Sobre la Resolució de les Equacions Algebraiques

Niels Henrik Abel, el cèlebre matemàtic que va demostrar la Irresolubilitat de la Quíntica.

(*Reproducció d'un segell emès el 5 de juny de 2002 en commemoració del 200è aniversari del seu naixement*)

DEDEKIND

Índex

Índex de figures

Capítol 1

Introducció

1.1 Introducció Personal

En la nostra societat, la major part de la gent rebutja aprendre matemàtiques. Creuen que la seva utilitat és nul·la, i s'interessen per altres ciències, com podrien ser la física o la biologia, ja que a un nivell divulgatiu es poden entendre millor. Les matemàtiques, en canvi, necessiten obligatòriament del seu llenguatge matemàtic per poder ser estudiades i, a més a més, es necessita una base sòlida de coneixements per poder entendre resultats de dificultat superior.

D'acord, és cert que no podem trobar una aplicació directa de les matemàtiques més abstractes a la vida quotidiana, però el que sí que podem fer és entendre-les com un repte per a nosaltres mateixos, com un puzle. El cas més clar, potser, és el de resoldre una equació, ja que hem de buscar quin o quins nombres fan que la igualtat que tenim al davant es compleixi.

Aquesta idea de buscar les solucions d'un problema, sempre des de la rigorositat del llenguatge matemàtic, em va començar a apassionar durant el curs de 4t d'ESO. Com a branca de les matemàtiques, sempre m'havia agradat l'àlgebra i a l'ESO ja em preguntava perquè la fórmula de les solucions d'una equació general de segon grau té la seva peculiar estructura.

Un dia em vaig decidir a preguntar-li al meu professor de matemàtiques: I perquè és aquesta fórmula? Aleshores, el meu professor em va demostrar la fórmula algebraicament i vaig quedar fascinat. A classe aquesta fórmula no l'havíem demostrat mai, però jo podia entendre el perquè d'aquella expressió matemàtica.

Quan va començar el curs de 1r de Batxillerat, vaig decidir que volia fer el Treball de Recerca de matemàtiques. Li ho vaig comentar al meu professor, i em va dir que tenia pensat un tema per al meu treball. Em va explicar que en acabar aquest treball, podria entendre quines són les fórmules que ens permeten trobar les solucions de les equacions de 3r i 4t grau. Però també em va dir que podria entendre perquè **no** hi ha una fórmula per a les solucions de l'equació de 5è grau.

Abans de començar el treball, no m'havia preguntat com resoldre una equació de 5è grau. Potser perquè mai no havia tingut la necessitat de resoldre'n una. De fet, a l'institut només es resolen equacions de 2n grau i, en comptades ocasions, s'han de trobar les arrels enteres d'una cúbica amb l'ajut del mètode de Ruffini. Per tant, la sorpresa fou descobrir que no existeix una fórmula per trobar les solucions per radicals d'una equació general de 5è grau o superior. Però llavors la pregunta òbvia és: Per què? Què té l'equació general de 5è grau que la fa irresoluble per radicals?

Entusiasmat per aquestes preguntes, he investigat el tema i he intentat respondre-les en aquest treball.

1.2 Metodologia del Treball

En aquest Treball de Recerca s'ha fet un estudi de les equacions algebraiques. S'ha fixat com a objectiu poder entendre els misteris de l'equació general de 5è grau.

El treball es divideix en tres grans blocs:

1. **Ampliació dels Nombres Complexos**.
   En aquest capítol es comença fent una introducció elemental dels nombres complexos recordant els conceptes que s'expliquen a 1r de Batxillerat. Després s'expliquen diverses propietats dels nombres complexos, i s'acaba enunciant el *Teorema Fonamental de l'Àlgebra*, ja que és un teorema en el qual es recolza el treball.

2. **Estudi de les equacions algebraiques de 1r, 2n, 3r i 4t grau**.
   En aquest segon capítol primerament es comença definint conceptes molt elementals sobre les equacions algebraiques. Seguidament, es procedeix a fer un estudi sistemàtic de les equacions de 1r, 2n, 3r i 4t grau i de l'estructura de les seves solucions. S'ha intentat demostrar d'una manera clara i rigorosa les fórmules que ens permeten trobar les solucions de les equacions algebraiques de 1r, 2n, 3r i 4t grau.

3. **Estudi particular de l'equació de 5è grau**.
   En aquest tercer i últim capítol, primerament s'estudien alguns resultats anteriors al treball d'Abel i després s'exposa de manera raonada els quatre passos en què es basa la demostració d'Abel.

   El capítol s'ha completat amb un apèndix on s'aprofundeix en el concepte de demostracions per *reducció a l'absurd* (veure l'apèndix A) i amb un segon apèndix on s'ha fet una biografia de Niels Henrik Abel (veure l'apèndix B).

1.3 Introducció Històrica

Als segles XVIII-XVI aC els matemàtics mesopotàmics i babilònics ja eren capaços de resoldre equacions de 1r i 2n grau. El que els mancava era la notació que fem servir actualment, i això va provocar que no poguessin estudiar equacions de grau superior. Feien servir les matemàtiques per resoldre problemes del dia a dia i per a la construcció dels seus edificis.

Els matemàtics grecs també van estudiar les equacions, però sempre des del punt de vista de la geometria. Per a ells, si un resultat o una expressió matemàtica no tenia sentit geomètric, simplement no l'estudiaven. Cal destacar les aportacions del matemàtic grec Diofant d'Alexandria, que va viure al s. III, ja que va introduir una nova manera de designar la incògnita: com un *símbol*, el que va permetre que s'avancés molt més ràpidament en l'estudi de les equacions.

Els matemàtics àrabs, entre els segles XI-XV dC, també van fer aportacions per poder comprendre millor les equacions, però no va ser fins al Renaixement a Itàlia que es van fer avenços significatius en la resolució de les equacions de 3r i 4t grau.

Entre els matemàtics del Renaixement que van destacar per les seves aportacions a l'àlgebra, cal destacar la figura de Scipione del Ferro (1465-1526) que va trobar un *algorisme*[1] algebraic per poder resoldre les equacions cúbiques de la forma

$$x^3 + mx = n$$

Un altre matemàtic important va ser Gerolamo Cardano (1501-1576), que va publicar l'*Ars Magna sive de regulis algebraicis* (l'Art sublim de les regles algebraiques), on s'ofereix la resolució de Niccoló Fontana (1499-1557), de sobrenom Tartaglia, de la cúbica reduïda

$$x^3 + px + q = 0$$

Com veurem en aquest treball, trobar les solucions d'aquestes equacions està relacionat amb el que s'anomena el *discriminant* (Δ) de l'equació. A la fórmula que ens permet trobar les solucions, s'ha de calcular l'arrel quadrada d'aquest discriminant, però aquest pot ser negatiu, cosa que per als matemàtics del Renaixement era un problema. De fet, els casos en què $\Delta < 0$ no es podien resoldre i Cardano el va anomenar el *casus irreducibilis*. L'*Ars Magna* de Cardano també ofereix una manera de resoldre la quàrtica general.

Podem destacar els matemàtics Rafaelle Bombelli (∼1526-1573) i François Viète (1540-1603) en l'estudi d'aquest cas, al qual ningú podia donar-li sentit. Viète, però, va ser molt més determinant que qualsevol dels seus contemporanis perquè va introduir les *lletres* per designar els *coeficients*, fent possible l'estudi de les equacions polinòmiques de forma genèrica.

Per poder trobar significat complet al cas $\Delta < 0$ es va haver d'esperar a l'aparició de Leonhard Euler (1707-1783), el matemàtic que va introduir un nou conjunt de nombres, els nombres complexos ($\mathbb{C}$). En els nombres complexos el cas $\Delta < 0$ sí es pot resoldre, com veurem en aquest treball. Euler també va voler trobar una fórmula per resoldre una equació general de 5è grau, també anomenada *quíntica*,

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Per molt que ho va intentar, però, mai va trobar resposta a aquest problema. El misteri sobre la quíntica va romandre sense resposta durant alguns anys després de la seva mort, fins que Niels Henrik Abel (1802-1829) va trobar una resposta inesperada, afirmant que no es podia resoldre una quíntica de la mateixa manera que una cúbica o una quàrtica. Concretament, es diu que la quíntica no és resoluble *per radicals*, i això és el que intentarem entendre en aquest treball.

[1] Entenem per algorisme a un conjunt seqüencial d'operacions que realitzem per obtenir un resultat determinat.

Capítol 2

Nombres Complexos

2.1 Definició i Operacions Elementals

Formalment, introduïm els nombres complexos a partir de la definició de la *unitat imaginària* que es nota pel símbol i. Fou el mateix Euler qui va escriure $i = \sqrt{-1}$. Aleshores, definim el conjunt de nombres complexos com:

$$\mathbb{C} = \{z = a + b\,i \quad | \quad a,\, b\, \in \mathbb{R}\}$$

S'anomenen nombres complexos perquè en la seva escriptura cal emprar més d'una quantitat[1]. Un nombre complex s'acostuma a escriure amb la lletra z, per diferenciar-lo d'un nombre real, que normalment s'escriu amb la lletra x. El nombre real a rep el nom de *part real de* z i es nota per $\Re(z)$ i el nombre real b rep el nom de *part imaginària de* z i es nota per $\Im(z)$. Dos nombres complexos són iguals si, i només si, les seves parts reals i imaginàries són iguals.

$$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \Re(z_1) = \Re(z_2) \quad \text{i} \quad \Im(z_1) = \Im(z_2)$$

Qualsevol nombre real x es pot considerar com un nombre complex z prenent $\Im(z) = 0$. I, anàlogament, els nombres complexos z complint $\Im(z) = 0$ són els nombres reals. Amb tot això podem considerar $\mathbb{C}$ com una extensió algebraica de $\mathbb{R}$ (escrivim $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Els nombres complexos z complint $\Re(z) = 0$ s'anomenen *imaginaris purs*.

Al conjunt $\mathbb{C}$ definim les operacions suma i producte com:

$$(a + b\,i) \,+\, (a' + b'\,i) = (a + a') \,+\, (b + b')\,i$$
$$(a + b\,i) \,\cdot\, (a' + b'\,i) = (aa' \,- bb') \,+\, (ab' + a'b)\,i$$

Exemple 2.1.1

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 3 + 2i \\ z_2 &= 4 - 5i \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1 + z_2 = 7 - 3i \\ z_1 - z_2 = -1 + 7i \\ z_1 \,\cdot\, z_2 = 22 - 7i \end{cases}$$

$\bowtie$

[1] I no per la seva aparent "complicació", com molta gent pot arribar a pensar. En matemàtiques, s'anomenen *formes complexes* a les expressions de magnituds on cal més d'una quantitat per tenir-les ben definides. Per exemple, els angles sexagesimals tenen expressions decimals, 32.75, o expressions complexes, 32° 45'.

