nostre treball de recerca: *Més enllà d'Euclides*.

Capítol 2

Objectius del treball

2.1 Objectius conceptuals

Els nostres objectius en referència a l'assoliment de la matèria de coneixements són:

- Entendre el concepte de geometria i com es defineix, per tal de poder contrastar els diferents tipus de geometries.
- Conèixer la història de la geometria i els descobriments que han portat a la creació de noves geometries.
- Estudiar i comprendre les geometries no-euclidianes centrant-nos sobretot en la geometria hiperbòlica i, en particular, en el model del Semiplà de Poincarè.
- Aprendre a treballar amb conceptes abstractes i assolir entendre'ls.
- Dominar el programa GeoGebra per utilitzar-lo en la creació d'eines per representar el Semiplà de Poincarè sobre el pla euclidià.
- Ser capaços de treballar amb objectes en el Semiplà de Poincarè.

2.2 Objectius procedimentals

Els nostres objectius en referència a la forma procedimental per dur a terme el treball són:

- Aprendre a estudiar conceptes nous de manera semi autònoma, aprofitant també l'ajuda d'un professor universitari i un de l'escola.
- Assolir un nivell de matemàtiques en aquest àmbit suficient com per treballar amb les geometries no euclidianes.
- Treballar de manera contínua i seriosa per tal de realitzar un treball de qualitat i amb el major grau de professionalitat possible.
- Elaborar un treball adequat formalment, amb un text ben cohesionar i gramaticalment correcte.
- Procurar una fàcil comprensió pel lector dels conceptes matemàtics més complexos mitjançant un llenguatge culte però alhora precís i clar.
- Utilitzar el llenguatge de processament de textos LaTeX.
- Aprofundir en la utilització del programa GeoGebra.

2.3 Objectius humans

Finalment, els nostres objectius humans, els quals han permès una bona elaboració del treball ja que degut a aquests l'hem pogut gaudir, són:

- Organitzar-nos per poder fer un bon treball a llarg termini en profunditat.
- Aprendre a contrastar les opinions amb el grup per tal de trobar la millor solució als problemes que puguin anar sortint.
- Seguir endavant tot i que costi d'assimilar tots els conceptes fàcilment.
- Aprendre a treballar en grup i distribuir la feina per tal de ser més eficients.
- Arribar a un nivell de coneixement homogeni per part de tots els integrants del grup.
- Aprendre dels professors que ens tutoritzen el treball i saber fer les correccions que ens demanen.

Capítol 3

Metodologia emprada

Aquest treball de recerca ha requerit en un principi moltes hores de cerca d'informació sobre el camp triat ja que era totalment desconegut per a nosaltres.

Al començament no sabíem ben bé què volíem fer o què buscàvem: teníem clar el tema principal però desconeixíem per complet aquest tipus de Geometria. És per això que ens vam posar en contacte amb en Josep Maria Brunat, professor del departament de Matemàtica Aplicada II de la UPC, per tal de ser assessorats. Els primers mesos vam anar tenint reunions cada dues setmanes per acabar de concretar com volíem fer el treball, és a dir, si el volíem enfocar de forma més descriptiva (abraçant una mica cada model de Geometria no euclidiana) o sí preferíem centrar-nos més aviat en un model en concret i desenvolupar, fins on poguéssim, la part algebraica d'aquest. Poc a poc ens vam fer una idea general de l'amplitud del nostre treball de recerca i també de la seva dificultat. Ens vam decidir finalment en treballar més a fons un model específic de Geometria no euclidiana perquè era un repte que, tot i requerir més feina a nivell algebraic, ens feia més il·lusió.

Per tal de dur a terme el treball s'han utilitzat diverses eines i suports, tant en paper com digitals.

Inicialment es va fer una recerca a internet dels conceptes més generals de la Geometria no euclidiana però es va necessitar l'ajut complementari de dos llibres de text proporcionats per en Josep Maria (esmentats a la bibliografia), i els apunts de la Universitat de Barcelona del professor Pedro Román (que han estat claus per a la realització d'aquest treball) per començar a adquirir els coneixements bàsics inicials. La cerca d'informació sobre les Geometries no euclidianes i, en especial, del Semiplà de Poincarè va ocupar moltes hores d'estudi ja que l'assoliment dels conceptes necessaris no ha resultat senzill.

Aquest treball es divideix en tres parts: la part descriptiva, on s'exposen tots els conceptes necessaris per a la comprensió de la geometria hiperbòlica;

la part algebraica, on apareix el desenvolupament matemàtic d'alguns conceptes bàsics del Semiplà de Poincarè i la part pràctica on es presenten les eines creades amb el Geogebra.

Per a la representació gràfica d'objectes i del Semiplà de Poincarè s'ha utilitzat l'aplicació de programari lliure anomenada Geogebra. Es tracta d'un programa que permet visualitzar i representar de manera interactiva objectes geomètrics i treballar amb ells. L'ús de l'aplicació Geogebra paral·lelament amb l'esudi teòric de les figures geomètriques del Semiplà de Poincarè va facilitar la comprensió d'aquest model de la Geometria Hiperbòlica així com també, va permetre el desenvolupament de les eines que es volien crear conjuntament amb la redacció del treball. El procediment seguit per a la creació de les eines hiperbòliques es basava en deduir analíticament les fórmules necessàries per a la representació dels objectes geomètrics a paper per tal d'introduir les equacions deduïdes al Geogebra posteriorment.

S'ha utilitzat el programa GanttProject, que permet introduir fites en una línia de temps, per a la planificació del treball i el seguiment dels terminis i dels objectius marcats. Aquest programari ha estat molt útil a l'hora de realitzar el seguiment del treball ja que permet ser conscient dels terminis acordats i del temps d'una manera molt més visual.

La redacció del treball ha estat executada amb un software online de programació en LaTeX anomenat ShareLatex. Aquest llenguatge de programació és de codi obert i molt utilitzat en el món acadèmic per a la composició de tesis i llibres tècnics de qualitat. Permet a qui escriu el treball centrar-se més en el contingut i no pas en la forma. Cal esmentar que l'ús del LaTeX per a l'escrit va resultar dificultós en un inici però, un cop dominat aquest llenguatge, la redacció quedava més clara i formal.

Capítol 4

Geometria

4.1 Història de la geometria

Les bases de la geometria formal les podríem establir al segle III aC, a Alexandria, quan Euclides publicà el seu llibre *Elements*, un recull de tot el coneixement matemàtic que es tenia fins llavors, on va definir la geometria euclidiana. Aquesta venia definida per cinc axiomes:

I Una recta es pot definir amb dos punts.

II Qualsevol segment es pot allargar indefinidament en una recta.

III Es pot traçar una circumferència donats un centre i un radi qualsevol.

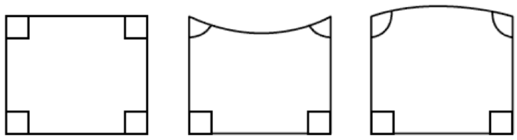
IV Tots els angles rectes són iguals entre sí.

V Si una recta en talla dues d'altres de manera que la suma dels angles interiors creats en un costat sigui menor a dos de rectes, aquelles dues rectes, prolongades tant com sigui necessari, s'intersecaran pel costat en què els angles són menors a dos de rectes.

Els quatre primers van sent acceptats com a veritats irrevocables tant pels seus contemporanis com pels matemàtics posteriors. El cinquè, conegut com el cinquè postulat d'Euclides o axioma de les paral·leles no es va poder demostrar i, per tant, va ser posat en dubte i va passar d'axioma a postulat. Per tal de formular aquest postulat de manera més senzilla es diu que per un punt exterior a una recta només passa una recta paral·lela a la primera.

Els primers intents de demostrar el postulat els va dur a terme Omar Khayyam (s XII), posteriorment, Nàssir-ad-Din at-Tussí (XIII) i John Wallis (XVII) també va intentar demostrar-lo. Girolamo Saccheri (1667-1733), matemàtic italià, també ho intentà, buscant la reducció a l'absurd a partir de quadrilàters amb angles que sumaven més i menys de 360º.

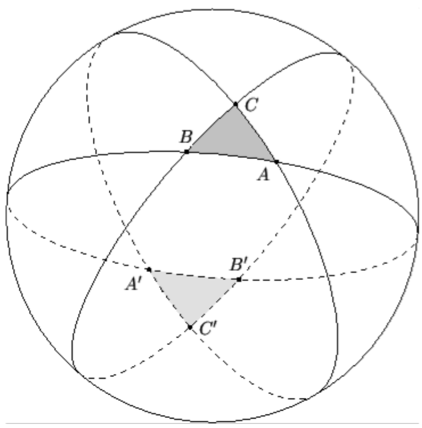
Figura 4.1: Quadrilàter amb angles rectes, quadrilàter de Saccheri amb angles aguts, quadrilàter de Saccheri amb angles obtusos



Finalment, qui varen demostrar que el cinquè axioma no mereixia aquesta categoria, i que per tant va passar a ser el cinquè postulat, varen ser Lobatxevski i Bolyai. Ambdós varen desenvolupar les seves teories paral·lelament: l'un treballant en la geometria hiperbòlica i l'altre en l'esfèrica. Així, quedava desmentit l'axioma de les paral·leles, i la geometria va quedar separada en euclidiana, aquella que respectava el cinquè postulat d'Euclides, i la no euclidiana, aquella que no ho feia. Dins la geometria va aparèixer la parabòlica o euclidiana, la hiperbòlica (no euclidiana) i l'esfèrica (no euclidiana).

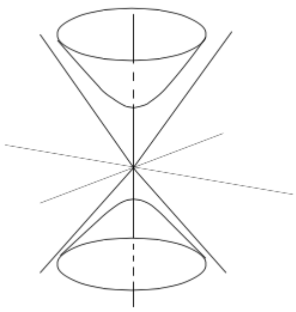
La geometria esfèrica substitueix el cinquè postulat d'Euclides per un que diu que no existeixen les rectes paral·leles. Aquesta es basa en un pla amb curvatura positiva amb forma esfèrica. Així, les rectes d'aquesta geometria són les línies geodèsiques de radi el de l'esfera, és a dir, formen circumferències màximes. D'aquesta manera, qualssevol dues rectes s'hauran de tallar en dos punts, un als antípodes de l'altre. Per tant, sent les rectes paral·leles aquelles la distància entre la qual no és nul·la, no existeixen les rectes paral·leles.

Figura 4.2: Model de la geometria esfèrica concebut per Bolyai

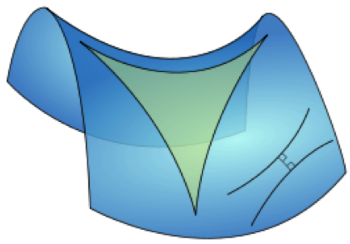


La geometria hiperbòlica substitueix el cinquè postulat d'Euclides per un que diu que per un punt extern a una recta donada passen infinites rectes paral·leles a aquesta. Es tracta d'un pla amb curvatura negativa, i la representació gràfica d'aquest és més complexa, sovint s'utilitza la imatge de la sella de muntar cavall, o hiperboloide. Les rectes conformen la menor distància entre qualssevol dos punts d'aquesta i, a causa de la curvatura del pla, adopten diferents aspectes depenent de la regió de l'hiperboloide en què es trobin.

Figura 4.3: Model de la sella de muntar o hiperboloide



(a) Hiperboloide



(b) Sella de muntar

Així doncs, després del descobriment d'aquest nou tipus de geometries: les no euclidianes, es va intentar crear unes bases de la geometria que satisfessin tant la descrita en Els Elements, d'Euclides, com les de Bolyai i Lobatxevski. Va ser l'any 1899 quan s'assolí aquesta fita, amb la publicació dels Fonaments de la geometria per part de David Hilbert. Aquest proposava un sistema d'axiomes vàlid per a les geometries conegudes. Per això, el seu sistema d'axiomes posa en relació tres conjunts d'objectes, que ell anomena punts, rectes i plans, segons les relacions *"pertànyer a"*, *"estar entre"* i *"ésser congruent"*. Val a dir que no defineix cap dels conjunts d'objectes ni tampoc les relacions que hi ha entre ells. Hilbert diu que existeixen aquests conjunts, i amb els seus axiomes en descriu el seu comportament, creant les relacions ja esmentades. A més, Hilbert no suposa l'existència dels nombres reals a la seva obra, fet que la complica. Aquesta nova geometria seria l'anomenada Geometria Absoluta, de la qual se'n deduirien la resta.

En resum, durant el segle XIX, després de segles de molts intents, el cinquè postulat d'Euclides va quedar finalment desmentit i, arran d'això, varen aparèixer noves geometries: les no euclidianes. A fi de crear una base de la qual es deduïssin les demés geometries, Hilbert va publicar la seva obra, que descriu la geometria de manera més abstracta.

4.2 Geometria absoluta

La geometria absoluta està formulada de manera abstracta, és a dir, no té associada cap representació gràfica ni model. Les geometries, tant les euclidianes com les no euclidianes, han de complir tots els axiomes de la geometria absoluta. En aquestes geometries es creen models i representacions gràfiques, en les que es defineix què s'entendrà per punt o per recta en aquella geometria. A partir d'aquests models es verificarà si un conjunt d'axiomes és vàlid o no.

Una geometria $\mathcal{G}$ està formada per dos conjunts d'objectes: $\mathcal{P}$ i $\mathcal{R}$, el conjunt dels punts i el de les rectes respectivament. Entre aquests dos conjunts existeixen tres relacions:*"pertànyer a", "estar entre"* i *"ésser congruent"*, que queden determinades pels axiomes.