Definim el *conjugat* d'un nombre complex $z = a + b\,i$ com el nombre complex $\bar{z} = a - b\,i$. És a dir, dos nombres complexos són conjugats si, i només si, tenen la mateixa part real però les parts imaginàries són oposades. En llenguatge matemàtic,

$$z_1 \text{ i } z_2 \text{ són conjugats } \Leftrightarrow \Re(z_1) = \Re(z_2) \quad \text{i} \quad \Im(z_1) = -\Im(z_2)$$

Exemple 2.1.2
El conjugat de $z = 3 - 4\,i$ és $\bar{z} = 3 + 4\,i$ $\bowtie$

La conjugació és una transformació *involutiva*. Això vol dir que el conjugat del conjugat torna a ser el mateix nombre inicial. En llenguatge matemàtic,

$$\bar{\bar{z}} = z \tag{2.1}$$

El conjugat d'un nombre complex ens serveix per poder definir el quocient entre dos nombres complexos. Primer de tot observem que el producte $z \cdot \bar{z}$ sempre és un nombre real.

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 + b^2 \ \in \mathbb{R}$$

Observem que $z \cdot \bar{z} \neq 0$ (llevat que $z = 0$). Com que aquest producte sempre és diferent de zero, ara estem en condicions de poder definir el quocient de dos nombres complexos. Siguin $z_1 = a + b\,i$ i $z_2 = c + d\,i$. Aleshores:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a + b\,i}{c + d\,i} \cdot \frac{c - d\,i}{c - d\,i} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)\,i}{c^2 + d^2}$$

Exemple 2.1.3

$$\frac{3 - 4\,i}{5 + 3\,i} = \frac{3 - 4\,i}{5 + 3\,i} \cdot \frac{5 - 3\,i}{5 - 3\,i} = \frac{(3 - 4\,i)(5 - 3\,i)}{5^2 + 3^2} = \frac{3 - 29\,i}{34}$$

Per tant, $\Re\left(\dfrac{3 - 4\,i}{5 + 3\,i}\right) = \dfrac{3}{34}$ i $\Im\left(\dfrac{3 - 4\,i}{5 + 3\,i}\right) = -\dfrac{29}{34}$ $\bowtie$

Teorema 2.1.1
La conjugació en els nombres complexos compleix les següents propietats:

(a) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$ *(b)* $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ *(c)* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

(d) $\Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ *(e)* $\Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Demostració
Demostrem les propietats (b) i (e). Les altres es demostren anàlogament.

(b) Siguin $z = a + b\,i$ i $z' = a' + b'\,i$. Aleshores,

$$z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\,i \ \Rightarrow \ \overline{z \cdot z'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)\,i \tag{2.2}$$

Per altra banda,

$$\bar{z} \cdot \bar{z}' = (a - b\,i) \cdot (a' - b'\,i) = (aa' - bb') - (ab' + a'b)\,i \tag{2.3}$$

Efectivament, (2.2) i (2.3) són iguals.

(e)

$$\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{zi} = \frac{a+bi-(a-bi)}{2i} = \frac{a+bi-a+bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \qquad (2.4)$$

$\square$

Observació 2.1.1
Les potències enteres de la unitat imaginària es repeteixen cíclicament.

$$i^0 = 1\,, \qquad i^1 = i\,, \qquad i^2 = -1\,, \qquad i^3 = -i\,, \qquad i^4 = 1\,, \qquad \ldots$$

Cal observar també el fet que

$$\frac{1}{i} = -i \;\Leftrightarrow\; 1 = -i^2$$

$\bowtie$

Un altre càlcul que hem de saber fer a $\mathbb{C}$ és el de l'arrel quadrada d'un complex. Suposem que $z = a + b\,i$ i $\sqrt{z} = c + d\,i$. Aleshores:

$$\sqrt{z} = c + d\,i \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{z}\right)^2 = (c + d\,i)^2 \;\Rightarrow\; a + b\,i = c^2 - d^2 \,+\, 2cd\,i$$

Si els nombres complexos han de ser iguals, les seves parts reals i imaginàries ho han de ser també simultàniament. Això comporta resoldre el sistema no lineal següent on les incògnites són els nombres c i d.

$$\left.\begin{aligned} c^2 - d^2 &= a \\ 2cd &= b \end{aligned}\right\}$$

Exemple 2.1.4
Calculem $\sqrt{-168 + 374i}$. Cal resoldre:

$$\left.\begin{aligned} c^2 - d^2 &= -168 \\ 2cd &= 374 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c^2 - d^2 &= -168 \\ cd &= 187 \end{aligned}\right\}$$

Per tant:

$$cd = 187 \;\Rightarrow\; d = \frac{187}{c} \;\Rightarrow\; d^2 = \frac{34969}{c^2}$$

Substituïm el valor de d^2 a l'equació $c^2 - d^2 = -168$. Aleshores,

$$c^2 - d^2 = -168 \;\Rightarrow\; c^2 - \frac{34969}{c^2} = -168$$

$$\Rightarrow\; c^4 + 168c^2 - 34969 = 0 \;\Rightarrow\; c^2 \begin{array}{l} \nearrow c_1^2 = 121 \\ \searrow c_2^2 = -289 \end{array}$$

Considerem la solució $c_1^2 = 121$

$$\Rightarrow\ c_1 = \pm\sqrt{121}\ \Rightarrow\ c_1 = \pm 11\ \Rightarrow\ d_1 = \frac{187}{c_1} = \pm\frac{187}{11}\ \Rightarrow\ d_1 = \pm 17$$

Per tant, tenim 2 solucions:

$$\sqrt{-168+374i} = \begin{array}{l} \nearrow z_1 = 11 + 17\,i \\ \\ \searrow z_2 = -11 - 17\,i \end{array}$$

Podem comprovar que, efectivament, $z_1^2 = z$

$$(11 + 17\,i)^2 = 11^2 - 17^2 + 2 \cdot 11 \cdot 17\,i = -168 + 374\,i \quad \surd$$

(anàlogament podem comprovar que $z_2^2 = z$)
La solució $c_2^2 = -289$ no és correcta atès que c i d han de ser nombres reals.

$\bowtie$

Per tant, qualsevol nombre complex z té dues arrels quadrades que són oposades (com passa en el cas real).

2.2 Interpretació Geomètrica. Mòdul i Argument

El matemàtic francès Jean Robert Argand (1768-1822) donà una interpretació geomètrica dels nombres complexos, representant-los en uns eixos de coordenades que, actualment, s'anomenen *pla complex* o *pla d'Argand*.

Considerem uns eixos de coordenades cartesianes. L'eix d'abscisses l'anomenem *eix real* i l'eix d'ordenades l'anomenem *eix imaginari*. Aleshores, representem cada nombre complex $z = a + b\,i$ sobre aquests eixos. Per a cada complex obtenim un punt del pla que anomenem *afix* del nombre complex z. Sovint s'identifica el punt del pla amb el nombre complex z (veure la Figura 2.1).

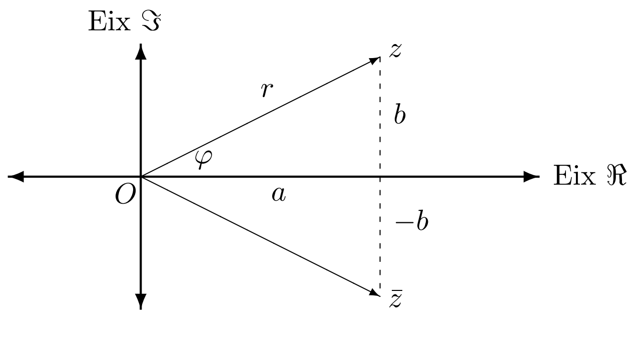


Figura 2.1: Interpretació geomètrica de $z = a + b\,i$ i el seu conjugat $\bar{z} = a - b\,i$.

Un cop representat z en el pla d'Argand, observem que podem definir cada nombre complex de dues maneres diferents. A l'expressió $z = a + b\,i$ se'n diu *forma binòmica* o *forma cartesiana*.

Però hi ha una altra manera d'expressar el nombre complex z. Sigui r la distància des de l'origen de coordenades, O, fins a l'afix de z i sigui φ l'angle que forma el vector traçat des de O fins a z. Al nombre real positiu r se l'anomena *mòdul* del complex z i es representa per $|z|$. L'angle φ s'anomena *argument* del complex z, es representa per $\arg(z)$ i està determinat llevat de múltiples de 2π. Si volem determinar un únic argument per a cada z del pla complex, hem de restringir φ a un interval semi-obert de longitud 2π que, normalment, és $[0, 2\pi)$. A l'expressió $z = r_\varphi$ se l'anomena *forma polar* d'un nombre complex.

Les següents expressions ens diuen com podem passar de forma binòmica a forma polar.

$$a + b\,i \;\rightarrow\; r_\varphi \;: \qquad \left.\begin{array}{r} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \arg(z) = \varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{array}\right\} \qquad \text{amb } \; 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{2.5}$$

Observació 2.2.1
$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ⋈

Les expressions que passen de forma polar a forma binòmica són:

$$r_\varphi \;\rightarrow\; a + b\,i \;: \qquad \left.\begin{array}{r} a = |z|\cos\varphi = r\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi = r\sin\varphi \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Quan calculem $\arg(z)$ amb (2.5) cal considerar el quadrant corresponent del pla complex:

$$\begin{array}{l} z \in \text{1r quadrant} \;\Rightarrow\; \varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ z \in \text{2n quadrant} \;\Rightarrow\; \varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \\ z \in \text{3r quadrant} \;\Rightarrow\; \varphi \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ z \in \text{4t quadrant} \;\Rightarrow\; \varphi \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{array}$$

Exemple 2.2.1

1. $a + b\,i \;\rightarrow\; r_\varphi$: Considerem $z = 2\sqrt{3} - 2\,i$. Observem que $z \in$ 4t quadrant. Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} a = 2\sqrt{3} \\ b = -2\,i \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} r = \sqrt{12 + 4} = 4 \\ \varphi = \arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow\; z = 4_{\frac{11\pi}{6}}$$

2. $r_\varphi \;\rightarrow\; a + b\,i$: Considerem $z = 6_{\frac{3\pi}{4}}$. Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} r = 6 \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 6\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} \\ b = 6\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow\; z = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$$

⋈

Teorema 2.2.1
Tenint present que la interpretació geomètrica de la conjugació és una simetria respecte l'eix real i que $|z|$ és una distància, es compleixen les propietats següents:

1. $|z| = 1$ *si, i només si,* $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$

2. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(Desigualtat triangular)*

Demostració

1. Primer de tot observem que:

$$\left.\begin{array}{r} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} \Rightarrow \; z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Per tant,

$$\frac{1}{z} = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \cdot \bar{z} = 1 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = 1 \quad \stackrel{(|z| \geq 0)}{\Longleftrightarrow} \quad |z| = 1$$

2. Si $z = a + b\,i$ i $z' = c + d\,i$ aleshores:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad |z'| = \sqrt{c^2 + d^2}\,, \quad |z + z'| = \sqrt{(a + b)^2 + (b + d)^2}$$

Demostrar $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ és el mateix que veure

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Elevant al quadrat ambdós membres,

$$\begin{aligned} (a + c)^2 + (b + d)^2 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ \Rightarrow \; a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ \Rightarrow \; ac + bd &\leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \end{aligned}$$

Tornem a elevar al quadrat,

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 &\leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ \Rightarrow \; a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd &\leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \\ \Rightarrow \; 2acbd &\leq a^2d^2 + b^2c^2 \\ \Rightarrow \; 0 &\leq a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \\ \Rightarrow \; 0 &\leq (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Aquesta darrera desigualtat és certa atès que un quadrat sempre és ≥ 0.