Cal observar que cap dels objectes, ni punts ni rectes, i tampoc cap de les relacions tenen una definició pròpia, només sabem que entre ells s'han de complir un seguit de condicions: els axiomes. Punts i rectes són dos conceptes abstractes que es comporten seguint unes presumpcions que anomenem axiomes.

Aquests axiomes els podem classificar en tres grups: els axiomes d'incidència, els d'ordre i els de congruència. Cada grup determinarà una de les relacions: *"pertànyer a", "estar entre"* i *"ésser congruent"*, respectivament.

I. Axiomes d'incidència

La relació *"pertànyer a"* vincula punts i rectes i està determinada pels axiomes d'incidència.

Axioma I.1: Donats dos punts $A \neq B, \exists!\ r/A, B \in r$, sent r una recta.

Observem que a partir d'aquest axioma no podem deduir que una recta tingui, com a mínim, dos punts. L'axioma diu que, tenint dos punts A i B, només hi ha una recta r que els conté als dos. Pensem-ho de la següent manera: siguin tres punts $C \neq D \neq E, \exists!\ s/C, D, E \in s$ sent s la recta, però això no implica que una recta hagi de tenir, com a mínim, tres punts. Seguint la mateixa notació que fins ara, podem dir que la recta s està determinada pels punts C, D i E o que la recta r està determinada pels punts A i B.

Si el punt B també pertany a r, diem que A i B estan alineats. Si $A \in r, s$ sent $r \neq s$, direm que r i s es tallen a A o que A és un punt comú de les dues rectes.

Axioma I.2: Existeixen tres punts $A \neq B \neq C\ /C \notin r$, sent r la recta determinada pels punts A i B.

Aquest axioma es tradueix en què existeixen tres punts no alineats.

II. Axiomes d'ordre

La relació *"estar entre"* vincula tríades de punts d'una recta i està determinada pels axiomes d'ordre.

Axioma II.1: Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de punts de qualsevol recta i el conjunt de nombres reals que conserva la relació *"estar entre"*.

Aquest axioma ens diu que si assignem de manera ordenada (creixent o decreixentment) valors reals als punts d'una recta, es donarà que: si un punt A està entre dos punts B i C a la recta, el corresponent valor real A' també estarà entre els valors B' i C'. És a dir, si A està entre B i C tindrem B' < A' < C', o bé B' > A' > C'.

Si, per contra, tenim els valors reals i els assignem punts d'una recta, també es complirà la relació *"estar entre"*.

Per simplificar aquest procés d'anar assignant valors reals als punts d'una recta, formalment notarem A' com a $\phi(A)$, i l'anomenarem coordenada del punt A.

Amb l'axioma II.1 podem definir el segment de la següent manera:

Definició I.1: Siguin A i B dos punts i sigui r la recta que determinen. Anomenarem segment d'extremitats A i B o simplement segment $\overline{AB}$ el conjunt de punts de la recta r formats per A, B i tots els punts que estan entre A i B.

Sigui quina sigui la notació utilitzada, els segments $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ són el mateix.

Axioma II.2 (Axioma de Pasch): Siguin A, B i C tres punts diferents no alineats. Sigui r una recta que no passa per cap d'ells. Si r talla el segment $\overline{AB}$, llavors r talla un i només un dels segments $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

De l'axioma II.2 deduïm que una recta té, com a mínim, dos punts, com ara veurem: Suposem el cas enunciat a l'axioma. Si la recta r passa pel punt $P \in \overline{AB}$, llavors r ha de passar per un punt $Q \in \overline{BC}$ o bé $Q \in \overline{AC}$. Per tant, si es dóna el cas que r conté un punt, obligatòriament es dóna el cas que r conté dos punts. Donat que r no pot tenir zero punts, ja que llavors no hi hauria axiomes d'incidència, i que no en pot tenir només un, queda demostrat que, com a mínim, n'ha de tenir dos.

Dels axiomes vistos fins ara podem arribar a diverses conclusions:

Si tenim dos punts, $A, B \in r$, sempre hi haurà un punt $C \in r$ entre aquests dos, degut a l'axioma II.1. Ho notarem com A – C – B . També deduïm que, tenint tres punts de la recta, un estarà sempre entre els altres dos. Per l'axioma II.1., a més, veiem que entre els dos punts A i B hi haurà infinits punts.

Si tenim tres punts, O, A, B d'una recta r i O no està entre A i B, llavors direm que A i B estan sobre la recta r a un costat de O. Els punts de la recta r que estiguin al mateix costat de O que A els anomenarem semirecta d'origen O determinada per A.

Si tenim dues semirectes h, k amb el mateix origen O que no pertanyen a una mateixa recta, formen el que anomenarem angle.

III. Axiomes de congrüència

La relació ésser congruent compara segments i angles i està determinada pels axiomes de congruència.

Primer definirem els axiomes que permeten utilitzar la congruència de segments:

Axioma III.1: Siguin A i B dos punts diferents i A' un punt qualsevol que és l'origen de la semirecta r'. $\exists! B' \in r' / \overline{AB}$ és congruent amb el segment $\overline{A'B'}$. Ho notarem com $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

Axioma III.2:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{A'B'} \equiv \overline{AB} \\ \overline{A''B''} \equiv \overline{AB}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''} \tag{4.1}$$

Dels axiomes III.1 i III.2 podem deduir que la relació de congruència, al menys entre segments, és reflexiva, és a dir $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$. Mitjançant la deducció anterior, si $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, com que $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$, $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, és a dir la congruència és simètrica. També podem dir que és transitiva, ja que si $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ i $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, tenim $\overline{EF} \equiv \overline{CD}$ i per tant $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

Axioma III.3: Siguin $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ segments d'una recta r, sense punts interiors comuns i $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ segments d'una recta r', sense punts interiors comuns. Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ llavors $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Així, aquest últim axioma permetrà sumar i restar segments.

Ara definirem els axiomes que permetran utilitzar la congruència d'angles. Notarem un angle de costats h, k com $\widehat{hk}$:

Axioma III.4: Sigui r una recta, h una semirecta d'aquesta amb origen el punt O $\in$ r i k una semirecta qualsevol d'origen O. Existeix llavors una única semirecta k' d'origen O' tal que l'angle $\widehat{hk}$ és congruent a l'angle $\widehat{h'k'}$. Ho notarem com $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ i tal que els punts interiors de $\widehat{h'k'}$ estan en el costat del pla prefixat respecte a r'.

De manera senzilla podem dir que un angle $\widehat{hk}$ només es pot aplicar en un costat donat d'una semirecta, obtenint $\widehat{h'k'}$ de manera que els dos angles siguin congrüents.

Axioma III.5: Siguin A, B i C tres punts no alineats i A', B' i C' altres tres punts no alineats. Si es dóna que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, llavors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$.

Aquest axioma es pot entendre com que, donats dos triangles que notarem com $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, si dos dels seus costats i un dels seus angles són congruents, llavors tots els angles d'un triangle són congruents als de l'altre.

4.3 Inversions

Lobatxevski (l'inventor de la geometria hiperbòlica) no va concebre cap manera gràfica de representar els objectes geomètrics dins de la geometria hiperbòlica, fent molt difícil la visualització dels teoremes, ja que els va derivar únicament a partir de l'àlgebra pura. Per tal de comprendre millor aquesta geometria cal acompanyar-la d'una visualització gràfica que ens permeti entendre de forma més clara i senzilla tota la geometria. Per això es va recórrer a les inversions.

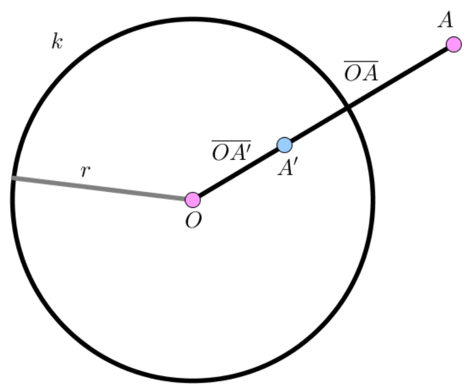
Les transformacions geomètriques ens permeten passar de qualsevol figura donada a una altra, de tal manera que la segona figura queda absolutament determinada donada la primera i viceversa. La translació paral·lela, el gir de la figura, la transformació de similitud, la projecció i la inversió són algunes de les transformacions geomètriques més habituals. Aquesta última, la inversió, és utilitzada en diversos àmbits de la matemàtica i concretament la utilitzarem per a la construcció del model que ens permet estudiar gràficament la geometria de Lobatxevski.

En aquest apartat examinarem les inversions i algunes de les seves propietats fonamentals.

Ens situarem en el pla euclidià. Siguin k una circumferència de radi r i centre

O i un punt A diferent de O. Tracem la semirecta OA i marquem sobre ella el punt A' , de tal manera que el producte dels segments $\overline{OA}$ i $\overline{OA'}$ sigui igual al quadrat de r : $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$

Figura 4.4: Inversió del punt A



Totes les figures geomètriques, línies i punts que podem dibuixar a l'exterior de la circumferència d'inversió es veuen reflectits a l'interior d'aquest gràcies a la fórmula esmentada anteriorment. Com podem veure a la Figura 4.4, els punts A i A' són simètrics respecte la circumferència k. Si coneixem la distància $\overline{OA}$ i el valor del radi r, podrem calcular la distància $\overline{OA'}$ i marcar el punt $A'/\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$.

Veiem que si un dels punts (A o A') es troben fora de la circumferència k, l'altra es trobarà a l'interior d'aquesta i viceversa. Deduïm doncs que si $\overline{OA} > r \Rightarrow \overline{OA'} < r$ (i a l'inrevés) i, si un dels punts es troba a la circumferència k, llavors A i A' coincideixen (com podem deduir a partir de la fórmula $OA \cdot OA' = r^2 \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{r^2}{\overline{OA}}$).

Presentarem ara nou teoremes principals de les inversions, els quals, ens resultaran útils per a la construcció de la representació gràfica de la geometria de Lobatxevski:

1 Si una circumferència q passa per dos punts diferents A i A', simètrics respecte a la circumferència k, les dues circumferències resulten ortogonals[1] entre sí.

2 Si les circumferències k i q són ortogonals entre si, la circumferència p que passa pel centre O de la circumferència k i talla a la circumferència q (la talla als punts simètrics respecte de la circumferència k).

[1]Dues circumferències són ortogonals si són secants en un punt d'intersecció i les seves tangents formen dues rectes perpendiculars.

3 Sigui el triangle $\triangle OAB$, on O és el centre de la circumferència k, i A' i B' són els punts simètrics de A i B respecte a k, llavors: $\widehat{OAB} = \widehat{OB'A'}$ i $\widehat{OBA} = \widehat{OA'B'}$

4 La inversió transforma la recta que no passa pel pol d'inversió en una circumferència que passa pel pol d'inversió.

5 La inversió transforma la circumferència que passa pel pol d'inversió en una recta que no passa pel pol d'inversió.

6 La inversió transforma la circumferència que no passa a través del pol d'inversió en una circumferència que tampoc passa pel pol d'inversió.

7 Els punts d'intersecció de dues circumferències p y q, ortogonals a la circumferència k, són simètrics respecte a k.

8 Si M i M' són punts simètrics respecte de la circumferència k de dos rectes m i m', que també són simètriques respecte a k, resulta ser que les tangents a m i m' als punts M i M' o bé són perpendiculars a la recta MM', o bé formen amb aquesta un triangle isòsceles amb base MM'.

9 La inversió no varia la magnitud de l'angle.

4.4 Geometria no euclidiana

La geometria no euclidiana és aquella geometria que, a part de complir amb els axiomes de la geometria absoluta, també nega el V postulat d'Euclides.

Recordem la formulació més comuna del V postulat: donada una recta r i un punt P exterior a aquesta, només existeix una recta s que passa per P i que és paral·lela a la recta r. Aquest postulat es pot negar de dues maneres: o bé dient que existeix més d'una recta que passi per P i sigui paral·lela a r, o bé dient que no n'existeix cap. Així doncs, cadascuna d'aquestes negacions donarà peu a un tipus diferent de geometria no euclidiana: la hiperbòlica i el·líptica, respectivament.

Nosaltres però, ens hem centrat en l'estudi de la geometria hiperbòlica.

4.4.1 Geometria hiperbòlica

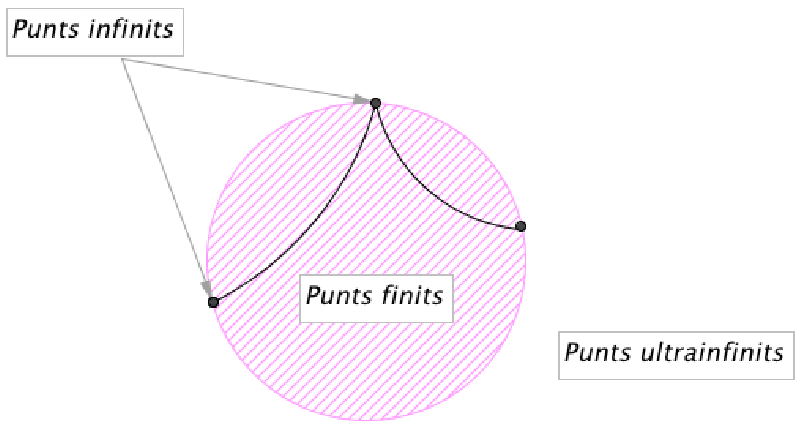
En un principi, amb l'aparició de la geometria hiperbòlica, es va voler determinar si l'espai material era euclidià o hiperbòlic, ja que s'havia de decidir quina de les geometries era "la vertadera". Si dels axiomes que fonamenten un sistema geomètric no es pot deduir cap posició contradictòria vol dir que el sistema és vàlid i, per tant, com que és lliure de contradiccions, és consistent. El procés pel qual es va donar consistència a la Geometria Hiperbòlica fou complex i va ser estudiat per diversos matemàtics fins que es va demostrar que ambdues geometries eren igual de consistents i que cap era més vertadera que l'altre.

Per treballar amb la geometria hiperbòlica és necessari l'ús d'un tipus d'aplicacions del pla euclidià en si mateix: les inversions, esmentades en el capítol anterior.

Un pla hiperbòlic es pot obtenir a partir d'un pla projectiu per un procés semblant al qual s'obté un pla euclidià. Per crear-lo se selecciona una cònica real que divideix així els punts del pla projectiu en tres grups:

- Punts finits: els interiors a la cònica.
- Punts infinits: els de la cònica.
- Punts ultrainfinits: els exteriors a la cònica.

Figura 4.5: Pla hiperbòlic



El pla hiperbòlic està delimitat pels punts finits, de manera que dues rectes que es tallin en un punt infinit o ultrainfinit estan separades des del punt de vista hiperbòlic. És fàcil doncs veure que per un punt exterior a una recta passen infinites paral.leles.

Quan parlem de punts i rectes al pla hiperbòlic (a no ser que indiquem el contrari) se sobreentén que es tracta de punts i rectes finites. Sabem que tota recta finita conté exactament dos punts infinits, els quals determinen dos segments: un format pels punts finits i l'altre pels ultrainfinits.

En geometria hiperbòlica convé distingir dues classes de paral.lelismes: rectes paral.leles o ultraparal.leles, és a dir, si es tallen en un punt infinit o ultrainfinit respectivament.

Veiem clar que per un punt exterior a una recta passen exactament dues rectes paral.leles i infinites ultraparal.leles.

S'utilitzen diferents models per estudiar aquesta geometria: el model de l'hiperboloide, el projectiu, el disc de Poincarè i el semiplà de Poincarè. En tots els models ens trobem amb un inconvenient comú: els angles i les rectes no les podem pensar com angles o rectes euclidianes i això dificulta l'estudi d'aquesta geometria.

La geometria hiperbòlica doncs, satisfà tots els axiomes de la geometria absoluta excepte l'axioma V de les paral·leles. Compleix això sí, l'axioma de Lobatxevski:

Axioma de Lobatxevski: Existeixen una recta r i un punt P que no pertany a la recta tals que per p passen al menys dues rectes que no tallen r.

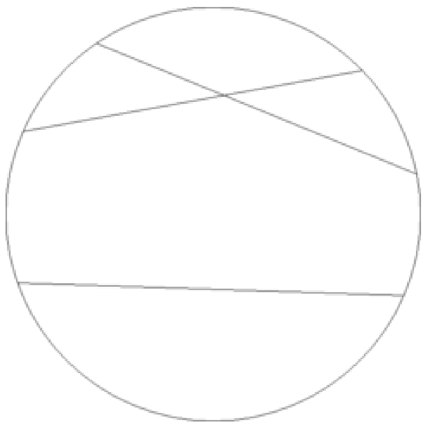
Nosaltres utilitzarem la Geometria Euclidiana per a verificar la consistència de la Geometria Hiperbòlica ja que, com sabem, la Geometria Euclidiana és consistent perquè els axiomes de la Geometria Absoluta són vàlids en ella. Per a demostrar que el nou sistema d'axiomes és vàlid, utilitzarem com a model el Semiplà de Poincarè. Si comprovem la seva validesa, podrem generalitzar que el sistema és vàlid també per a la Geometria Hiperbòlica.

Models del pla Hiperbòlic

Així com el pla euclidià es representa amb els punts i rectes usuals de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, per a representar el pla hiperbòlic, existeixen diferents models (esmentats ja anteriorment). El disc de Poincarè i el Semiplà de Poincarè tenen en comú que conserven els angles, és a dir, podem pensar els angles hiperbòlics d'aquests models com a angles euclidians però les rectes hiperbòliques no es corresponen amb les euclidianes. En canvi, el model de Klein i el model de l'hiperboloide conserven les rectes euclidianes però no els angles. Les característiques generals d'aquests són les següents:

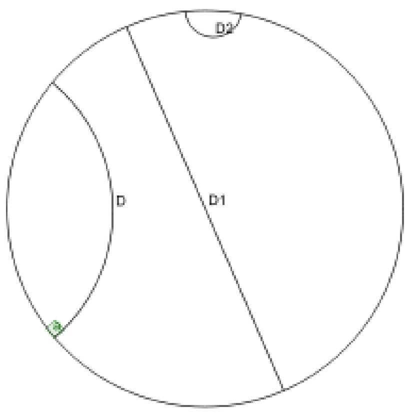
1 **Model de Klein** (també conegut com disc projectiu o model de Beltrami -Klein): Els punts hiperbòlics són tots els de l'interior del disc i una recta hiperbòlica és la intersecció d'una recta euclidiana amb l'interior del disc. Els punts que formen el disc són considerats com a punts a l'infinit. Desmentir el cinquè postulat en aquest model és immediat: les rectes es tallen a fora del disc i, com que els punts hiperbòlics són tan sols els de l'interior del disc, aquestes són paral.leles.

Figura 4.6: Disc de Klein



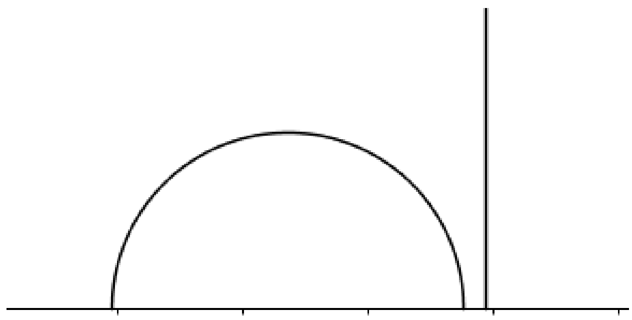
2 **Disc de Poincarè** (o disc conforme): Per construir aquest model es fixa un disc. Els punts del seu interior són els del pla hiperbòlic i les rectes es representen per arcs de circumferències ortogonals a la circumferència límit o als diàmetres d'aquesta. Els punts de la frontera del disc són considerats, com al model de Klein, punts a l'infinit.

Figura 4.7: Disc de Poincarè



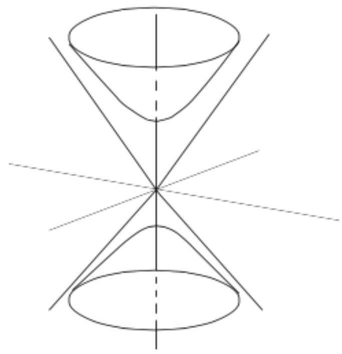
3 **Semiplà de Poincarè**: Utilitza com a pla un semiplà obert del pla euclidià. Cada recta és la intersecció d'una circumferència o d'una recta perpendicular al límit del semiplà, amb el semiplà de Poincarè. Els punts a l'infinit són els de l'eix OX.

Figura 4.8: Semiplà de Poincarè



4 **Model de Lorentz o Hiperboloide**: Els punts del model de Lorenz són tots aquells que pertanyen a la part positiva de l'hiperboloide de dos fulls donat per l'equació: $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$ (el pla). La mètrica amb la qual cal interpretar aquest model és la mètrica de Minkowski[2] i les rectes són les branques de les hipèrboles que resulten de la interesecció dels plans que passen per l'origen amb l'hiperboloide. L'hiperboloide és un model amb molta importància, ja que és el que s'utilitza per estudiar la teoria especial de la relativitat.

Figura 4.9: Model de Lorenz



D'aquestes quatre representacions ens centrarem en el semiplà de Poincarè definint conceptes com el pla en si, les rectes, les distàncies o els angles.

[2]La mètrica de Minkowski és utilitzada en l'espai de Minkowski. Aquest és una varietat matemàtica de quatre dimensions i curvatura nul·la utilitzada per descriure els fenòmens físics dins del marc de la Teoria de la Relativitat d'Einstein.

Capítol 5

Semiplà de Poincarè

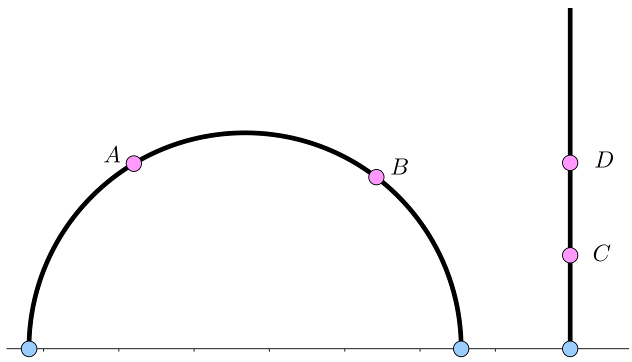
Per tal de comprovar si els axiomes són vàlids per a aquest model, primer de tot hem d'explicar què entendrem per punts, rectes i també com són les relacions que hi ha entre ells.

Així doncs, sigui el conjunt de punts del model, $\mathcal{P}$, el semiplà $y > 0$, és a dir:

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y > 0\} \tag{5.1}$$

I sigui el conjunt de rectes del model, $\mathcal{R}$, les semicircumferències euclidianes de centre sobre la recta $y = 0$ contingudes en el semiplà $y > 0$, així com les semirectes verticals[1] d'equació $x = c$, on $c \in \mathbb{R}$.

Figura 5.1: Rectes hiperbòliques



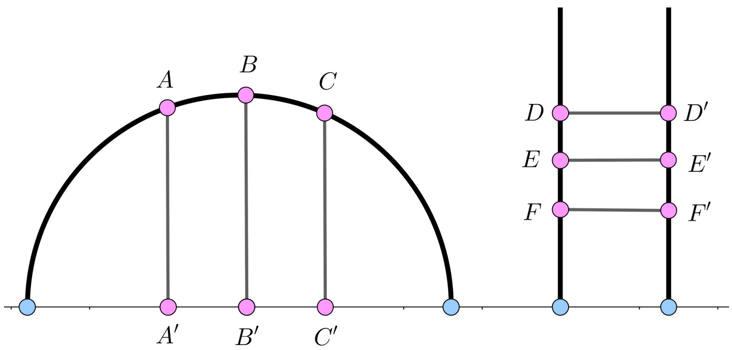
Definirem seguidament les relacions que s'estableixen entre els punts i les rectes d'aquest pla.

[1]Per tal d'alleugerir la notació, considerarem les semirectes verticals semicircumferències de radi infinit.

La relació "pertànyer a" té un sentit similar al d'aquesta mateixa relació en geometria euclidiana. És a dir, un punt A pertany a la recta r si, en sentit euclidià, el punt A pertany a una semicircumferència.

La relació "estar entre" també es basa en el sentit euclidià d'aquesta. Tenim tres punts $A, B, C \in r$. Si la recta r és una semicircumferència en sentit euclidià, traçarem les projeccions ortogonals dels punts A, B, i C sobre una recta euclidiana paral·lela a $y = 0$, obtenint els homòlegs A', B' i C'. Si B' està entre A' i C' en el sentit euclidià, llavors direm que B està entre A i C. Si, per contra, sent la recta r una semirecta euclidiana, traçarem les projeccions dels punts respecte d'una recta euclidiana paral·lela a $x = 0$. Pel mateix raonament, si B' està entre A' i C', direm que B està entre A i C.

Figura 5.2: Relació estar entre



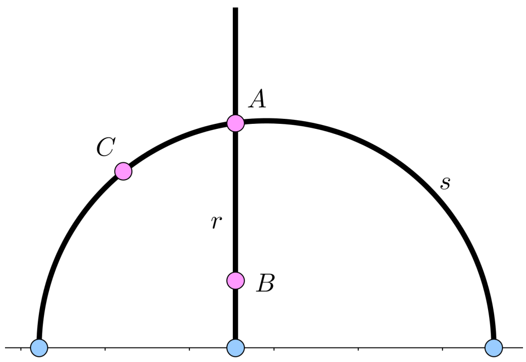
La relació "ésser congruent" es defineix mitjançant l'aplicació del pla en sí mateix anomenada inversió. Així doncs, per a dos segments hiperbòlics $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ si existeix una successió finita d'inversions respecte de rectes hiperbòliques tal que transformi el segment $\overline{AB}$ en el segment $\overline{A'B'}$.
En qüestió d'angles, dos angles seran congruents si els costats d'un són congruents amb els costats de l'altre.
Cal notar, però, que aquestes inversions són realment simetries respecte d'una recta hiperbòlica.

Seguidament demostrarem que les tres relacions, al model del Semiplà, compleixen els axiomes:

Relació "pertànyer a":
Axioma I.1
Ara demostrarem que només existeix una recta que passi per dos punts A i B diferents. Si les abscisses d'ambdós punts coincideixen i tenen valor $c \in \mathbb{R}$, la recta hiperbòlica r que els contindrà serà la semirecta d'equació $x = c$ i, per tant, només existirà una recta que els contingui. Si les abscisses no coincidissin, llavors es traça la mediatriu euclidiana entre els dos punts. El punt d'intersecció entre aquesta i la recta $y = 0$, P, serà el centre de la semicircumferència euclidiana que contindrà A i B, l'anomenarem també recta hiperbòlica r. Com que només pot existir un punt P, només podrà existir una recta que contingui els dos punts. Concloem, doncs, que sigui quina sigui la disposició dels punts A i B, només existirà una recta hiperbòlica r que els contingui. Queda així demostrada la validesa de l'axioma I.1 per a aquest model.