La desigualtat serà una igualtat quan $ad - bc = 0$. Això passarà quan

$$ad - bc = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Recordem que $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ i $\arg(z') = \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$. Com que

$$\alpha = \beta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \tan\beta\,, \qquad \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Per tant,

$$|z + z'| = |z| + |z'| \;\Leftrightarrow\; \arg(z) = \arg(z' + 2k\pi)$$

$\square$

Observació 2.2.2
Malgrat $\tan(a + k\pi) = \tan\alpha$, en aquest cas la desigualtat es manté. La raó es deu a la interpretació geomètrica de la desigualtat triangular (Figura 2.5). $\bowtie$

Les figures 2.2, 2.3, 2.4 i 2.5 mostren el significat geomètric d'aquests resultats.

Pel que fa a la primera propietat, observem que

$$z = a + b\,i \;\Rightarrow\; \bar{z} = a - b\,i \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i \\ \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i \end{cases}$$

Si ens fixem en els signes de les parts reals i imaginàries, observem que

$$\Re(z) \cdot \Re\left(\frac{1}{z}\right) > 0 \quad \text{(mateix signe)}$$
$$\Im(z) \cdot \Im\left(\frac{1}{z}\right) < 0 \quad \text{(diferent signe)}$$

Combinant aquesta propietat amb el fet que $|z| > 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, podem representar els afixos dels nombres z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$ i els seus inversos en el pla d'Argand, prenent com a referència els valors z complint $|z| = 1$. Tots aquests valors es troben sobre una circumferència de radi 1 i centrada a l'origen de coordenades (Figura 2.2). Si ens restringim als valors z amb mòdul 1, alguns dels valors considerats són iguals, tal com acabem de demostrar (Figura 2.3).

La desigualtat triangular té el significat geomètric representat en la Figura 2.4. Considerem el triangle format pels afixos dels nombres complexos z, z' i $z + z'$. Aleshores, el costat més llarg d'aquest triangle ($|z + z'|$) sempre és inferior a la suma dels altres dos costats ($|z| + |z'|$). La desigualtat es converteix en igualtat quan els arguments dels nombres complexos z i z' difereixen en 2π (Figura 2.5).

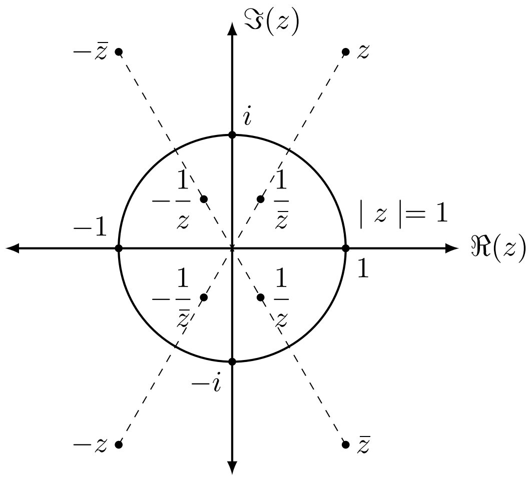


Figura 2.2: Els afixos de z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$ i els seus inversos, quan $\mid z \mid > 1$.

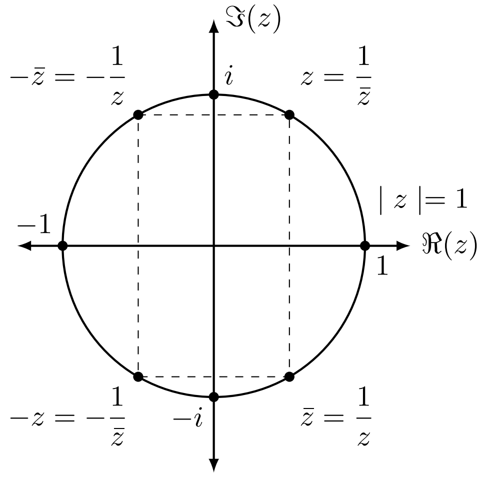


Figura 2.3: Els afixos de z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$ i els seus inversos, quan $\mid z \mid = 1$.

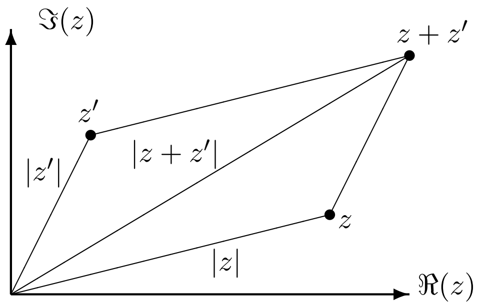


Figura 2.4: El significat de la desigualtat triangular en sentit estricte.

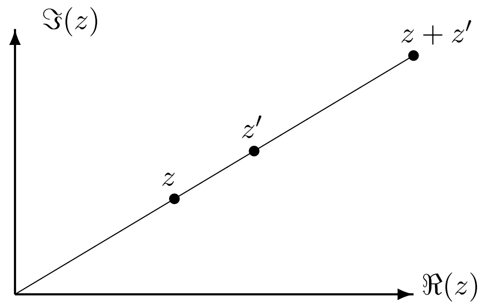


Figura 2.5: La desigualtat triangular quan es compleix $\arg(z) = \arg(z + 2k\pi)$.

2.3 Forma Trigonomètrica d'un Nombre Complex

Per simplificar la notació posem $r = |z|$, $r' = |z'|$ i siguin $\varphi = \arg(z)$, $\varphi' = \arg(z')$. Escrivint z en forma polar,

$$z = a + b\,i \;\Rightarrow\; z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{2.7}$$

Aquesta manera d'escriure un nombre complex s'anomena *forma trigonomètrica* i és especialment útil a l'hora de multiplicar, o dividir, dos complexos. En efecte, siguin els complexos

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,, \qquad \text{i} \qquad z' = r'(\cos\varphi' + i\,\sin\varphi')$$

Calculem el producte zz' i apliquem les fórmules trigonomètriques del sinus i el cosinus de la suma d'angles

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\cdot r'(\cos\varphi' + i\,\sin\varphi') \\ &= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i\,(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi') \\ &= rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\,\sin(\varphi + \varphi')) \end{aligned}$$

És a dir,
$$zz' = rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\ \sin(\varphi + \varphi')) = rr'_{\varphi+\varphi'} \tag{2.8}$$

Si fem $z = z'$ de l'equació anterior en resulta:
$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\ \sin 2\varphi)$$

Reiterant el procés n vegades queda:
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = (r^n)_{n\varphi} \tag{2.9}$$

Aquesta darrera expressió es coneix amb el nom de *fórmula de De Moivre.*

Com que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ i $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi - i\ \sin\varphi}{(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)(\cos\varphi - i\ \sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\ \sin(-\varphi))$$

Ara podem estendre (2.8) al quocient:
$$\frac{z}{z'} = z\frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\ \sin(\varphi - \varphi')) = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\varphi-\varphi'} \tag{2.10}$$

També podem estendre (2.9) a exponents negatius:
$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\varphi - i\ \sin n\varphi) = \left(r^{-n}\right)_{-n\varphi} \tag{2.11}$$

2.3.1 Identitat d'Euler

Sembla natural preguntar-nos què significa e^z si z és un nombre complex. Si $z = a + bi$, llavors haurà de ser
$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} \tag{2.12}$$

El primer factor és conegut en ser a un nombre real, i el problema rau a atribuir un valor i un "significat" al segon factor.

Sembla lògic exigir que sigui quin sigui el valor que li donem, es conservin les propietats formals de les operacions amb potències tals com:
$$\begin{aligned} e^{\alpha i+\beta i} &= e^{\alpha i}e^{\beta i} \\ e^{\alpha i-\beta i} &= \frac{e^{\alpha i}}{e^{\beta i}} \\ \left(e^{\alpha i}\right)^k &= e^{k\alpha i} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Suposem que $e^{i\alpha}$ és un nombre complex:
$$e^{i\alpha} = a + bi = z$$

Suposem també que la igualtat s'ha de mantenir en canviar i per $-i$:
$$e^{-i\alpha} = a - bi = \bar{z}$$

Multiplicant ambdues igualtats resulta

$$1 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$$

Recordem que el mòdul de z és $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Per tant, l'expressió anterior ens diu que el mòdul de $e^{i\alpha}$ és igual a 1

$$|e^{i\alpha}| = \sqrt{e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha}} = \sqrt{1} = 1$$

Per tant $e^{i\alpha}$ és un nombre complex de mòdul 1 i això vol dir que el podem escriure com:

$$e^{i\alpha} = \cos\beta + i \sin\beta \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

atès que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Vegem finalment perquè sembla raonable que $\alpha = \beta$. Si $\alpha \to 0$, llavors hem d'esperar que $e^{i\alpha} \to 1$. Això exigeix que $\cos\beta \to 1$ i $\sin\beta \to 0$. Aquestes dues darreres expressions es compleixen quan $\beta \to 0$. És a dir, per a valors "petits" de α els dos angles α i β han de ser molt semblants.

Si prenem $\alpha = \beta$ és immediat comprovar que es compleixen totes les propietats (2.13). En efecte, les dues primeres es converteixen en les conegudes fórmules trigonomètriques del sinus i cosinus d'una suma i d'una diferència d'angles i la tercera és la fórmula de De Moivre (2.9). En definitiva, podem donar la següent:

Definició 2.3.1

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \tag{2.14}$$

Si fem $\alpha = \pi$ obtenim la cèlebre igualtat

$$e^{i\pi} = -1 \;\Rightarrow\; e^{i\pi} + 1 = 0$$

atribuïda a Euler i que relaciona els cinc nombres més "importants" del càlcul: e, i, π, 1, i 0.