Axioma I.2

Figura 5.3: Il·lustració de l'Axioma I.2



Ens disposem a demostrar que existeixen tres punts no alineats. Siguin A i B dos punts amb abscissa c i C un punt amb abscissa diferent. A i B determinaran la recta r d'equació $x = c$, semirecta euclidiana, mentre que A i C determinaran una recta hiperbòlica s de forma una semicircumferència euclidiana. Sabent que r i s no poden ser iguals, C no pertany a la recta r, i B no pertany a la recta determinada per C i A. En resum: no hi haurà cap recta que contingui els tres punts, és a dir, existiran tres punts no alineats.

Relació "estar entre":

Axioma II.1

Ara comprovarem que existeix una correspondència bijectiva[2] entre el conjunt de punts de qualsevol recta i el conjunt de nombres reals que conserva la relació "estar entre". Si podem trobar, com a mínim, una aplicació bijectiva, ja haurem acabat.

Si la recta és de la forma de semirecta euclidiana d'equació $x = c$, podem fer que la bijecció sigui $f(x, y) = log(y)$, ja que x seria constant. Observem que si variem y entre 0 i ∞, $log(y)$ variarà entre $-\infty$ i ∞. Com que és una aplicació creixent, es conservarà la relació "estar entre".

Si la recta és de la forma de semicircumferència euclidiana, prendrem una semicircumferència c de centre el punt $P = (\alpha, 0)$ i radi r. La seva equació es pot expressar de forma paramètrica com:

$$\begin{cases} x = \alpha + r \cdot cos(\alpha) \\ y = r \cdot sin(\alpha) \end{cases} \tag{5.2}$$

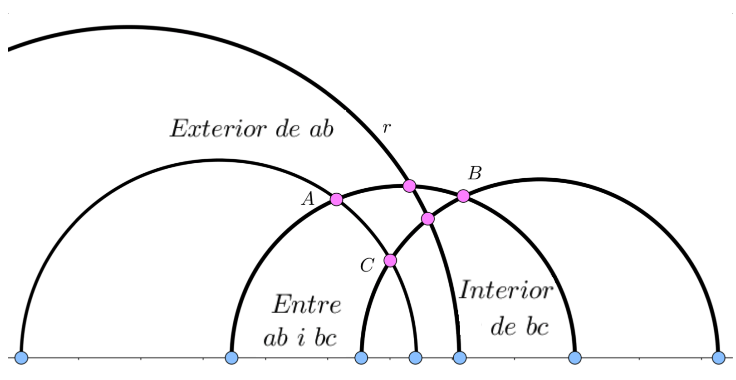
amb $\alpha \in [0, \pi]$.

Definim una bijecció entre c i $\mathbb{R}$ per $f(x, y) = tan(\alpha - \frac{\pi}{2})$. Veiem que quan α varia entre 0 i π, $tan(\alpha - \frac{\pi}{2})$ varia entre $-\infty$ i ∞. Com que és una aplicació creixent es conserva la relació "estar entre"en la semicircumferència euclidiana, i, per tant, en les rectes hiperbòliques.

Axioma II.2

Ens disposem a demostrar que es compleix que si una recta r talla un dels arcs AB, AC o BC, llavors r talla un i només un dels dos arcs restants.

Figura 5.4: Il·lustració de l'Axioma II.2



[2]Una bijecció és una funció f d'un conjunt X a un conjunt Y que té la següent propietat: per a cada y del conjunt Y hi ha exactament una x de X tal que f(x) = y.

Siguin A, B i C tres punts no alineats i siguin ab, ac i bc les rectes hiperbòliques determinades per A i B, A i C i B i C, respectivament. Sigui r una recta hiperbòlica. Suposem que r talla AB. Tant si ab o r són semicircumferències euclidianes com si són semirectes, sabem que són contínues, és a dir, hi haurà punts de la recta r dins la semicircumferència ab i punts fora d'aquesta. Si r talla, per exemple, l'arc BC, pel mateix raonament anterior, r ha de tenir punts dins i fora de bc. Per tant, podem separar la recta r en tres parts: els punts a l'exterior d'ab, els punts entre ab i bc (comptant les interseccions de la recta r amb ab i bc) i els punts a l'interior de bc.

Demostrant que en cap de les tres parts la recta r pot tallar el segment $\overline{AC}$ haurem demostrat la validesa de l'axioma. Fora de ab, r no pot tallar $\overline{AC}$ pel fet que C està dins de ab i que $\overline{AC}$ només talla ab en el punt A. Per tant, no poden haver-hi punts de l'arc AC fora de ab amb els quals r pugui tallar.

Anàlogament, r no pot tallar $\overline{AC}$ dins de bc. Entre ab i bc podem fer el següent: fixem el radi euclidià de la semicircumferència r. Fem que aquesta passi per A i l'anem desplaçant fins que passi per B, així anirà tallant diferents punts dels segments $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Assignem a cadascun dels punts dels segments $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ el valor de l'abscissa dels punts del segment $\overline{AB}$. Per l'axioma II.1, als arcs AC, BC hi haurà punts de valor major i menor a C, a més del punt C. Si considerem la recta r una funció, veiem que ha de transformar cada punt de AB en només un punt de AC o BC. És a dir, si r talla un dels costats, només tallarà un dels altres dos.

Quedant demostrada la validesa dels axiomes d'incidència i d'ordre, podem prosseguir a definir alguns objectes que deriven d'aquests axiomes:

- Anomenarem segment hiperbòlic definit per A i B, o segment $\overline{AB}$, el conjunt de punts entre A i B que pertanyen a la recta hiperbòlica definida per A i B.

- Anomenarem semirecta hiperbòlica definida per O i per A (o semirecta d'origen O que passa per A), el conjunt de punts de la recta que passa per O i A que estan al mateix costat de O que A.

- Anomenarem angle hiperbòlic els punts interiors al parell de semirectes k, l, que tenen origen O i que no formen part de la mateixa recta, notant-lo com $\widehat{k,l}$, o $\widehat{AOB}$, sent A i B punts de k i l respectivament. El punt O serà el vèrtex de l'angle i les semirectes k, l els seus costats. La notació $\widehat{k,l}$ o $\widehat{l,k}$ és indiferent, ja que l'angle no té en compte l'ordre dels costats.

Relació "ésser congrüent":
Axioma III.1

Siguin A, B i A' tres punts i sigui k una semirecta d'origen A'. Pel procediment que explicarem seguidament, trobarem la recta hiperbòlica c que inverteixi el punt A en A' i A' en A.

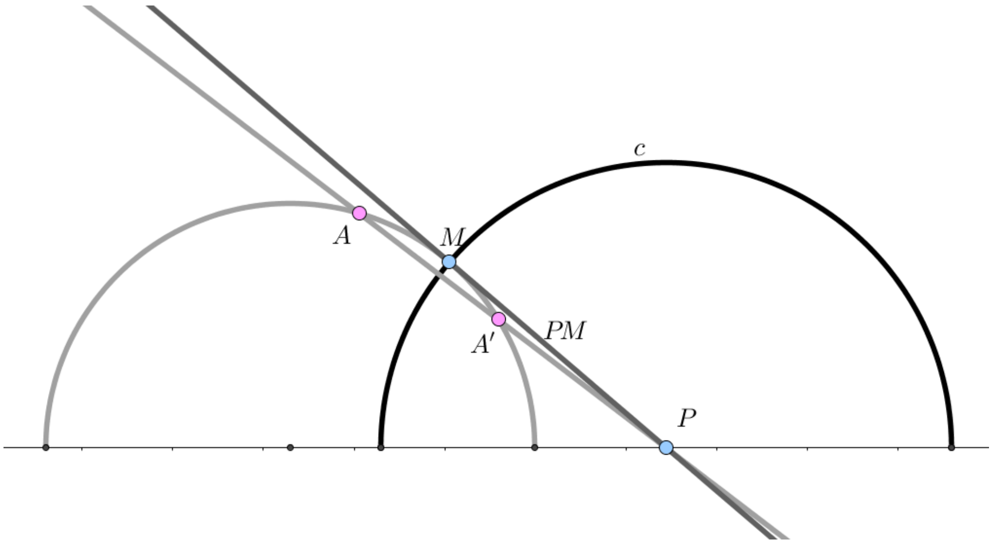


Figura 5.5: Creació de la recta hiperbòlica c

Per tal de trobar la recta hiperbòlica segons la qual A' és l'invers de A, farem el següent procediment: tracem una recta euclidiana que passi per A i A', i anomenem P el punt d'intersecció entre aquesta i l'eix OX. Tracem la tangent PM a la recta hiperbòlica que conté A i A', i anomenem M el punt d'intersecció entre PM i aquesta. La semicircumferència de centre P i que passi per M, anomenada c, serà la recta d'inversió que transformarà A en A' i A' en A.

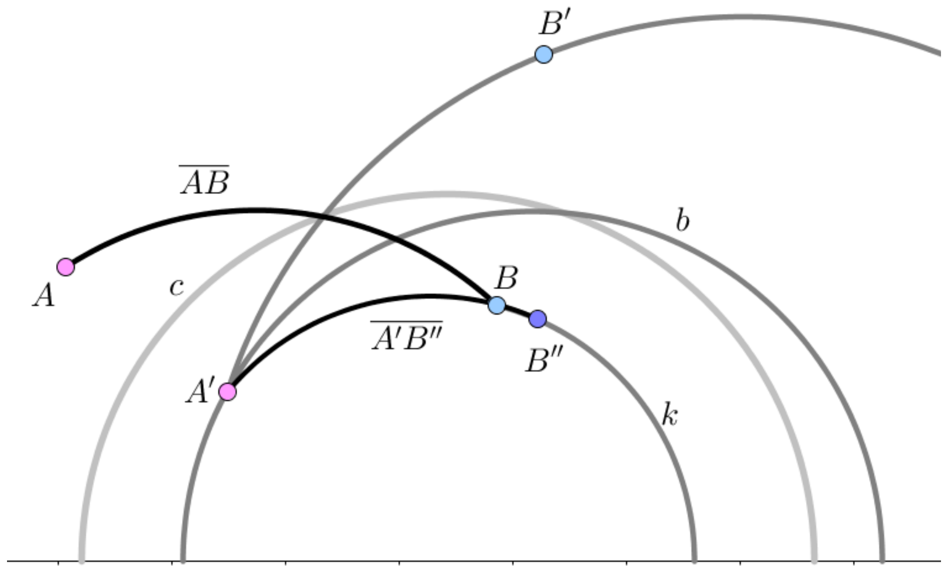


Figura 5.6: Segments congruents

Invertim ara el punt B respecte de la recta hiperbòlica c, obtenint B' com a resultat. Ara doncs, només caldrà traçar la bisectriu, b, entre la semirecta d'origen A' que passi per B' i la semirecta k per invertir el punt B' en B'' (sobre la semirecta k). Així doncs, hi haurà un punt sobre la semirecta k tal que els segments $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$.

Això però, no vol dir que només n'hi hagi un, sinó que sabem que, com a mínim, n'hi ha un. Per tant, ara cal demostrar que, efectivament, només n'hi ha un: anomenem-lo B_1''. Ho demostrarem per reducció a l'absurd, és a dir, suposarem que existeix i arribarem a la conclusió de què és absurd que existeixi.

Tenim la semirecta k, d'origen A', el punt B'' i el punt B_1''.
Si existeix el punt B_1'', s'ha de complir que $\overline{A'B''} \equiv \overline{A'B_1''}$, i per tant hauríem de poder fer una successió finita d'inversions que transformi $\overline{A'B''}$ en $\overline{A'B_1''}$. Com que A' pertany a ambdós segments, les inversions deixarien A' fix i haurien de transformar B'' en B_1''. Precisament, com que les inversions deixarien A' fix, deixarien, en realitat, tot punt de la semicircumferència determinada per A' i B'' fixos, és a dir, les inversions en realitat serien la inversió identitat. Per aquesta raó, si $\overline{A'B''}$ fos congruent amb $\overline{A'B_1''}$, voldria dir que $B'' = B_1''$, és a dir, que B_1'' no existiria.

Axioma III.2

Podem comprovar com l'axioma III.2 es compleix mitjançant un raonament força senzill. Siguin $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ tres segments. Si sabem que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i amb $\overline{A''B''}$, això vol dir que, mitjançant un producte d'inversions podem transformar $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$. Ara bé, si en comptes de passar d'$\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ apliquem les mateixes inversions per a passar $\overline{A'B'}$ a $\overline{AB}$, i sabent que $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$, llavors podem afirmar que $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

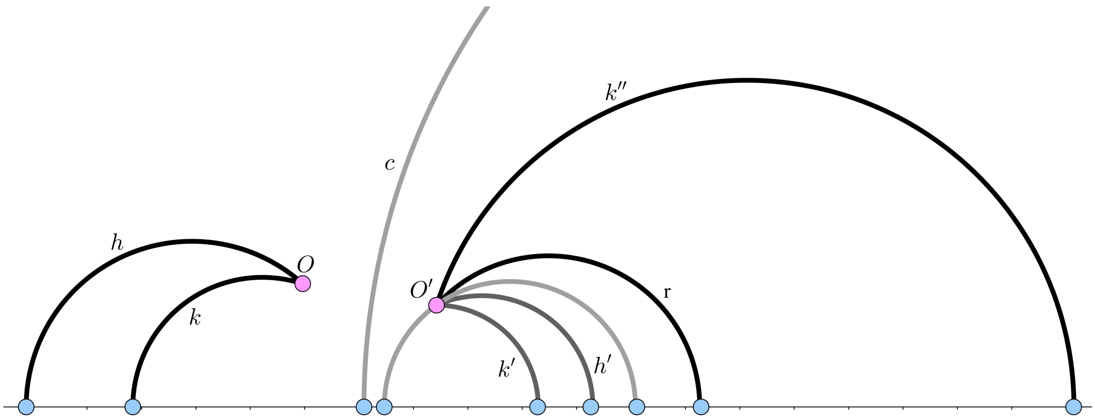
Axioma III.3

L'axioma III.3 es compleix també amb un raonament molt directe. Siguin A, B, C tres punts d'una recta r i A', B', C' tres punts d'una recta r'. Si prenem π com el producte d'inversions que transformen A en A' i si sabem que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, llavors per l'axioma III.1, B' és també l'invers de B segons el producte π. Pel mateix raonament, C' és l'invers de C, és a dir, que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Axioma III.4

Per comprovar l'axioma III.4 seguirem un raonament semblant al que hem utilitzat per comprovar l'axioma III.1.

Figura 5.7: Il·lustració de l'Axioma III.4

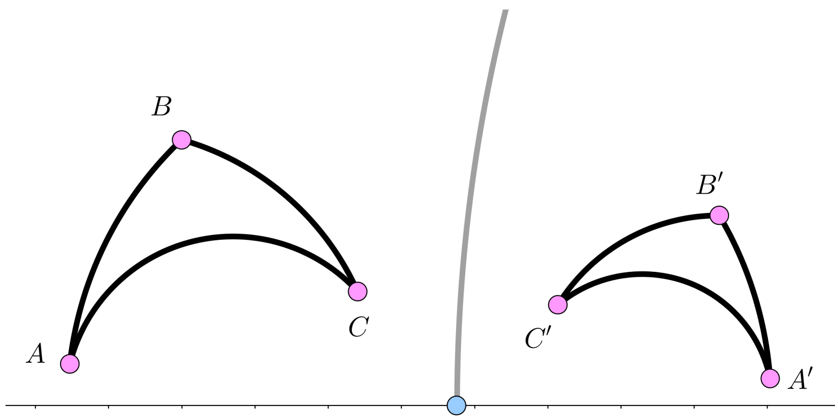


Sigui O el vèrtex de l'angle $\widehat{h,k}$, de costats les semirectes h, k. Sigui O' l'origen de la semirecta r. Trobem la recta hiperbòlica c que transforma O en O' i a l'inrevés. Apliquem la inversió de les semirectes h i k respecte de la recta c, obtenint h' i k', així com l'angle $\widehat{h',k'} \equiv \widehat{h,k}$, ja que la inversió conserva els angles. Ara, per tal de trobar la semirecta k'' que amb r faria un angle congruent a $\widehat{h,k}$, tracem la bisectriu hiperbòlica entre h' i r. Així, si apliquem una inversió de h' i k' respecte d'aquesta, h' passarà a ser la

semirecta r que ja tenim i, k'', serà la semirecta que volem obtenir. Si el costat del pla definit per r que tenim prefixat és aquell en què hi ha k'' hem acabat el procediment. Si no l'és, invertim la semirecta k'' respecte de r.
Ara, com amb l'axioma III.1, demostrarem que aquesta semirecta k'' és única. Suposem que hi hagués una altra semirecta k_1" que fes, amb r i vèrtex O' un angle congruent a $\widehat{h,k}$. Si $\widehat{k_1'',r} \equiv \widehat{k'',r}$, k_1" ha de ser congruent a k'', és a dir, podem arribar a una a partir de l'altra mitjançant un producte d'inversions π. Aquest producte d'inversions deixaria O' com a punt fix, i, de fet, tots els punts de la semirecta k". Per tant, seria la identitat, i tindríem k"$=k_1$", és a dir, k_1" no podria existir.

Axioma III.5
Siguin A, B, i C tres punts no alineats, i siguin A', B' i C' tres punts no alineats tals que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. En virtut de l'axioma III.4, només existeix un producte d'inversions ϕ tal que $\widehat{BAC}$ sigui congruent amb $\widehat{B'A'C'}$. Aquest producte d'inversions també transformarà A en A', B en B' i C en C'. Per tant, tindrem $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Ara sabem que els costats de l'angle $\widehat{ABC}$ són congruents amb els costats de l'angle $\widehat{A'B'C'}$. Per tant, per construcció, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Anàlogament es demostra que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.

Figura 5.8: Congruència d'angles



Axioma de Lobatxevski
Sigui r una recta hiperbòlica i A un punt no pertanyent a aquesta. Si r és una semicircumferència euclidiana, només cal traçar una altra semicircumferència s que passi per A i per un punt P de l'eix OX i exterior a r perquè r sigui paral·lela a s. Com que podem agafar infinits punts P, hi ha infinites paral·leles a r que passen per A. Si r és una semirecta euclidiana d'equació $x = c$ i el punt A té abscissa a, qualsevol semicircumferència que passi per A i per un punt P de l'eix OX amb abscissa $a \leq p <$ c serà paral·lela a r, i com que p pot prendre infinits valors, hi ha infinites rectes hiperbòliques paral·leles a r que passin per A.

Finalment s'ha pogut concloure que, com que s'ha utilitzat la Geometria Euclidiana per construir la no euclidiana, és a dir, s'han creat conjunts de punts i rectes i s'han establert unes relacions entre els seus elements on es compleixen els axiomes dels grups I, II i III i, la Geometria Hiperbòlica és consistent, és a dir, no presenta contradiccions entre els axiomes. També s'ha comprovat que l'axioma de Lobatxevski és vàlid per al model, i aquest, com va demostrar Lobatxevski, no és contradictori als axiomes de la Geometria Absoluta. Per tant, la Geometria Hiperbòlica és consistent.

Figures i conceptes geomètrics bàsics del Semiplà de Poincarè
Ara que ja s'han definit els punts, les rectes i la relació que hi ha entre aquests, es definiran les figures geomètriques més bàsiques d'aquest Semiplà hiperbòlic juntament amb els conceptes matemàtics bàsics necessaris per a les explicacions posteriors.

- Recta:
  Una recta és una semicircumferència euclidiana amb centre a la recta límit, és a dir, a l'eix d'abscisses o bé una semirecta euclidiana perpendicular a l'eix d'abscisses i amb origen en aquest.

- Segment:
  Un segment és el conjunt de punts de l'espai que formen dos punts diferents A i B, anomenats extrems del segment.

- Rectes perpendiculars:
  Dues rectes són perpendiculars si la seva intersecció forma quatre angles rectes.

- Mediatriu d'un segment:
  La mediatriu és el lloc geomètric de tots els punts que equidisten de

dos punts fixes o extrems d'un segment.

- Circumferència:
  Una circumferència és el lloc geomètric de tots els punts que equidisten hiperbòlicament d'un punt fix anomenat centre.

- Semicircumferència:
  Una semicircumferència és cada un dels arcs iguals que abraça un diàmetre.

- Horocicle:
  Un horocicle és el límit de dos cercles que comparteixen una tangent en un punt donat quan els seus radis tendeixen a l'infinit, és a dir, un cercle tangent a la recta real en un punt $a \in OX$ o línea límit.

- Hipercercle:
  Un hipercercle és una corba els punts de la qual tenen la mateixa distància ortogonal a una recta donada. Un hipercercle donat a partir d'un punt que comparteix una tangent en aquest mateix punt, convergeix cap a l'horocicle a mesura que les seves distàncies tendeixen l'infinit.

- Triangle:
  Un triangle és una figura geomètrica formada a partir de tres segments hiperbòlics que intersequen cada dos en un punt (un extrem) formant tres angles. La suma dels angles d'un triangle hiperbòlic és sempre menor a π.

- Angle:
  Un angle és la regió compresa formada per dues semirectes d'origen comú anomenat vèrtex. L'angle hiperbòlic és l'angle euclidià que es forma a partir de les dues tangents a les semirectes donades.

- Bisectriu:
  La bisectriu d'un angle és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels costats d'un angle i que divideix aquest en dos angles iguals.

Capítol 6

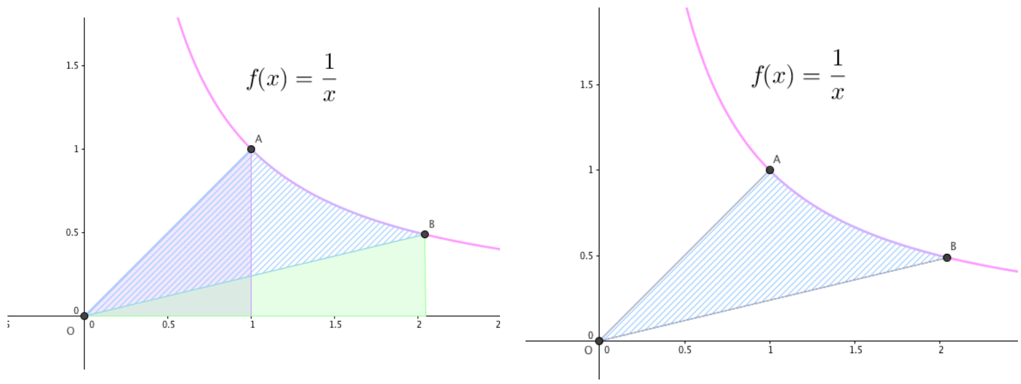
Àlgebra Hiperbòlica

Les relacions hiperbòliques són anàlogues a les relacions de la circumferència. Per tant, mentre que les relacions de la circumferència creen la trigonometria, les hiperbòliques creen la trigonometria hiperbòlica.

Les funcions hiperbòliques treballen els angles hiperbòlics (que són nombres reals). Un angle hiperbòlic és en realitat un sector hiperbòlic.

Donat l'origen de coordenades i dos nombres a i b, podem definir un sector hiperbòlic com la regió compresa entre els punts $O(0,0)$, $A(a,1/a)$ i $B(b,1/b)$, tenint en compte que el costat $\overline{AB}$ forma part de la hipèrbola $x \cdot y = 1$, és a dir, el sector hiperbòlic forma un triangle hiperbòlic. Per als càlculs d'angles,

Figura 6.1: Angle hiperbòlic



(a) Il·lustració de la fórmula de l'àrea

(b) Secció hiperbòlica

sempre suposarem a = 1, prenent com a variable b. D'aquesta manera, el valor de l'angle hiperbòlic format pels costats $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ serà igual al valor de l'àrea del triangle hiperbòlic $\triangle AOB$.

Aquesta la podem trobar amb la simple fórmula: $\grave{A}rea = ln(b)$, ja que és el que obtenim si integrem sota la hipèrbola des d'1 fins a b, li afegim el triangle de costats O, A i (1, 0) i li restem el triangle de costats O, B, (b, 0).

6.1 Funció de Lobatxevski

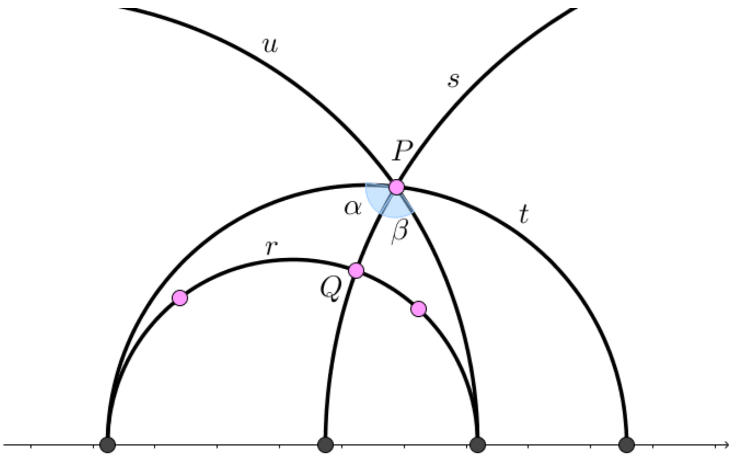
Per tal de presentar la funció de Lobatxevski és necessari prèviament l'explicació de l'angle de paral·lelisme.

L'angle de paral·lelisme té un paper molt important a la Geometria Hiperbòlica, ja que permet la relació de longituds i angles, que és la clau d'aquest tipus de geometria.

Sigui r una recta hiperbòlica i P un punt exterior a aquesta. Creem la recta hiperbòlica perpendicular a r que passa per P, s, i marquem el punt $Q := s \cap r$. És clar que la longitud del segment $\overline{PQ}$ és igual a la distància del punt P a la recta r. Considerem doncs les dues rectes paral·leles, t i u, a la recta r i que passen pel punt P.

L'angle de paral.lelisme, α o β és el que es comprèn entre una de les dues paral.leles t i u, i la perpendicular s.