Una conseqüència interessant de la definició anterior és la següent:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \sin\alpha$$

Sumant i restant resulta

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \tag{2.15}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{2.16}$$

Podem comprovar numèricament que aquestes expressions funcionen. Per exemple,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicant (2.14), (2.15) i (2.16) a $\alpha = \pi/4$ i $\alpha = \pi/3$, respectivament, obtenim:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Utilitzant aquestes expressions, (2.12) i les identitats trigonomètriques elementals, podem calcular les raons trigonomètriques d'un $z \in \mathbb{C}$. Per exemple, si $z = 2 + 3i$:

$$\sin(2+3i) = \sin 2\cos(3i) + \cos 2\sin(3i) = \sin 2 \cdot \frac{e^{-3} + e^3}{2} + \cos 2 \cdot \frac{e^{-3} - e^3}{2i}$$

Atès que $\quad \dfrac{1}{i} = -i$,

$$\sin(2+3i) \approx 9.1544991 - 4.16890696i$$

De manera anàloga,

$$\begin{aligned} \cos(2+3i) &= \cos 2\cos(3i) - \sin 2\sin(3i) = \cos 2 \cdot \frac{e^{-3} + e^3}{2} - \sin 2 \cdot \frac{e^{-3} - e^3}{2i} \\ &\approx -4.189626 - 9.109228i \end{aligned}$$

La tangent no serà res més que el quocient entre aquestes dues quantitats complexes

$$\tan(2+3i) = \frac{\sin(2+3i)}{\cos(2+3i)} \approx -0.0037640256 + 1.0032386274i$$

2.4 Teorema Fonamental de l'Àlgebra

Durant els anys de Batxillerat a molt instituts s'expliquen els nombres $\mathbb{C}$. Amb la introducció d'aquest conjunt de nombres, s'explica que les equacions de 2n grau que no es podien resoldre els cursos anteriors (això era perquè el discriminant de l'equació de 2n grau era negatiu, $\Delta < 0$) en realitat sí es poden resoldre i, per tant, es poden trobar sempre les dues solucions d'una equació algebraica de 2n grau. El que no s'acostuma a explicar és que el fet de poder trobar sempre aquestes dues solucions és possible gràcies al *Teorema Fonamental de l'Àlgebra*. Aquest teorema estableix el següent:

> *Tot polinomi en una variable de grau $n \geq 1$ amb coeficients reals o complexos té almenys una arrel (real o complexa).*

Si bé és cert que aquest és el seu enunciat més comú, potser és més clar per a nosaltres el següent enunciat, que és totalment equivalent:

Teorema 2.4.1 (Teorema Fonamental de l'Àlgebra (*TFA*))
Un polinomi $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ en una variable, no constant i a coeficients complexos, té tantes arrels com indica el seu grau, comptant les arrels amb les seves multiplicitats.

La demostració d'aquest resultat supera el nivell d'aquest treball de recerca però podem presentar alguns exemples del seu ús.

Exemple 2.4.1
Si $p(x) = x^2 - 3x - 40 \in \mathbb{R}[x]$, atès que el grau de $p(x)$ és 2, el *TFA* ens assegura que $p(x)$ **només** té dues arrels que, en aquest cas, són reals (enteres) i valen $\alpha_1 = -5$ i $\alpha_2 = 8$. $\bowtie$

Exemple 2.4.2
Si $p(x) = 3x^2 - 6x + 30 \in \mathbb{R}[x]$, atès que el grau de $p(x)$ és 2, el *TFA* ens assegura que $p(x)$ **només** té, d'igual manera que en el cas anterior, dues arrels. En aquest cas, però, les arrels no pertanyen al cos que serveix de suport al polinomi, $\mathbb{R}$, sinó que són complexes ($\mathbb{C}$). Llurs valors són $\alpha_1 = 1 + 3i$ i $\alpha_2 = 1 - 3i$. $\bowtie$

Exemple 2.4.3
Si $p(z) = z^2 - (3 - 4i)x + 23 - 11i \in \mathbb{C}[z]$, atès que el grau de $p(x)$ és 2, el *TFA* ens assegura que $p(z)$ **només** té dues arrels. En aquest cas, però, els coeficients de l'equació i les arrels sí pertanyen al mateix conjunt de nombres, els $\mathbb{C}$. Els valors de les arrels són $\alpha_1 = 1 - 7i$ i $\alpha_2 = 2 + 3i$. Observem que com que almenys un dels coeficients de l'equació és $\mathbb{C}$ amb la part imaginària diferent de 0, les arrels no tenen perquè ser conjugades. $\bowtie$

La relació entre les dues maneres d'enunciar aquest teorema és que, un cop trobada una arrel del polinomi, es poden trobar les altres arrels fent servir algorismes de divisió polinòmica com la Deflació de Horner (també coneguda a bastament com la Regla de Ruffini).

El fet destacable d'aquest resultat matemàtic és la gran generalitat que presenta, ja que el podem aplicar a qualsevol polinomi. Molta de l'àlgebra que s'explica als instituts té com a fonament aquest teorema, i per això és de vital importància conèixer-ne, almenys, la seva existència. Per exemple, en aquest treball s'utilitza diverses vegades una manera d'escriure un polinomi mitjançant les seves arrels, que no és res més que una altra manera d'entendre aquest teorema: Un polinomi $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ (i.e. a coeficients complexos) de grau $n \geq 1$ es pot expressar com un producte de n polinomis lineals:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$$

Exemple 2.4.4
Seguint amb l'exemple 2.4.1, aquesta versió del *TFA* ens permet escriure

$$p(x) = x^2 - 3x - 40 = (x + 5)(x - 8)$$

Pel que fa a l'exemple 2.4.2,

$$p(x) = 3(x - (1 + 3i))(x - (1 - 3i))$$

I per últim, si volem escriure el polinomi de l'exemple 2.4.3, obtenim el següent producte:

$$p(z) = 3(z - (1 - 7i))(x - (2 + 3i))$$

$\bowtie$

Tal com hem comentat, aquest teorema no el podem demostrar aquí a causa de la seva complexitat. La primera vegada que va ser demostrat ho feu el matemàtic Carl Friedrich Gauss (a l'edat de 22 anys) i el va arribar a demostrar de 4 maneres diferents al llarg de la seva vida. Va fer la primera demostració l'any 1799 i, 50 anys més tard, el 1849, va fer la quarta i última demostració, que és similar a la primera, però on estenia el camp de variació dels coeficients als nombres complexos.

2.4.1 Polinomis Simètrics de les Arrels

L'objectiu d'aquest treball és demostrar i entendre que podem trobar les solucions de les equacions algebraiques de grau $n \leq 4$ per radicals en funció dels coeficients de l'equació. Ara bé, també hi ha maneres d'obtenir els coeficients d'una equació només coneixent-ne les seves arrels. Aquestes maneres d'escriure els coeficients estan íntimament relacionades amb els polinomis simètrics.

Un polinomi simètric en les variables x_1, x_2, ..., x_n és un polinomi invariant per qualsevol permutació –reordenació– arbitrària de x_1, x_2, ..., x_n.

Seguint aquesta definició, podem dir que el polinomi

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

és simètric perquè el seu valor és invariant si canviem l'ordre de les arrels. En canvi, el polinomi

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

no és simètric, ja que no val el mateix si canviem les arrels d'ordre:

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \neq x_2^2 - x_1^2$$

Abans d'enunciar el resultat destacable, definirem una notació per a les següents sumes de les arrels, anomenades *Polinomis simètrics elementals* en les variables α_1, α_2, ..., α_n:

$$\begin{aligned}
S_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\
S_2(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n \\
&\quad + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j \\
S_3(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k \\
&\vdots \\
S_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n
\end{aligned}$$

on S_p és el sumatori de les arrels agrupades en termes de p arrels, excloent la repetició de termes deguda a l'ordenació de les arrels. Vegem-ne un exemple.

Exemple 2.4.5
Si les arrels d'una equació de tercer grau són 2, 3 i 7, els polinomis simètrics elementals en aquestes variables (les 3 arrels) són:

$$\begin{aligned} S_1(2,3,7) &= 2+3+7 = 12 \\ S_2(2,3,7) &= 2\cdot 3 + 2\cdot 7 + 3\cdot 7 = 41 \\ S_3(2,3,7) &= 2\cdot 3\cdot 7 = 42 \end{aligned}$$

$\bowtie$

Teorema 2.4.2
Si el polinomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{2.17}$$

descompon a factors lineals

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \tag{2.18}$$

Aleshores

$$\begin{aligned} S_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) &= (-1)^k\,\frac{a_{n-k}}{a_n} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Demostració
Per demostrar les igualtats anteriors, el que hem de fer és igualar els coeficients del polinomi (2.17) amb el desenvolupament (o expansió) de (2.18).

El procediment no és complicat, però sí que és llarg en els casos on el polinomi és de grau és superior a 4. El que farem serà demostrar aquestes igualtats per als casos $n = 2$ i $n = 3$, que són els que estudiarem més a fons, i així veurem el procediment de la demostració, aplicable a qualsevol $n \geq 4$. $\square$

Exemple 2.4.6
Seguint l'exemple anterior, el polinomi $p(x)$ amb arrels 2, 3 i 7 té l'expressió següent:

$$p(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 42$$

$\bowtie$

Proposició 2.4.1
Donada una equació algebraica de 2n grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

amb arrels α_1 i α_2, aleshores:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= -\frac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Demostració
Atès que $a \neq 0$, podem escriure

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Les solucions de l'equació anterior continuen essent α_1 i α_2. Per tant, utilitzant el *TFA* (Teorema 2.4.1), podem factoritzar el polinomi en producte de factors lineals.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \tag{2.21}$$

Desenvolupant el darrer producte obtenim

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2 \tag{2.22}$$

Finalment, igualant els coeficients de (2.22) amb els de (2.21), obtenim les igualtats de (2.20). □

Exemple 2.4.7
Imaginem que volem construir un polinomi de 2n grau coneixent-ne les seves dues arrels, $\alpha_1 = 17$ i $\alpha_2 = 19$. Podem trobar els valors dels coeficients de l'equació algebraica que té per solucions α_1 i α_2 fent servir les igualtats expressades a (2.20). Primerament trobem l'equació en què el coeficient màxim $a = 1$, i després podem trobar equacions equivalents, multiplicant o dividint l'equació per un nombre arbitrari:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = 17 + 19 &= -\frac{b}{a} = -b \;\Rightarrow\; b = -36 \\ \alpha_1\alpha_2 = 17 \cdot 19 &= \frac{c}{a} = c \;\Rightarrow\; c = 323 \end{aligned}\right\}$$

Per tant, l'equació amb arrels α_1 i α_2, i amb $a = 1$ és:

$$x^2 - 36x + 323 = 0$$

També podem fer servir el mateix procediment per construir un polinomi amb coeficients complexos. Si considerem un polinomi les arrels del qual valen $\alpha_1 = 5 - 7i$ i $\alpha_2 = 8 + 3i$, i assumint que $a = 1$, trobem que:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = 5 - 7i + 8 + 3i &= -\frac{b}{a} = -b \;\Rightarrow\; b = -13 + 4i \\ \alpha_1\alpha_2 = (5 - 7i) \cdot (8 + 3i) &= \frac{c}{a} = c \;\Rightarrow\; c = 61 - 41i \end{aligned}\right\}$$