Figura 6.2: Creació de l'angle de paral.lelisme



Lobatxevski va definir la funció $\pi(x)$ on $\pi(x)$ és l'angle de paral.lelisme corresponent a l'altura x del punt P sobre el punt Q per obtenir finalment l'equació fonamental de la geometria hiperbòlica:

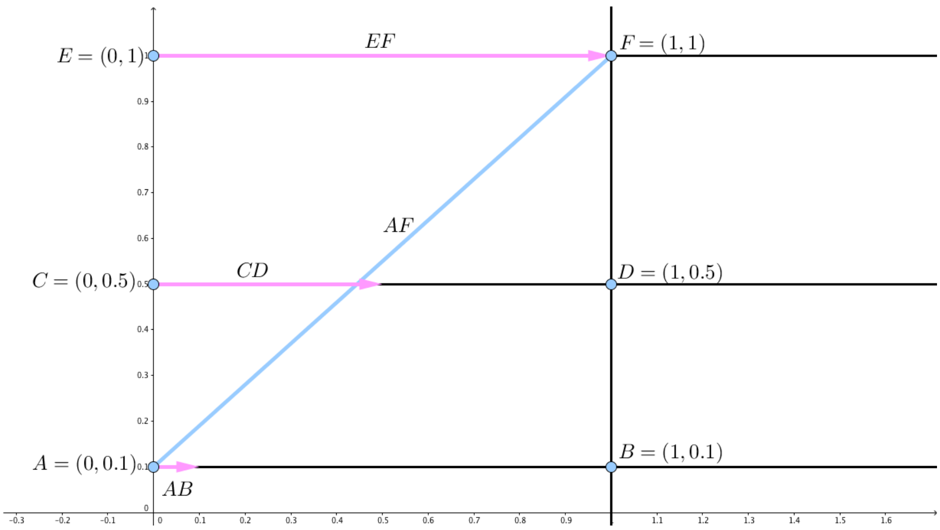
$$cotg\frac{\pi(x)}{2} = e^{(x/k)} \tag{6.1}$$

on k és una constant.

6.2 Distància hiperbòlica

En el Semiplà de Poincarè les coses es comporten d'una forma molt curiosa: tots els objectes situats al semiplà disminueixen de mida a mesura que s'apropen a la línia límit, és a dir, a l'eix d'abscisses.
Per tal d'arribar a deduir la distància hiperbòlica al model del Semiplà, es farà una explicació prèvia que, si bé no tracta el Semiplà estrictament, ajuda a entendre els conceptes que s'utilitzaran més tard.

Figura 6.3: Distància horitzontal hiperbòlica



Si una persona se situa a l'espai de la figura 6.3. i camina dalt a baix fins a la meitat de la distància que la separa de la línia límit, reduirà a la meitat de la mida original. Anàlogament, si segueix caminant cap a baix recorrent un altre cop la meitat de la distància que el separa de l'eix d'abscisses, disminuirà la seva mida una quarta part de l'original.

A més, a la Figura 6.3. podem veure que, si un hàmster corre horitzontalment des del punt E a l'F, recorrerà una distància d'un metre (el seu recorregut està representat per la fletxa rosa). En canvi, si parteix des del punt C per arribar al punt D, com que la seva mida s'ha reduït a la meitat, haurà de recórrer una distància el doble de llarga que la recorreguda de E fins a F. De la mateixa forma, si situem l'hàmster al punt A i corre fins al punt B, trigarà deu vegades més a arribar. D'aquesta forma, per definir una distància hiperbòlica amb una trajectòria horitzontal, utilitzem la següent definició:

$$Espai\ hiperbòlic = \frac{Espai\ euclidià}{y} \tag{6.2}$$

Amb aquesta relació trobada podem demostrar satisfactòriament el que hem explicat anteriorment.
L'espai que ocupa un regle d'un metre de llarg situat al llarg del segment $\overline{EF}$ serà:

$$De(6.2) \implies d(E,F) = \frac{1metre}{1} = 1metre$$

Necessitarem doncs dos regles d'un metre de llarg per a mesurar la distància $\overline{CD}$, ja que el regle haurà reduït la seva mida a la meitat.

$$De(6.2) \implies d(C,D) = \frac{1metre}{0.5} = 2metres$$

Per mesurar la distància $\overline{AB}$ necessitarem deu regles d'un metre de llarg.

$$De(6.2) \implies d(A,B) = \frac{1metre}{0.1} = 10metres$$

Amb la fórmula (6.2), però, no es poden calcular distàncies hiperbòliques verticals, $d(A,E)$, ni tampoc diagonals, $d(C,F)$.

Per fer-ho, cal la funció distància hiperbòlica, que trobarem seguidament: partirem de la definició principal de distància infinitessimal i, mitjançant el càlcul integral, arribarem al cas particular de la distància hiperbòlica al Semiplà. La distància infinitessimal,s, es pot definir com:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \implies ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{6.3}$$

Per tant, la distància euclidiana, d_E, entre dos punts, A, B serà:

$$d_E = s = \int_{x_B}^{x_A} ds = \int_{x_B}^{x_A} \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{6.4}$$

Ara bé, recordant la relació entre l'espai euclidià i l'hiperbòlic, tenim que la distància hiperbòlica, d_H, entre els punts A, B serà:

$$Espai\ hiperb\grave{o}lic = \frac{Espai\ euclidi\grave{a}}{y} \implies d_H(A,B) = \frac{d_E(A,B)}{y} \implies$$
$$\implies d_H(A,B) = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Observem que volem integrar entre dos valors de x, x_A i x_B, però tenim dos termes, y i dy, que no estan en funció de x. És per això que, prèviament, els expressarem en funció de x.

Com que la distància que volem mesurar és al llarg d'una semicircumferència, trobar y en funció de x equival a dir que trobarem l'equació de la semicircumferència. Com que no la sabem directament, partim d'una que sabem, la de la circumferència.

Sigui $\mathbb{C} : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ l'equació de la circumferència euclidiana de centre $(x_0, 0)$i radi r, és a dir, amb el centre a l'eix OX.

Volem trobar l'equació de la semicircumferència euclidiana $\mathbb{C}'$ que serà la recta hiperbòlica en què hi haurà els dos punts A i B. Aïllem y de l'anterior equació tenint en compte que només prenem l'arrel positiva, ja que treballem al semiplà positiu.

$$\mathbb{C} : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \implies y = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \implies$$
$$\implies \mathbb{C}' : y = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

Ja tenim l'expressió de y en funció de x, ara ens cal trobar l'expressió de dy en funció de x. Ho farem mitjançant la definició de derivada:

Sigui $f(x) = y = \sqrt{-(x - x_0)^2 + r^2}$, sent y l'expressió de la semicircumferència. Es complirà:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \implies$$
$$\implies dy = f'(x)dx = \frac{-x + x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}dx \implies dy = \frac{-x + x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}dx$$

Ara ja tenim tant y com dy en funció de x. Per tant, podem substituir les expressions obtingudes a la de la distància hiperbòlica. Així, la distància hiperbòlica entre els punts $A, B \in \mathbb{C}'$ està definida com:

$$d(A, B) = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{dx^2 + \left(\frac{-x+x_0}{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}dx\right)^2}}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{dx^2 + \left(\frac{-x+x_0}{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}\right)^2 dx^2}}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{(-x+x_0)^2}{\left(\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\right)^2}\right)dx^2}}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{1 + \frac{(-x+x_0)^2}{r^2-(x-x_0)^2}}\sqrt{dx^2}}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{\frac{r^2-(x-x_0)^2+(x-x_0)^2}{r^2-(x-x_0)^2}}dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{\frac{r^2}{r^2-(x-x_0)^2}}}{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} dx = \int_{x_B}^{x_A} \sqrt{\frac{\frac{r^2}{r^2-(x-x_0)^2}}{r^2-(x-x_0)^2}} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \sqrt{\frac{r^2}{(r^2-(x-x_0)^2)^2}} dx = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{(r^2-(x-x_0)^2)^2}} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{r}{r^2-(x-x_0)^2} dx = \int_{x_B}^{x_A} \frac{r}{(r+(x-x_0))(r-(x-x_0))} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{2r}{2(r+(x-x_0))(r-(x-x_0))} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{2r+(x-x_0)-(x-x_0)}{2(r+(x-x_0))(r-(x-x_0))} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{(r+(x-x_0))+(r-(x-x_0))}{2(r+(x-x_0))(r-(x-x_0))} dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \left(\frac{1}{2(r+(x-x_0))} + \frac{1}{2(r-(x-x_0))} \right) dx =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{2(r+(x-x_0))} dx + \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{2(r-(x-x_0))} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r+(x-x_0)} dx + \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r-(x-x_0)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r+(x-x_0)} dx + \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r-(x-x_0)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r+x-x_0} dx + \frac{1}{2} \int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r-x+x_0} dx$$

Es realitzen dos canvis de variable per tal d'integrar:

$$u = r + x - x_0 \implies du = (r + x - x_0)'dx = 1 \cdot dx = dx \implies du = dx$$
$$v = r - x + x_0 \implies dv = (r - x + x_0)'dx = -1 \cdot dx = -dx \implies dv = -dx$$

Prosseguim ara amb la integració:

$$\frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r + x - x_0}dx + \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{r - x + x_0}dx = \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{u}du + \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{v}(-dv) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{u}du - \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} \frac{1}{v}dv = \left[\frac{1}{2}ln(u) - \frac{1}{2}ln(v)\right]_{x_B}^{x_A} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}ln(r + x - x_0) - \frac{1}{2}ln(r - x + x_0)\right]_{x_B}^{x_A} =$$
$$= \left[\frac{1}{2}ln(r + (x - x_0)) - \frac{1}{2}ln(r - (x - x_0))\right]_{x_B}^{x_A} = \left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{r + (x - x_0)}{r - (x - x_0)}\right)\right]_{x_B}^{x_A} =$$
$$= \left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{2r(r + (x - x_0))}{2r(r - (x - x_0))}\right)\right]_{x_B}^{x_A} = \left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{2r^2 + 2r(x - x_0)}{2r^2 - 2r(x - x_0)}\right)\right]_{x_B}^{x_A} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{2r^2 + 2r(x_A - x_0)}{2r^2 - 2r(x_A - x_0)}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{2r^2 + 2r(x_B - x_0)}{2r^2 - 2r(x_B - x_0)}\right)$$

Se substitueix $r^2 = (x - x_0)^2 + y^2$ segons l'expressió de la circumferència per, posteriorment, arribar a una equació més senzilla:

$$\frac{1}{2}ln\left(\frac{2r^2 + 2r(x_A - x_0)}{2r^2 - 2r(x_A - x_0)}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{2r^2 + 2r(x_B - x_0)}{2r^2 - 2r(x_B - x_0)}\right) =$$

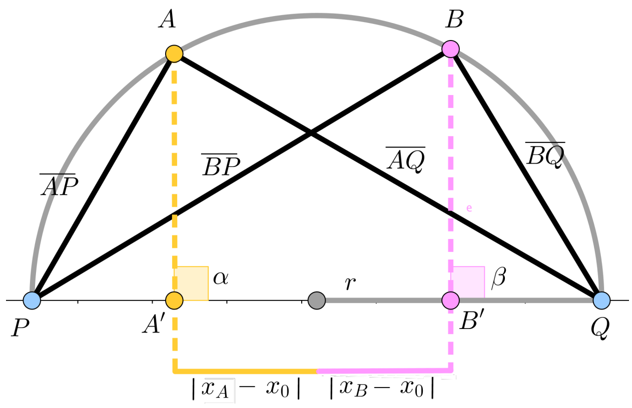
$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{r^2 + 2r(x_A - x_0) + r^2}{r^2 - 2r(x_A - x_0) + r^2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{r^2 + 2r(x_B - x_0) + r^2}{r^2 - 2r(x_B - x_0) + r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{r^2 + 2r(x_A - x_0) + (x - x_0)^2 + y_A^2}{r^2 - 2r(x_A - x_0) + (x - x_0)^2 + y_A^2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{r^2 + 2r(x_B - x_0) + (x - x_0)^2 + y_B^2}{r^2 - 2r(x_B - x_0) + (x - x_0)^2 + y_B^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{(r + (x_A - x_0))^2 + y_A^2}{(r - (x_A - x_0))^2 + y_A^2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{(r + (x_B - x_0))^2 + y_B^2}{(r - (x_B - x_0))^2 + y_B^2}\right)$$

El següent pas de la deducció requereix utilitzar el teorema de Pitàgores[1] als triangles $\triangle APA', \triangle AQA', \triangle BPB'$ i $\triangle BQB$ de la figura 6.4. Així, s'obtin-

Figura 6.4: Triangles utilitzats a la raó doble



dran les expressions següents:

$$\begin{aligned}
Triangle\ APA' : \overline{AP}^2 &= (r - |x_A - x_0|)^2 + y_A^2 = (r + (x_A - x_0))^2 + y_A^2 \\
Triangle\ AQA' : \overline{AQ}^2 &= (r + |x_A - x_0|)^2 + y_A^2 = (r - (x_A - x_0))^2 + y_A^2 \\
Triangle\ BPB' : \overline{BP}^2 &= (r + |x_B - x_0|)^2 + y_B^2 = (r + (x_B - x_0))^2 + y_B^2 \\
Triangle\ BQB' : \overline{BQ}^2 &= (r - |x_B - x_0|)^2 + y_B^2 = (r - (x_B - x_0))^2 + y_B^2
\end{aligned}$$

Se substitueixen les expressions al raonament que havíem fet fins ara per arribar a l'equació final de la distància hiperbòlica:

$$\frac{1}{2}ln\left(\frac{(r + (x_A - x_0))^2 + y_A^2}{(r - (x_A - x_0))^2 + y_A^2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{(r + (x_B - x_0))^2 + y_B^2}{(r - (x_B - x_0))^2 + y_B^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{\overline{BP}^2}{\overline{BQ}^2}\right) = ln\left(\frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2}\right)^{\frac{1}{2}} + ln\left(\frac{\overline{BP}^2}{\overline{BQ}^2}\right)^{\frac{-1}{2}} =$$

$$= ln\left(\frac{\left(\overline{AP}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\overline{AQ}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) + ln\left(\frac{\left(\overline{BP}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\overline{BQ}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} = ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\right) + ln\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}\right)^{-1} =$$

$$= ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\right) + ln\left(\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right) = ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right) = ln(A, B, Q, P)$$

[1]En un triangle rectangle amb catets a, b i hipotenusa c es complirà que $c^2 = a^2 + b^2$

En aquesta última expressió, (A, B, Q, P) fa referència a la raó doble entre els punts A, B, Q, P, que es defineix com:

$$(A, B, Q, P) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$$

Finalment, com que es tracta d'una distància, els valors que s'han d'obtenir han de ser sempre positius.
És sabut que $(A, B, Q, P) < 1 \implies ln(A, B, Q, P) < 0$. Per tal d'evitar aquest cas, prenem el valor absolut del logaritme neperià. Així doncs, la fórmula final de la distància serà:

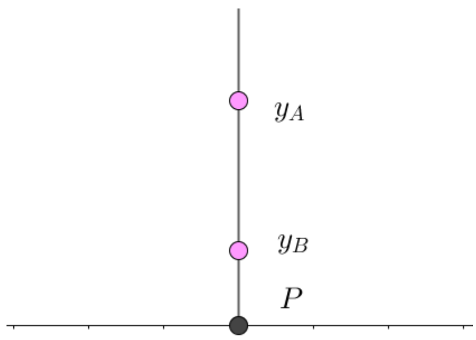
$$d(A, B) = \left| ln(A, B, Q, P) \right|$$

On Q i P són els punts de l'infinit determinats per la recta que passa per A i B. Ara bé, vegem que aquesta fórmula només ens serveix en els casos en què $x_A \neq x_B$, ja que si $x_A = x_B$, llavors o P o Q seran punts de l'infinit del pla euclidià.

Això mereix una observació important: fins ara hem estat treballant amb els punts P i Q perquè, tot i ser punts de l'infinit del Semiplà, són punts finits del pla euclidià; ara bé, si $x_A = x_B$ llavors la recta hiperbòlica seria una semirecta euclidiana vertical i, per tant, un dels extrems estaria a l'infinit (tant a l'infinit del Semiplà com a l'infinit del pla euclidià) i, per això no podríem treballar amb ell.

Cal trobar, doncs, la fórmula de la distància si es dóna el cas que $x_A = x_B$, i ho farem seguint el mateix procediment que abans, partint de la definició de distància hiperbòlica i basant-nos en la figura 6.5.

Figura 6.5: Exemple de la distància hiperbòlica en una semirecta euclidiana



Tinguem en compte, però, que $x_A = x_B \implies dx = 0$, i que haurem d'integrar respecte de y, ja que és en l'eix OY en el qual es produeix variació:

$$d(A,B) = \int_{y_B}^{y_A} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{y_B}^{y_A} \frac{\sqrt{0 + dy^2}}{y} = \int_{y_B}^{y_A} \frac{\sqrt{dy^2}}{y} = \int_{y_B}^{y_A} \frac{dy}{y} =$$
$$= [ln(y)]_{y_B}^{y_A} = ln(y_A) - ln(y_B) = ln\left(\frac{y_A}{y_B}\right) = ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\right) = ln(A,B,P)$$

Com abans, per tal d'evitar els valors de distància negatius, prendrem el valor absolut del logaritme:

$$d(A,B) = \big|ln(A,B,P)\big|$$

Per tal de fixar un sistema d'unitats es té en consideració una constant de proporcionalitat, k. A mode de conclusió, podem afirmar que:

$$d(A,B) = \begin{cases} k\big|ln(A,B,Q,P)\big|, & si\ x_A \neq x_B \\ k\big|ln(A,B,P)\big|, & si\ x_A = x_B \end{cases}$$

6.3 Trigonometria hiperbòlica

La trigonometria hiperbòlica es basa en la longitud dels costats, no en l'amplitud dels angles, com la trigonometria euclidiana. Aquestes són les principals fórmules de la trigonometria hiperbòlica (tinguem en compte que la variable x no es refereix a una coordenada sinó a la longitud d'un segment hiperbòlic):

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

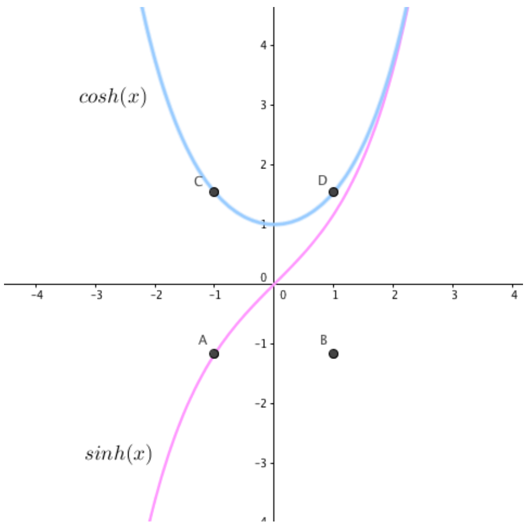
$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$coth(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{tanh(x)}$$

Cal notar que la funció sinh és imparella i que la cosh és parella, és a dir, $sinh(-x) = -sinh(x)$ i $cosh(-x) = cosh(x)$.

Figura 6.6: Funcions sinh i cosh



Com es pot veure a la figura 6.6, per a valors inversos d'abscisses obtenim els mateixos valors de les ordenades, tant en la funció sinh com en la funció cosh:
Siguin els punts $A = (-1, a)$ i $B = (1, b)$ on $a = sinh(-1)$ i $b = -sinh(1)$
Siguin els punts $C = (-1, c)$ i $D = (1, d)$ on $c = cos(-1)$ i $d = cos(1)$

Mentre que en trigonometria, el lloc geomètric creat pels punts $(cos(x), sin(x))$, per a tot x és una circumferència, el lloc geomètric creat pels punts $(cosh(x), sinh(x))$ és la part amb abscissa positiva de la hipèrbola $x \cdot y = 1$.

6.3.1 Teoremes derivats de la trigonometria hiperbòlica

Teorema del cosinus
El Teorema del cosinus hiperbòlic relaciona les longituds dels costats d'un triangle hiperbòlic qualsevol amb un dels seus angles.
Sigui $\widehat{ABC}$ un triangle hiperbòlic de costats a, b i c i angles α , β i γ, pel teorema del cosinus:

$$cosha = coshb \cdot coshc - sinhb \cdot sinhc \cdot cos\alpha$$

Relació fonamental de la Trigonometria
La Relació fonamental de la Trigonometria és: $cosh^2x - sinh^2x = 1$
Sabem que

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

,

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Prosseguim amb la demostració de la Relació Fonamental de la Trigonometria.

$$cosh^2x - sinh^2x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x + e^x)^2 - (e^x - e^x)^2}{2^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \; q.e.d.$$

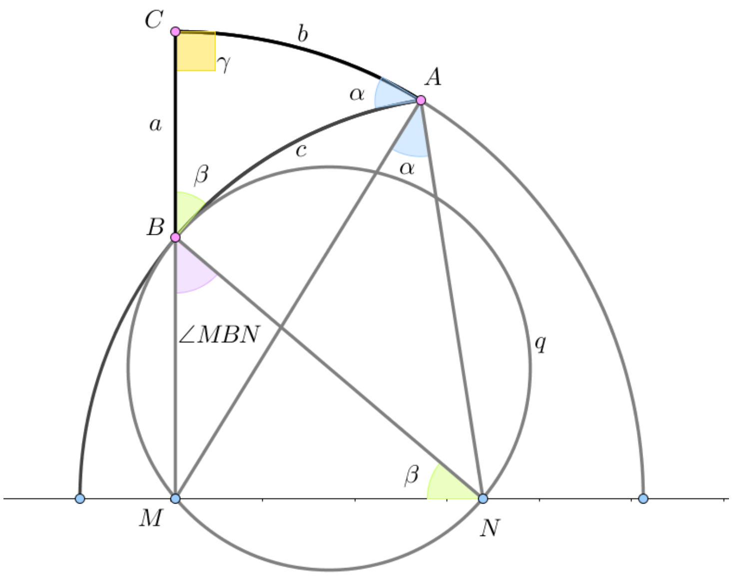
6.4 Triangles Hiperbòlics

6.4.1 Suma d'angles d'un Triangle

En geometria hiperbòlica, la suma dels angles d'un triangle $ABC < 180^{\text{o}}$. Com menor és la suma dels angles d'un triangle, major és la seva àrea (com demostrarem posteriorment).

Amb l'ajuda de la següent figura, prosseguirem a la demostració de què la suma dels angles d'un triangle $ABC < 180^{\text{o}}$:

Figura 6.7: Demostració de la suma dels angles d'un triangle hiperbòlic.



Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle hiperbòlic de costats a, b i c i d'angles α, β i γ respectivament. El costat a és un segment perpendicular euclidià a la recta límit OX; el costat b un arc de circumferència euclidiana amb centre M; i el costat c, és un arc de circumferència euclidiana amb centre N. L'angle α és igual a l'angle entre les tangents de les circumferències b i c al punt A, o bé, és igual a l'angle entre els radis $\overline{NA}$ i $\overline{MA}$. Per construcció, l'angle al vèrtex B és igual a l'angle $\angle BNM$.

Seguidament, construirem la circumferència euclidiana q que té com a diàmetre el segment $\overline{BN}$, és a dir, el radi de l'arc de circumferència c. El punt B és el punt d'intersecció entre la circumferència q i c. El punt A és exterior al cercle limitat per la circumferència q i per tant, la mesura del seu angle és menor a la de l'angle $\angle MBN$.

Veiem que la suma dels angles $\beta + \angle MBN = 90^{\text{o}}$, ja que $\triangle MBN$ és un

triangle rectangle. És clar llavors, que la suma dels angles $\alpha + \beta < 90^o$ perquè, com ja hem demostrat abans, $\alpha < \angle MBN$.
Conseqüentment, la suma dels angles del triangle hiperbòlic ABC, $\alpha+\beta+\gamma < 180^o$ perquè $\gamma = 90^o > \alpha + \beta$.

Aquest teorema, com veurem a continuació, es pot comprovar per un triangle hiperbòlic qualsevol, a partir del teorema del cosinus hiperbòlic esmentat ja anteriorment:

Sigui ABC un triangle hiperbòlic de costats $a = 3u.m.$, $b = 4u.m.$ i $c = 5u.m.$ i angles α , β i γ, pel teorema del cosinus:

$$cosha = coshb \cdot coshc - sinhb \cdot sinhc \cdot cos\alpha$$

Escrivim prèviament les expressions dels angles α, β i γ que resultaran:

$$cosha = coshb \cdot coshc - sinhb \cdot sinhc \cdot cos\alpha \implies$$
$$\implies sinhb \cdot sinhc \cdot cos\alpha = coshb \cdot coshc - cosha \implies$$
$$\implies \alpha = arccos\frac{coshb \cdot coshc - cosha}{sinhb \cdot sinhc} = arccos\frac{cosh4 \cdot cosh5 - cosh3}{sinh4 \cdot sinh5} \simeq$$
$$\simeq 5,26^o \implies \alpha \simeq 5,26^o$$

$$coshb = cosha \cdot coshc - sinha \cdot sinhb \cdot cos\beta \implies$$
$$\implies sinha \cdot sinhb \cdot cos\beta = cosha \cdot coshc - coshb \implies$$
$$\implies \beta = arccos\frac{cosha \cdot coshc - coshb}{sinha \cdot sinhc} = arccos\frac{cosh3 \cdot cosh5 - cosh4}{sinh3 \cdot sinh5} \simeq$$
$$\simeq 14,46^o \implies \beta \simeq 14,46^o$$

$$coshc = cosha \cdot coshb - sinha \cdot sinhb \cdot cos\gamma \implies$$
$$\implies sinha \cdot sinhb \cdot cos\gamma = cosha \cdot coshb - coshc \implies$$
$$\implies \gamma = arccos\frac{cosha \cdot coshb - coshc}{sinha \cdot sinhb} = arccos\frac{cosh3 \cdot cosh4 - cosh5}{sinh3 \cdot sinh4} \simeq$$
$$\simeq 42,76^o \implies \gamma \simeq 42,76^o$$

Calculem finalment la suma dels tres angles, δ:
$\delta = \alpha + \beta + \gamma = 5,26^o + 14,46^o + 42,76^o = 62,48^o < 180^o$

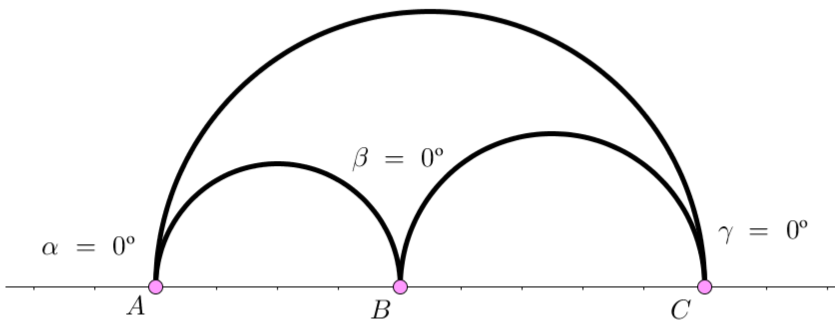
6.4.2 Àrea d'un triangle hiperbòlic

L'àrea d'un triangle és el nombre utilitzat per representar la quantitat de pla contingut dins de la figura geomètrica.
L'àrea d'un triangle hiperbòlic, a diferència de l'àrea d'un triangle euclidià, no es mesura en funció de la mesura dels costats del triangle sinó en funció del que mesuren els seus angles. L'àrea llavors, és igual al defecte δ del triangle. Aquest és el valor suplementari a la suma dels angles interiors d'un triangle hiperbòlic $\triangle ABC$ per arribar als 180º, és a dir: $\delta(ABC) = 180^{o} - (\alpha + \beta + \gamma)$ sent α, β, γ els angles interns del triangle hiperbòlic. L'àrea S d'un triangle hiperbòlic $\triangle ABC$ ve donada per la fórmula:

$$S = \delta(ABC)$$

Com que la suma dels angles interiors d'un triangle hiperbòlic és menor a π, és a dir, a 180º, les àrees d'un triangle hiperbòlic estan limitades per un valor màxim, ja que $\delta \neq 0$. Veiem que el triangle amb l'àrea més gran possible serà aquell que tingui el defecte major, és a dir, el triangle en què la suma dels seus angles interiors sigui 0º.