Finalment, obtenim l'equació algebraica

$$z^2 + (-13 + 4i)z + 61 - 41i = 0$$

$\bowtie$

Proposició 2.4.2
Donada una equació de tercer grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

amb arrels α_1, α_2 *i* α_3, *aleshores:*

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -\frac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \frac{c}{a} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Demostració
Fent servir un procediment molt similar a l'emprat a l'apartat anterior, i observant que $a \neq 0$, podem escriure

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Atès que les tres solucions de les dues equacions, α_1, α_2 i α_3, segueixen essent les mateixes, podem factoritzar

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \tag{2.24}$$

Desenvolupant el darrer producte obtenim

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \tag{2.25}$$

Finalment, igualant els coeficients de (2.25) amb els de (2.24), obtenim les igualtats de (2.23). $\square$

Exemple 2.4.8
Si volem construir un polinomi de 3r grau a coeficients complexos coneixent-ne les arrels, podem fer servir les igualtats expressades a (2.23) per trobar-ne els valors dels coeficients. Considerem un polinomi les arrels del qual són $\alpha_1 = 1+2i$, $\alpha_2 = 2-3i$ i $\alpha_3 = 6$, i el coeficient màxim del qual sigui $a = 1$. Llavors obtenim que:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 2i + 2 - 3i + 6 = -\frac{b}{a} = -b \;&\Rightarrow\; \boxed{b = -9 + i} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = (1 + 2i)(2 - 3i) + (1 + 2i)\cdot 6 + (2 - 3i)\cdot 6 = \frac{c}{a} \;&\Rightarrow\; \boxed{c = 26 - 5i} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (1 + 2i)(2 - 3i)\cdot 6 = -\frac{d}{a} = -d \;&\Rightarrow\; \boxed{d = -48 - 6i} \end{aligned}\right\}$$

Finalment, escriurem l'equació algebraica desitjada com

$$z^3 + (-9 + i)z^2 + (26 - 5i)z - (48 + 6i) = 0$$

$\bowtie$

Capítol 3

Equacions Algebraiques

En aquest capítol farem un estudi de les equacions algebraiques de 2n, 3r i 4t grau. Però abans hem de definir alguns conceptes previs a partir dels quals podrem treballar.

3.1 Definicions Elementals

Definició 3.1.1 (Equació algebraica de grau n)
Una equació algebraica general de grau n és una equació del tipus

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad a_n \neq 0 \tag{3.1}$$

L'exponent màxim en l'expressió (3.1) s'anomena grau *(de l'equació algebraica).*
Els nombres $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0 \div n)$ reben el nom de coeficients *(de l'equació). Cadascun dels coeficients a_i rep un nom propi, que depèn del grau de la variable a la que multiplica. Així,*

- a_0 $\rightarrow$ *terme independent*
- a_1 $\rightarrow$ *coeficient lineal*
- a_2 $\rightarrow$ *coeficient quadràtic*
- a_3 $\rightarrow$ *coeficient cúbic*
- a_n $\rightarrow$ *coeficient de grau n, $\forall n \geq 4$*

Definició 3.1.2 (Arrels d'una equació algebraica)
Els valors x que satisfan la igualtat (3.1) s'anomenen arrels *(de l'equació). A vegades també s'utilitza el terme* zeros *(de l'equació) o, més genèric,* solucions *(de l'equació). Tradicionalment se les nota com: $\alpha_i\,,\ i = 1, 2, \ldots$.*

Exemple 3.1.1
L'equació algebraica $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30 = 0$ és de quart grau i les seves arrels són:

$$\alpha_1 = -2\,, \quad \alpha_2 = 1\,, \quad \alpha_3 = 3\,, \quad \alpha_4 = 5$$

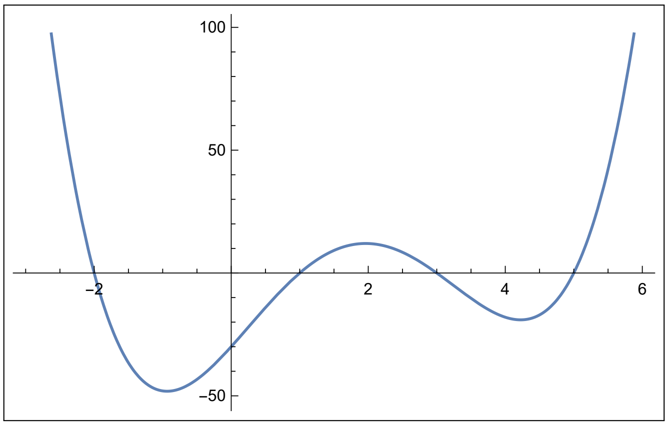
$\bowtie$

L'equació (3.1) es pot interpretar com la intersecció del polinomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

amb l'eix d'abscisses OX.

Exemple 3.1.2
Seguint l'exemple anterior, si considerem el polinomi $p(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30$ pels valors $x \in [-3, 6]$, obtenim la representació:



Podem observar fàcilment que les interseccions amb l'eix OX coincideixen amb els valors -2, 1, 3 i 5. $\bowtie$

La pregunta òbvia és: com es calculen les arrels de l'exemple 3.1.1? Aquesta pregunta senzilla no sol tenir una resposta fàcil. De fet, no sempre es podran calcular de manera exacta els valors numèrics d'aquests zeros. Quan els puguem calcular de manera exacta direm que *obtenim les solucions de (3.1) per radicals.* Més concretament,

Definició 3.1.3 (Equació algebraica resoluble per radicals)
Una equació algebraica de grau n es diu resoluble per radicals *quan podem trobar els zeros de l'equació fent servir només les operacions aritmètiques fonamentals (addició, subtracció, producte, quocient, potència i radicació) entre els coeficients de l'equació.*

No totes les equacions algebraiques es poden resoldre per radicals. De fet, són molt poques les que es poden resoldre d'aquesta manera. I, quan la solució per radicals existeix, la complexitat d'aquesta depèn estrictament del grau de l'equació algebraica. De fet veurem, en aquest treball, que **només** es poden resoldre per radicals les equacions de grau $n \leq 4$.

Observació 3.1.1
Algunes equacions concretes de grau $n \geq 5$ es poden resoldre per radicals, però *en general* no podrem resoldre per radicals una equació de grau superior a 4. $\bowtie$

Tot seguit estudiarem les equacions algebraiques que es poden resoldre per radicals, veurem l'estructura que presenten les seves solucions i demostrarem les fórmules que ens permeten arribar a aquestes solucions.

3.2 Equacions Algebraiques de 1r Grau

És el tipus més senzill d'equació que ens podem trobar. Fent servir la definició 3.1.1 i considerant $a_1 \neq 0$, sabem que és del tipus:

$$a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.2}$$

Amb arguments algebraics bàsics trobem que l'arrel x que satisfà (3.2) és:

$$\boxed{x = -\frac{a_0}{a_1}}$$

Exemple 3.2.1
Per tant, l'equació de primer grau $2x - 7 = 0$ té per solució $x = \dfrac{7}{2}$. $\bowtie$

3.3 Equacions Algebraiques de 2n Grau

Quan el coeficient quadràtic $a_2 \neq 0$ i $a_n = 0\ \forall n \geq 3$, obtenim una equació algebraica de segon grau. El resultat següent, conegut a bastament per tots els estudiants d'institut, ens proporciona les solucions d'una equació general de segon grau. Per evitar la notació carregosa dels subíndexs, utilitzarem la nomenclatura $Ax^2+Bx+C=0$ en lloc de la $a_2x^2+a_1x+a_0=0$.

Teorema 3.3.1
L'equació quadràtica genèrica $Ax^2 + Bx + C = 0$, amb $A \neq 0$, té per solucions:

$$x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{3.3}$$

Demostració
Com que $A \neq 0$, comencem dividim l'equació per A. Obtenim:

$$x^2 + bx + c = 0$$

on hem reanomenat $b = \dfrac{B}{A}$ i $c = \dfrac{C}{A}$. Ara efectuem el canvi de variable $x = y - \dfrac{b}{2}$. Per tant:

$$x^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2}\right) + c = 0$$

Si desenvolupem els parèntesis, obtenim l'equació

$$y^2 - by + \frac{b^2}{4} + by - \frac{b^2}{2} + c = 0$$

on podem cancel·lar el terme by i obtenir una equació de segon grau reduïda (sense terme lineal). Ara aïllem la variable y:

$$y^2 + c - \frac{b^2}{4} = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{b^2}{4} - c = \frac{b^2 - 4c}{4} \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

A la darrera expressió desfem el canvi de variable $x = y - \frac{b}{2}$ per obtenir:

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Finalment, recuperem els coeficients originals A, B i C obtenint la tan coneguda expressió de les solucions d'una equació de segon grau:

$$\boxed{x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

$\square$

Observació 3.3.1
L'expressió $B^2 - 4AC$ s'anomena *discriminant* de l'equació i es nota amb la lletra grega Δ. Se l'anomena així perquè separa –*discrimina*– les tres possibles situacions que ens podem trobar a l'hora de calcular (3.3):

- $\Delta > 0 \;\Rightarrow$ Dues arrels reals diferents, o *simples*.
- $\Delta = 0 \;\Rightarrow$ Dues arrels reals coincidents, o una arrel real *doble*.
- $\Delta < 0 \;\Rightarrow$ Cap arrel real.