Figura 6.8: Il.lustració del triangle hiperbòlic de major àrea



En geometria hiperbòlica no existeixen els triangles semblants[2], només els triangles iguals ja que dos triangles amb angles interiors iguals no poden tenir àrees diferents.

[2] En geometria euclidiana, dos triangles són semblants si tenen la mateixa forma però no la mateixa mida: els angles homòlegs són iguals i els costats homòlegs proporcionals.

6.4.3 Altura d'un Triangle Hiperbòlic

L'altura d'un triangle és la mesura d'un segment del triangle perpendicular a un costat del triangle que va des del vèrtex oposat a aquest mateix costat. Sigui h l'altura d'un triangle rectangle o isòsceles $\triangle ABC$ de costats a, b i c. Sabem que l'altura del triangle augmentarà en fer-ho la mesura dels costats del $\triangle ABC$. L'altura d'un triangle hiperbòlic rectangle o isòsceles, però, té una altura màxima, anomenada la constant k.

Com major sigui l'altura d'un triangle hiperbòlic, menors seran els seus angles i, per tant, major serà la seva àrea.

Perquè els costats creixin conservant la condició que el triangle $\triangle ABC$ sigui isòsceles o rectangle, aquests només podran créixer de dues formes: o bé un d'ells es mantindrà sempre perpendicular a un altre costat, conservant així, la mesura de l'angle recte i, conseqüentment, fent que $\triangle ABC$ sigui un triangle rectangle; o bé, un costat s'haurà d'allunyar perpendicularment a la bisectriu de l'angle que formen els altres dos costats iguals (en el cas de referir-se a un triangle isòsceles).

En un triangle rectangle, el valor mínim de la suma dels angles interiors del triangle és de 90^o, en conseqüència, quan els altres dos angles del triangle són 0^o, si volguéssim augmentar l'altura del triangle, només ho podríem fer allunyant el vèrtex que conté l'angle recte respecte la perpendicular de la bisectriu de l'angle. Aquest allargament però, provocaria una disminució de l'angle, i com que aquest fet no es pot donar (ja que es tracta d'un triangle rectangle i, per tant, un angle ha de mesurar 90^o), l'alçada es mantindria constant.

Capítol 7

Eines

L'explicació detallada de la creació d'eines hiperbòliques es troba al capítol 2 dels annexes. Podreu trobar totes les eines interactives penjades a GeoGebraTube, el núvol col·laboartiu de materials matemàtics del programa GeoGebra: http://ggbtu.be/m1477903 O bé buscant al cercador: Poincaré's Half-Plane model, basic workspace. S'ha utilitzat l'anglès perquè així el màxim de persones puguin utilitzar el conjunt d'eines per treballar amb el Semiplà.

7.1 Recta hiperbòlica

Fitxer: HLine.ggt
Entrada: dos punts.
Sortida: semicircumferència de centre en l'eix OX i que passa pels dos punts donats, semirecta d'origen l'eix OX i que passa pels dos punts.

7.2 Semirecta hiperbòlica

Fitxer: HRay.ggt
Entrada: dos punts.
Sortida: arc de circumferència amb centre en l'eix OX que té origen al primer punt i passa pel segon i semirecta d'extrem l'eix OX i d'origen el primer punt i que passa pel segon.

7.3 Segment hiperbòlic

Fitxer: HSegment.ggt
Entrada: dos punts.
Sortida: arc de circumferència amb centre en l'eix OX que té com a extrems els dos punts d'entrada i segment d'extrems els dos punts.

7.4 Paral·leles frontera

Fitxer: FrontierParallels.ggt
Entrada: dos punts de la recta hiperbòlica i un punt qualsevol.
Sortida: dues rectes hiperbòliques.

7.5 Centre Hiperbòlic

Fitxer: HCentre.ggt
Entrada: una circumferència.
Sortida: el centre hiperbòlic de la circumferència.

7.6 Circumferència Hiperbòlica donats tres punts

Fitxer: HCircle3p.ggt
Entrada: tres punts.
Sortida: la circumferència hiperbòlica i el seu centre hiperbòlic.

7.7 Circumferència Hiperbòlica donats el centre hiperbòlic i un punt

Fitxer: HCircleCP.ggt
Entrada: el centre hiperbòlic i un punt.
Sortida: la circumferència hiperbòlica.

7.8 Circumferència Hiperbòlica donats el centre hiperbòlic i el radi hiperbòlic

Fitxer: HCircleCR.ggt
Entrada: el centre hiperbòlic i el radi hiperbòlic.
Sortida: la circumferència hiperbòlica.

7.9 Arc de circumferència hiperbòlica donats el centre hiperbòlic i els extrems

Fitxer: HCircularArc.ggt
Entrada: el centre hiperbòlic i dos punts.
Sortida: l'arc de circumferència hiperbòlic.

7.10 Mediatriu Hiperbòlica

Fitxer: HPerpendicularBisector.ggt
Entrada: dos punts.
Sortida: la mediatriu hiperbòlica.

7.11 Perpendicular Hiperbòlica a una circumferència hiperbòlica

Fitxer: HPerpendicularPHC.ggt
Entrada: un punt i una circumferència hiperbòlica.
Sortida: la perpendicular hiperbòlica a la circumferència i que passa pel punt donat.

7.12 Perpendicular Hiperbòlica a una recta hiperbòlica

Fitxer: HPerpendicularPHL.ggt
Entrada: un punt i una recta hiperbòlica.
Sortida: la perpendicular hiperbòlica a la recta i que passa pel punt donat.

7.13 Bisectriu hiperbòlica d'un angle

Fitxer: HAngleBisector.ggt
Entrada: el vèrtex de l'angle i dos punts dels costats.
Sortida: la bisectriu hiperbòlica de l'angle.

7.14 Triangles hiperbòlics

Fitxer: HTriangles.ggt
Entrada: tres punts
Sortida: el triangle format pels segments hiperbòlics que uneixen els tres punts.

7.15 Angles hiperbòlics

Fitxer: HAngles.ggt
Entrada: punt, vèrtex, punt
Sortida: angle hiperbòlic

7.16 Altura triangle hiperbòlic

Fitxer: HAlturaTH.ggt
Entrada: punt, extrems del segment
Sortida: Valor de l'altura del triangle hiperbòlic

7.17 Àrea triangle hiperbòlic

Fitxer: HAreath.ggt
Entrada: 3 vèrtexs del triangle
Sortida: Valor de l'àrea d'un triangle hiperbòlic

7.18 Tangent hiperbòlica

Fitxer: HTangent.ggt
Entrada: circumferència, punt d'aquesta.
Sortida: recta hiperbòlica.

Capítol 8

Conclusions

Després de realitzar el treball *Més enllà d'Euclides*, queda analitzar l'assoliment dels objectius que ens havíem marcat en un inici. Pel que fa als objectius conceptuals considerem que hem aconseguit assolir-los tots, ja que hem entès tant des del context històric com des de la geometria axiomàtica, el desenvolupament de les geometries no euclidianes i, en especial, la geometria hiperbòlica. Per fer això, sovint hem hagut d'oblidar totes les idees preconcebudes i intentar aprendre alguns conceptes com si fossin nous, d'una manera més abstracta, sense la base intuïtiva que té la geometria euclidiana. Hem acabat dominant el programa GeoGebra després de crear el conjunt d'eines que ens han permès treballar amb el model del Semiplà de forma còmoda i interactiva.
Respecte als objectius procedimentals hem realitzat un treball de manera lliure i autònoma, amb l'ajuda del nostre tutor i d'un professor universitari, però basant-nos en la recerca i treball propis del grup. Gràcies a les noves eines que hem adquirit per resoldre problemes i a la capacitat d'abstracció que hem pogut desenvolupar, hem assolit un nivell de matemàtiques superior al que teníem al començament del treball. Hem redactat el treball en el llenguatge de processament de textos LaTeX tot i les complicacions que han anat sorgint. En relació als objectius humans hem estat capaços d'organitzar el temps d'acord amb la feina que calia fer superant així els dubtes i problemes que anaven sorgint. D'aquesta forma hem sabut resoldre els inconvenients que, tot i l'esforç requerit per a superar-los, han resultat molt positius i ens han ajudat a seguir avançant amb més ganes. Les diferents visions de cadascú d'un tema determinat ens obligaven a discutir i contrastar les opinions, fet que ens ha ajudat a assimilar els conceptes més fàcilment i a què tots els integrants del grup aprenguéssim per igual.

Un dels inconvenients que vam tenir a l'hora de realitzar el treball va ser la redacció a LaTeX, ja que tot i donar un resultat visual molt satisfactori, era enrevessada. La inserció i creació de les il.lustracions utilitzades també han estat un problema afegit així com algunes limitacions del programari GeoGebra.

Com a grup estem molt satisfets per la feina realitzada després de nou mesos de treball. Hem aconseguit assolir els nostres propòsits tot i que ens hauria agradat poder incloure més eines, haver creat altres models hiperbòlics amb el Geogebra per tal de fer més extens el nostre estudi envers aquest tipus de geometria o ampliar la part algebraica del treball.

Per això, volem animar a tots aquells estudiants de batxillerat interessats en les matemàtiques i atrets per nous reptes a seguir amb aquest treball de recerca per tal d'ampliar la part algebraica i crear més eines o també, crear eines en altres plans no-euclidians com el Disc de Poincarè.

Amb aquest treball de recerca se'ns ha obert una nova porta a les matemàtiques i al món de la geometria que no pensàvem que podríem tenir; com deia C.B. Boyer: "Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions".

Capítol 9

Agraïments

Volem donar les gràcies a totes les persones que s'han implicat i han ofert la seva ajuda per a l'elaboració d'aquest projecte.
Primerament, agrair al Pedro Román, el nostre tutor del treball, l'ajuda que ens ha prestat durant tot el treball, sense la qual el treball no hauria estat possible. La seva experiència ens ha ajudat a entendre els conceptes més complexos i a guiar-nos a l'hora d'enfocar el treball. Volem agrair-li, a més, la seva total disponibilitat i l'empenta que sempre ens ha donat perquè traguem el millor de nosaltres mateixos. Pel seu recolzament i ajuda en qualsevol àmbit volem donar-li gràcies.

La creació de les eines ha estat possible finalment gràcies a en Michael Borcherds i a l'Stephen Jull, programadors del programari Goegebra, que ens han ajudat en qüestions tècniques que han anat sorgint mentre avançàvem amb el treball.

També volem agrair en Josep Maria Brunat, del departament de Matemàtiques Aplicades II de la UPC, per haver-nos aconsellat sobre com enfocar el treball quan encara no ho teníem clar i pel suport bibliogràfic que ens va facilitar, que ha estat de gran ajuda per al treball.
Agraïm l'ajuda de les nostres famílies per haver-nos recolzat sempre amb el treball i haver tingut la paciència de portar-nos sempre a casa l'altre per seguir amb el treball.

Finalment voldríem agrair-nos l'un a l'altre el fet d'haver-nos sabut complementar i treballar junts, aprenent de les nostres mancances i intentant millorar, sempre amb el recolzament de l'altre.

Capítol 10

Bibliografia

[1] N.Lobachevski; The Theory of Parallels; The Open Court Publishing Company; Chicago-London, 1914.

[2] J.Bolyai;Non-Euclidean Geometries; Springer, 2006.

[3] A.S.Smogorzhevski; Acerca de la geometría de Lobachevski; Ed. Mir; Moscou, 1978.

[4] Euclides; Elements; University of Texas, 2008.

[5] H.S.M.Coxeter; Non-Euclidean Geometry; The Mathematical Association of America; Washington D.C., 1998.

[6] R.Bonola; Non-Euclidean Geometry; The Open Court Publishing Company; Chicago, 1912.

[7] A.Dou; Orígenes de la geometria no euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus.

[8] C.I. Castillo; Geometría

[9] A.R.Tarrida; Geometria Axiomàtica; Societat Catalana de Matemàtiques.

[10] J.B.B.Cordero; Lobachevski, descubridor de la geometría hiperbólica; Revista de matemática: teoría y aplicaciones 2(1); 1995.

[11] J. Abardia; Taller de Geometria Hiperbòlica; Universitat Autònoma de Barcelona

[12] F.Rothe; The Poincaré Half-Plane Model; University of North Carolina at Charlotte

[13] Semiplà de Poincarè: http://geometrias-no-euclideanas.blogspot.com.es/2007/10/suplemento-1.html

[14] Pedro Román López; Apunts universitaris de la carrera de Matemàtiques.