$\bowtie$

Exemple 3.3.1
Veiem un exemple de cada cas:

1. Dues arrels reals diferents:

$$3x^2 - 17x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{17 \pm 13}{6} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = 2/3 \end{array}$$

2. Una arrel real doble:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = -1 \\ \searrow x_2 = -1 \end{array}$$

3. Cap arrel real:

   Si els coeficients són reals obtenim dues arrels complexes conjugades:

$$2x^2 - 4x + 52 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{-400}}{4} = \frac{4 \pm 20i}{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 1 + 5i \\ \searrow x_2 = 1 - 5i \end{array}$$

En canvi, si els coeficients són complexos, llavors les arrels no tenen perquè ser conjugades:

$$z^2 - (4-5i)z + 17 - 19i = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{(4-5i) \pm \sqrt{-77+36i}}{2} = \frac{4-5i \pm (2+9i)}{2} \begin{array}{l} \nearrow z_1 = 3+2i \\ \\ \searrow z_2 = 1-7i \end{array}$$

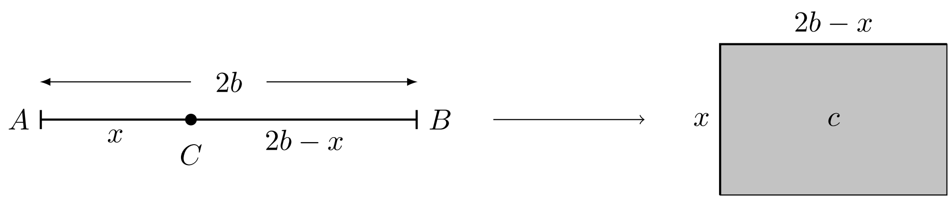
$\bowtie$

3.3.1 Antecedents Històrics de l'Equació de 2n Grau

És sabut que la humanitat sap resoldre equacions de segon grau des de fa molt temps. Tenim constància de manuscrits dels matemàtics mesopotàmics (entre el 1800 aC i 1600 aC) on s'utilitzaven sistemàticament les solucions d'equacions de segon grau per a la construcció dels seus temples i altra obra civil. Tanmateix, totes les equacions que es resolien eren del tipus $\Delta \geq 0$ perquè s'entenia que la situació $\Delta < 0$ no tenia cap sentit pràctic. Això, de fet, és conseqüència d'un problema geomètric –és a dir, d'un problema real i no només *numèric*– que podem plantejar en els termes següents:

> *"Dividir un segment AB, de longitud $2b$, en dues parts AC i CB, de manera que el rectangle que formen els segments AC i CB tingui una àrea donada c."*

Geomètricament volem fer:



Algebraicament, volem resoldre la següent equació:

$$x(2b-x) = c \;\Rightarrow\; x^2 - 2b\,x + c = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4c}}{2} = b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

i aquesta darrera expressió sempre tindrà sentit perquè, geomètricament parlant, el rectangle d'àrea màxima ha de ser el quadrat de costat b (dividir el segment $2b$ en dues parts iguals). I quan això passi, $b^2 = c$ i $\Delta = 0$. En aquest problema no podem donar un valor de c més gran que b^2 perquè no tindria sentit geomètric. És a dir, si el segment fa 10 cm, el rectangle d'àrea màxima és el quadrat de costat 5 cm i, per tant, en aquest cas podem acceptar qualsevol valor $0 < c < 25$.

3.4 Equacions Algebraiques de 3r Grau

3.4.1 Arrels Cúbiques Complexes

A la secció anterior hem vist que les solucions de les equacions quadràtiques estan íntimament relacionades amb les arrels quadrades. D'igual manera, les solucions de les equacions cúbiques també estan relacionades amb les arrels cúbiques de nombres $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Un nombre real r qualsevol té una única arrel cúbica real, $\sqrt[3]{r}$. Un nombre complex $z \neq 0$ té tres arrels cúbiques complexes diferents. Quan considerem un nombre real com un complex ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), llavors deduïm que qualsevol nombre real $r \neq 0$ també tres arrels complexes diferents, de les quals dues tenen parts imaginàries conjugades, i la tercera arrel té part imaginària nul·la (és real).

Per fer el càlcul de les arrels cúbiques d'un complex $z \neq 0$, primerament l'escrivim en la seva forma trigonomètrica (2.7)

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \rho[(\cos(\theta+2\pi) + i\sin(\theta+2\pi)] \\ &= \rho[(\cos(\theta+4\pi) + i\sin(\theta+4\pi)] \\ &= \rho[(\cos(\theta+6\pi) + i\sin(\theta+6\pi)] = \cdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

on $\rho > 0$ és el mòdul de z i θ és el seu argument i compleix $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ara bé, si $a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és una possible arrel cúbica de z, amb mòdul a i argument α, mitjançant el teorema de De Moivre (2.9) obtenim que

$$[a(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^3 = a^3[\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)]$$

Igualant aquesta darrera expressió amb (3.4) obtenim per a z les igualtats següents,

$$\begin{array}{lll} a^3 = \rho & \Rightarrow & a = \sqrt[3]{\rho} \\ 3\alpha = \theta & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\theta}{3} \\ 3\alpha = \theta + 2\pi & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\theta+2\pi}{3} \\ 3\alpha = \theta + 4\pi & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\theta+4\pi}{3} \\ 3\alpha = \theta + 6\pi & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\theta+6\pi}{3} \equiv \dfrac{\theta}{3} \\ 3\alpha = \theta + 8\pi & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\theta+8\pi}{3} \equiv \dfrac{\theta+2\pi}{3} \end{array}$$

on el signe $\equiv$ s'utilitza per designar angles equivalents en el sentit que la diferència entre ells és un múltiple de 2π. Entenem que $\alpha \equiv \beta$ si, i només si, $f(\alpha) = f(\beta)$ per a totes les funcions trigonomètriques f.

Resumint, les tres arrels cúbiques complexes de $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ són les següents:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta}{3} + i\sin\dfrac{\theta}{3}\right) \\ z_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right)\right] \\ z_3 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right)\right] \end{cases}$$

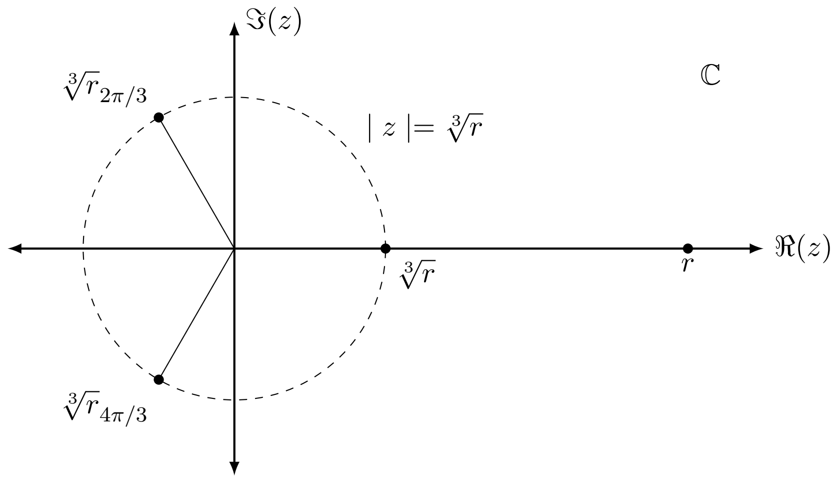


Figura 3.1: Les tres arrels cúbiques complexes d'un nombre $r \in \mathbb{R}$, quan $\theta = 0$.

Observació 3.4.1
En particular, si r és un nombre real positiu, tenim que $\rho = r$ i $\theta = 0$, de manera que hi ha una arrel real al semiplà dret i dues arrels complexes conjugades al semiplà esquerre (veure Figura 3.1); en canvi, si r és un nombre real negatiu, tenim que $\rho = -r$ i $\theta = \pi$, el que significa que hi ha una arrel real en el semiplà esquerre i dues arrels complexes conjugades al semiplà dret (tindríem una figura com la Figura 3.1 simètrica respecte l'eix imaginari). En ambdós casos les arrels cúbiques de r són:

$$z_1 = \sqrt[3]{r} \quad , \quad z_2 = \sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{i} \quad z_3 = \sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

⋈

Exemple 3.4.1
Veiem un exemple de cada cas:

1. Arrels cúbiques d'un nombre real r.

   Volem calcular les arrels cúbiques del nombre real $r = 64$. Fent servir les expressions anteriorment explicades per calcular les tres arrels cúbiques d'un nombre real i tenint present que $\sqrt[3]{64} = 4$, obtenim directament que:

$$z_1 = 4 \quad , \quad z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i \quad \text{i} \quad z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

2. Arrels cúbiques d'un nombre complex z:

   Volem calcular les arrels cúbiques del complex $z = -32\sqrt{2} + 32\sqrt{2}i$. En el nostre cas, $a = -32\sqrt{2}$ i $b = 32\sqrt{2}$. Primerament calculem el mòdul de z, ρ, i l'argument de z, θ:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-32\sqrt{2}\right)^2 + \left(32\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4096} = 64$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

Observem que en aquest cas $\theta \neq \frac{7\pi}{4}$ ja que el nombre complex pertany al segon quadrant, perquè $a < 0$ i $b > 0$. Ara calculem el mòdul de les arrels cúbiques de z: $a = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Per tant, ja podem calcular les 3 arrels de z:

$$\begin{cases} z_1 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi/4}{3} + i\sin\dfrac{3\pi/4}{3}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \\ z_2 = 4\left[\cos\left(\dfrac{3\pi/4 + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi/4 + 2\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right) = \\ \quad = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ z_3 = 4\left[\cos\left(\dfrac{3\pi/4 + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi/4 + 4\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right) = \\ \quad = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$\bowtie$

Observació 3.4.2

Cal destacar que de la mateixa manera es poden obtenir les arrels n-simes d'un nombre complex $z \neq 0$, essent n un nombre enter positiu. Si expressem z com a (3.4), les n arrels són sobre la circumferència de radi real $\sqrt[n]{\rho}$, la primera amb un angle $\alpha_1 = \theta/n$ i les arrels restants distribuïdes de manera uniforme amb una diferència d'angles de $2\pi/n$, el que és equivalent a dir que $\alpha_k = (\theta + 2k\pi)/n$, $k = 0 \div n - 1$. En aquest cas, els afixos de les arrels n-simes formen un polígon regular de n costats en el pla complex. A la Figura 3.2 s'ha representat el cas $n = 5$.

En particular, si n és senar, aleshores tot nombre real té una única arrel n-sima real; en canvi, si n és parell i el nombre és positiu, aleshores tindrem dues arrels n-simes reals. Si el nombre és negatiu, no n'hi haurà cap. $\bowtie$

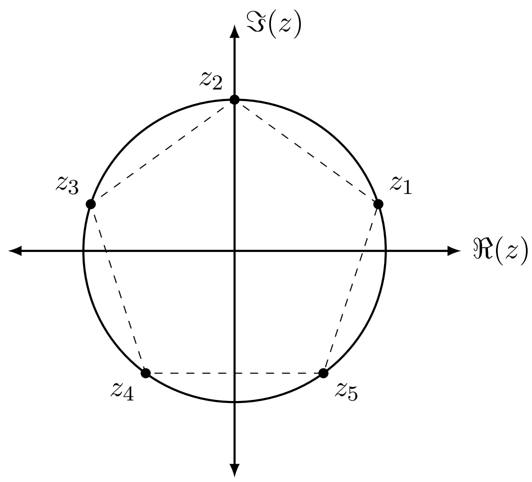


Figura 3.2: Les cinc arrels cinquenes de $z = i \in \mathbb{C}$ formen un pentàgon regular en el pla complex.

3.4.2 Solució de les Equacions de 3r Grau

Quan el coeficient cúbic $a_3 \neq 0$ i $a_n = 0 \ \forall n \geq 4$, obtenim una equació algebraica de tercer grau. En aquesta secció es desenvolupa per a les equacions algebraiques de 3r grau un procediment similar a l'aplicat a les equacions de 2n grau. De la mateixa manera que a la secció anterior, per evitar la notació carregosa dels subíndexs, utilitzarem la nomenclatura $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ en lloc de la $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

Proposició 3.4.1 (Cúbica reduïda)
Una equació algebraica de 3r grau qualsevol

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0\,, \qquad A \neq 0 \tag{3.5}$$

es pot transformar en una equació algebraica de 3r grau sense el terme quadràtic, anomenada equació cúbica reduïda*, que és del tipus*

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3.6}$$

on els coeficients p i q són funció de A, B, C i D.

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{3CA - B^2}{3A^2} \\ q &= \frac{27A^2D - 9ABC + 2B^3}{27A^3} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Demostració
Comencem dividint l'equació (3.5) per A i obtenim l'equació

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

on hem reanomenat $b = \dfrac{B}{A}$, $c = \dfrac{C}{A}$ i $d = \dfrac{D}{A}$ per comoditat. Ara efectuem el canvi de variable $x = y - \dfrac{b}{3}$, de manera similar a com ho havíem fet a l'equació de segon grau. Aleshores:

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(y - \frac{b}{3}\right)^3 = y^3 - by^2 + \frac{b^2}{3}y - \frac{b^3}{27} \\ x^2 &= \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = y^2 - \frac{2b}{3}y + \frac{b^2}{9} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituint aquestes equacions a (3.5), obtenim una cúbica reduïda,

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \text{on} \quad \begin{cases} p = c - \dfrac{b^2}{3} \\ q = d - \dfrac{bc}{3} + \dfrac{2b^3}{27} \end{cases} \tag{3.9}$$

Substituint b, c i d a (3.9) respectivament per B/A, C/A i D/A obtenim (3.7). □

Exemple 3.4.2 ($a = 1$)
L'equació cúbica $x^3 - 4x^2 + 5x - 10 = 0$ mitjançant el canvi $x \mapsto y + \frac{4}{3}$ es transforma en:

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{218}{27} = 0$$

És a dir, $p = -1/3$ i $q = -218/27$. $\bowtie$

Exemple 3.4.3 ($a \neq 1$)
Per transformar l'equació cúbica $4x^3 + 12x^2 + 10 = 0$, amb $a \neq 1$, en una cúbica reduïda, primerament dividim l'equació per $a = 4$:

$$4x^3 + 12x^2 + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 3x^2 + \frac{5}{2} = 0$$

Seguidament, efectuant el canvi de variable $x \mapsto y - 1$, la transformem en:

$$y^3 - 3y + \frac{9}{2} = 0$$

d'on deduïm que $p = -3$ i $q = \dfrac{9}{2}$. $\bowtie$

Teorema 3.4.1 (Fórmula de Tartaglia-Cardano)
Les solucions per l'equació cúbica reduïda $y^3 + py + q = 0$ estan donades per la següent fórmula:

$$\boxed{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \tag{3.10}$$

Demostració
Suposem que la variable y és suma d'unes altres dues, és a dir,

$$y = u + v$$

Efectuant aquest canvi de variable a l'equació (3.9) obtenim de manera successiva les equacions següents:

$$y^3 + py + q = 0 \;\Leftrightarrow\; y^3 = -py - q \;\Leftrightarrow\; (u+v)^3 = -p(u+v) - q$$

Desenvolupem el binomi al cub i agrupem termes convenientment.

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = -p(u+v) - q \;\Leftrightarrow\; u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = -p(u+v) - q$$

D'aquesta última equació, igualant coeficients, deduïm que:

$$3uv = -p \qquad \text{i} \qquad u^3 + v^3 = -q$$

De $3uv = -p \;\Rightarrow\; 27u^3v^3 = -p^3$. És a dir,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \tag{3.11}$$

Si recordem la propietat de les equacions de segon grau (2.20) veiem que u^3 i v^3 són les solucions de l'equació de segon grau:

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{3.12}$$

que té per solucions

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Una solució és u^3 i l'altra és v^3. Anomenant $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$, les solucions de (3.9) són

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Revertint la substitució $x = y - \dfrac{b}{3}$ que hem fet per trobar l'equació cúbica reduïda trobem les solucions de l'equació general (3.5). □

Observació 3.4.3
En aplicar la *Fórmula de Tartaglia-Cardano* per resoldre una equació cúbica a coeficients reals, podem distingir dos casos:

1. Si $\Delta = 0$ totes 3 arrels són reals, i almenys dos d'elles són iguals.
2. Si $\Delta > 0$ l'equació té 1 arrel real i dues arrels imaginàries.
3. Si $\Delta < 0$ l'equació té 3 arrels reals simples.

⋈

Observació 3.4.4
En calcular les arrels cúbiques de (3.10) obtenim tres valors per a u i tres valors per a v. El que ens permet saber com agrupar u i v per obtenir el valor correcte de y és la condició $3uv = -p$. ⋈

Exemple 3.4.4 ($\Delta < 0$)
Hem de resoldre l'equació cúbica

$$3x^3 + 6x^2 - 15x - 18 = 0 \tag{3.13}$$

Per obtenir l'equació cúbica reduïda que busquem, primer hem de dividir (3.13) entre el coeficient cúbic, $a = 3$, per obtenir l'equació

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

En aquest cas, $b = 2$, $c = -5$ i $d = -6$. Ara, efectuem el canvi de variable $x \mapsto y - \frac{2}{3}$ i calculem els coeficients de l'equació cúbica reduïda aplicant les expressions (3.9):

$$p = c - \frac{b^2}{3} = -5 - \frac{2^2}{3} = -\frac{19}{3}$$
$$q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27} = -6 - \frac{2 \cdot (-5)}{3} + \frac{2 \cdot 2^3}{27} = -\frac{56}{27}$$

i obtenim la cúbica reduïda

$$y^3 - \frac{19}{3}y - \frac{56}{27} = 0$$

Ara calculem el discriminant d'aquesta equació

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{25}{3}$$

i, seguidament, la seva arrel quadrada:

$$\sqrt{\Delta} = \frac{5\sqrt{3}}{3}i$$

Apliquem la Fórmula de Tartaglia-Cardano

$$y = \sqrt[3]{\frac{28}{27} + \frac{5\sqrt{3}}{3}i} + \sqrt[3]{\frac{28}{27} - \frac{5\sqrt{3}}{3}i}$$

Calculem les 3 arrels del primer i segon terme, per separat:

$$\sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{28}{27} + \frac{5\sqrt{3}}{3}i} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \approx \frac{4}{3} + 0.57735i \\ u_2 \approx -\frac{7}{6} + 0.866025i \\ u_3 \approx -\frac{1}{6} - 1.443376i \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\frac{28}{27} - \frac{5\sqrt{3}}{3}i} \Rightarrow \begin{cases} v_1 \approx -\frac{1}{6} + 1.443376i \\ v_2 \approx -\frac{7}{6} - 0.866025i \\ v_3 \approx \frac{4}{3} - 0.57735i \end{cases}$$

Recordant que la manera d'agrupar les arrels cúbiques de u i v, explicada a l'observació 3.4.4, és comprovar la condició $uv = -\frac{p}{3} = \frac{19}{9}$, obtenim que els 3 valors correctes de y són:

$$y_1 = u_1 + v_3 = \frac{8}{3}$$
$$y_2 = u_2 + v_2 = -\frac{7}{3}$$
$$y_3 = u_3 + v_1 = -\frac{1}{3}$$

Desfent el canvi de variable $x \mapsto y - \frac{2}{3}$, obtenim que les arrels de l'equació original són:

$$x_1 = y_1 - \frac{2}{3} = 2$$
$$x_2 = y_2 - \frac{2}{3} = -3$$
$$x_3 = y_3 - \frac{2}{3} = -1$$

$\bowtie$

Exemple 3.4.5 ($\Delta = 0$)
Hem de resoldre l'equació ja reduïda

$$x^3 - 12x + 16 = 0 \tag{3.14}$$

En aquest cas $p = -12$ i $q = 16$. En conseqüència $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{256}{4} - \frac{1728}{27} = 64 - 64 = 0$, i la Fórmula de Tartaglia-Cardano es redueix a

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ &= \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} \end{aligned}$$

Aquí s'ha d'anar amb compte de no escriure $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} = 2\sqrt[3]{-8}$ ni $\sqrt[3]{-8} = -2$. En realitat, com vàrem veure a l'observació 3.4.1, les arrels cúbiques de -8 són:

$$\begin{aligned} &-2 \\ &-2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \\ &-2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Com tenim dues arrels cúbiques de -8 sumades, hem d'aplicar la condició $uv = -\frac{p}{3} = 4$.

u	v	$x = u + v$
-2	-2	-4
$1 - \sqrt{3}i$	$1 + \sqrt{3}i$	2
$1 + \sqrt{3}i$	$1 - \sqrt{3}i$	2

Per tant, les solucions de l'equació (3.14) són -4, 2 i 2. $\bowtie$

Exemple 3.4.6 ($\Delta > 0$)
Hem de resoldre l'equació cúbica

$$2x^3 + 6x^2 + 18x + 10 = 0 \tag{3.15}$$

Per obtenir l'equació cúbica reduïda que busquem, primer hem de dividir (3.15) entre el coeficient cúbic, $a = 2$, per obtenir l'equació

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$$

En aquest cas, $b = 3$, $c = 9$ i $d = 5$. Ara, efectuem el canvi de variable $x \mapsto y - 1$ i calculem els coeficients de l'equació cúbica reduïda aplicant les expressions (3.9):

$$\begin{aligned} p &= c - \frac{b^2}{3} = 9 - \frac{3^2}{3} = 6 \\ q &= d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27} = 5 - \frac{3 \cdot 9}{3} + \frac{2 \cdot 3^3}{27} = -2 \end{aligned}$$

i obtenim la cúbica reduïda

$$y^3 + 6y - 2 = 0$$

Ara calculem el discriminant d'aquesta equació

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 9$$

i, seguidament, la seva arrel quadrada:

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

Apliquem la Fórmula de Tartaglia-Cardano

$$y = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2}$$

Apliquem les expressions de l'observació 3.4.1 i així calculem les 3 arrels del primer i segon terme, per separat:

$$\sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{4} \;\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{4} \\ u_2 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ u_3 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{-2} \;\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt[3]{-2} \\ v_2 = \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ v_3 = \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

Apliquem la condició $uv = -\frac{p}{3} = -2$ per agrupar u i v correctament i obtenim que els 3 valors correctes de y són:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2} \\ y_2 &= u_2 + v_3 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ y_3 &= u_3 + v_2 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

Desfent el canvi de variable $x \mapsto y - 1$, obtenim que les arrels de l'equació original són:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2} - 1 \\ x_2 &= y_2 - 1 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 \\ x_3 &= y_3 - 1 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \sqrt[3]{-2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 \end{aligned}$$

$\bowtie$

3.5 Equacions Algebraiques de 4t Grau

Si observem atentament el mètode per resoldre equacions de 3r grau, podem apreciar que aquest mètode es basa en la resolució, després d'algunes manipulacions algebraiques, d'una equació de 2n grau (concretament l'equació 3.12). El mètode per resoldre les equacions de 4t grau és molt similar, i això és el que veurem en aquesta secció.

Una equació de quart grau té la següent forma, on els coeficients a, b, c, d i e són nombres reals o complexos, i $a \neq 0$.

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0} \tag{3.16}$$

Teorema 3.5.1 (Solució per radicals d'una equació algebraica de 4t grau) *Si seguim els mateixos passos que en la simplificació algebraica de l'equació de 3r grau* $\big($*observant que ara hem de fer el canvi de variable* $x = z - \frac{b}{4}\big)$*, podem aconseguir una quàrtica reduïda on* $a = 1$*, que té la forma:*

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \tag{3.17}$$

Ara hem de considerar dos casos.

Cas I. $q = 0$

*En aquest cas l'equació de quart grau rep el nom d'*equació biquadrada*. Les solucions de l'equació reduïda (3.17) amb* $q = 0$ *vénen donades per l'expressió següent (observem que com es tracta d'arrels quadrades, en principi ambdues tenen dos valors, el que dóna un total de 4 valors diferents):*

$$\boxed{z = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}} \tag{3.18}$$

Cas II. $q \neq 0$

Quan existeix el terme lineal, les solucions vénen donades per l'expressió:

$$\boxed{z = \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2} + \sqrt{-\frac{\varepsilon}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}}} \tag{3.19}$$

Aquí el coeficient $\delta \in \{-1, 1\}$ *dóna lloc a dues fórmules diferents i, com que s'han de resoldre arrels quadrades complexes tenim, en principi, les quatre solucions de l'equació de 4t grau. D'altra banda, el nombre* ε *és qualsevol de les arrels de l'equació cúbica auxiliar coneguda com a* resolvent cúbica[1] *(de la quàrtica)*

$$\boxed{y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0} \tag{3.20}$$

El terme $\sqrt{\varepsilon}$ *de l'expressió (3.19) s'interpreta com una qualsevol de les seves dues arrels quadrades.*

Revertint les substitucions fetes trobem les solucions de l'equació original (3.16).

[1] Aquesta resolvent cúbica es coneix amb el nom d'*equació de Ferrari*, en honor al matemàtic de Bolonya Ludovico Ferrari (1522-1565), que fou el primer que va resoldre una equació quàrtica, reduint-la a una equació de 3r grau.

Demostració

$\boxed{\text{Cas I. } q = 0}$

Fent el canvi de variable $u = z^2$, l'equació biquadrada (3.17) es transforma en:

$$u^2 + pu + r = 0$$

Si resolem aquesta equació de 2n grau obtenim que

$$u = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}$$

Si desfem el canvi de variable $z = \pm\sqrt{u}$, obtenim l'expressió (3.18).

$$z = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}$$

$\boxed{\text{Cas II. } q \neq 0}$

Observem primer el següent desenvolupament, amb $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 &= z^4 + (p+\varepsilon)z^2 + \left(\frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 \\ &= z^4 + pz^2 + \varepsilon z^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Si substituïm l'expressió (3.21) en l'equació reduïda (3.17) obtenim la següent cadena d'equacions equivalents.

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \varepsilon z^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2) + qz + r = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\varepsilon z^2 - qz + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r)\right] = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[(\sqrt{\varepsilon}z)^2 - \frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\varepsilon}z) + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r)\right] = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\varepsilon}z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r) - \frac{q^2}{4\varepsilon}\right] = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\varepsilon}z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\varepsilon^3 + 2p\varepsilon^2 + (p^2 - 4r)\varepsilon - q^2)\right] = 0 \tag{3.22}$$

Si ε és qualsevol de les solucions de la resolvent cúbica, és a dir, si

$$\varepsilon^3 + 2p\varepsilon^2 + (p^2 - 4r)\varepsilon - q^2 = 0$$

aleshores l'equació (3.22) es redueix a la següent diferència de quadrats (observem que $\varepsilon \neq 0$ ja que el terme independent q no és zero[2]):

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\varepsilon}z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = 0 \tag{3.23}$$

Fent servir la identitat notable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, l'equació (3.23) es pot factoritzar com:

$$\begin{aligned} &\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2} + \sqrt{\varepsilon}z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2} - \sqrt{\varepsilon}z + \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(z^2 + \sqrt{\varepsilon}z + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(z^2 - \sqrt{\varepsilon}z + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Recordem la propietat arquimediana dels nombres reals (el producte de dues o més expressions igualat a 0 implica forçosament que, com a mínim, una d'aquestes expressions ha de valer 0) i així podem escriure la darrera equació de la següent manera, amb $\delta \in \{-1, 1\}$:

$$z^2 - \delta\sqrt{\varepsilon}z + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} = 0 \tag{3.24}$$

Resolent l'equació de 2n grau i manipulant algebraicament l'expressió obtinguda, arribem a la fórmula (3.19):

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(\delta\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{(\delta\sqrt{\varepsilon})^2 - 4\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}\right) \\ &= \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{4} - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)} \\ &= \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2} + \sqrt{-\frac{\varepsilon}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}} \end{aligned}$$

com volíem demostrar. $\square$

Ara veurem dos exemples de resolució de quàrtiques reduïdes, ja que el procediment per reduir l'equació quàrtica no és un càlcul d'especial interès.

Exemple 3.5.1 ($q = 0$)
Hem de resoldre l'equació

$$z^4 - 10z^2 + 9 = 0$$

En aquest cas $p = -10$ i $r = 9$. Per trobar les quatre solucions, primerament calculem l'expressió

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - r} = 4$$

[2] Un polinomi de grau n es pot factoritzar en n factors del tipus $x - \alpha_i$, on els nombres α_i, reals o complexos, són les arrels de l'equació algebraica ($i = 1 \div n$). En expandir aquests termes obtenim que $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = a_0$ i, per la propietat arquimediana dels nombres reals, podem concloure que si $a_0 \neq 0$ llavors cap de les arrels val 0.

Seguidament apliquem la fórmula (3.18):

$$z = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}} = \pm\sqrt{5 \pm 4}$$

Per tant, obtenim directament les 4 solucions:

$$z = \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = -3 \\ z_4 = -1 \end{cases}$$

$\bowtie$

Exemple 3.5.2 ($q \neq 0$)
Hem de resoldre l'equació

$$z^4 + 12z^2 + 5z + 36 = 0 \tag{3.25}$$

En aquest cas $p = 12$, $q = 5$ i $r = 36$. Escrivim la resolvent cúbica:

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \ \Rightarrow \ z^3 + 24z^2 - 25 = 0$$

Tot i que a aquesta equació es pot aplicar tot el procediment de la secció 3.4.2, l'observació simple dels coeficients ens permet afirmar que $z = 1$ és una solució ja que

$$1^3 + 24 \cdot 1^2 - 25 = 0$$

Com es va indicar, per resoldre l'equació (3.25) **només** necessitem conèixer una de les arrels de la resolvent cúbica. Considerem, doncs, $\varepsilon = 1$ i, per tant, $\sqrt{\varepsilon} = 1$, de manera que la fórmula (3.19) és la següent:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\delta}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{12}{2} - \frac{5\delta}{2}} \\ &= \frac{\delta}{2} + \sqrt{-\frac{25}{4} - \frac{5\delta}{2}} \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{\sqrt{-25 - 10\delta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta + \sqrt{-25 - 10\delta}\right) \end{aligned}$$

Per a $\delta = -1$ obtenim les solucions $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{15}i)$ ja que hem de prendre els dos valors, positiu i negatiu, de l'arrel quadrada, i per a $\delta = 1$ obtenim finalment les dues darreres solucions $z_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{35}i)$. $\bowtie$

Corol·lari 3.5.1
Si recordem les igualtats (2.19), que ens permeten escriure els coeficients d'una equació en funció de les arrels, obtenim que per a una equació general de quart grau ($a \neq 0$)

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

podem establir les següents igualtats:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &= -\frac{b}{a}\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 &= \frac{c}{a}\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 &= -\frac{d}{a}\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 &= \frac{e}{a}\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Capítol 4

La Irresolubilitat de la Quíntica

Hem vist fins ara que la humanitat sap resoldre equacions de 1r i 2n grau des de fa molt temps. Fins i tot, entenien el problema geomètric associat i per aquesta raó no es van preguntar què passava en una equació de segon grau quan, el que avui anomenem discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$), era negatiu. Aquesta era una qüestió sense significat geomètric i, en conseqüència, sense significat matemàtic real.

Pel que fa a les equacions de grau més gran que dos, van haver de passar gairebé sis segles després dels matemàtics grecs perquè els avenços produïts pels matemàtics del Renaixement, a partir de conèixer les gran obres de la matemàtica de l'Islam i gràcies a la introducció de l'àlgebra, permetessin estudiar i resoldre parcialment les equacions de 3r i 4t grau. Diem parcialment perquè no es considerarien resoltes totalment fins que es van introduir els nombres complexos gràcies als treballs de Leonhard Euler.

Però, un cop Ferrari, Tartaglia i Viète, van resoldre les equacions de 4t grau –encara que fos amb una certa dosi de poc formalisme– segurament es van enfrontar amb l'equació general algebraica de grau 5.

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \,, \qquad a_5 \neq 0 \tag{4.1}$$

I, seguint el mateix camí d'èxit que els havia portat a resoldre les equacions de 3r i 4t grau, van començar a buscar expressions algebraiques en funció dels coeficients de (4.1) que resolguessin aquesta equació. Avui dia diem que, aquests matemàtics, van *suposar* que l'equació (4.1) era resoluble per radicals, com també ho eren les de 2n, 3r i 4t grau. De fet, si havia funcionat fins aleshores, perquè no havia de continuar funcionant?

Els matemàtics que van seguir als del Renaixement van continuar el seu treball en la recerca d'unes expressions algebraiques per poder resoldre (4.1). Molts noms il·lustres van buscar, debades, unes fórmules màgiques que no existien. I, el primer que s'adonà que no calia buscar expressions amb radicals que resolguessin (4.1), bàsicament *perquè no existien*, va ser el matemàtic noruec Niels Henrik Abel (1802-1829), en un treball publicat el 1824[1] i revisat posteriorment dos anys més tard.

Els treballs posteriors d'Evariste Galois (1811-1832) ampliaren i generalitzaren els conceptes introduïts per Abel i, d'aquesta manera, naixia una branca nova de l'arbre matemàtic:

[1] *"Demonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des equations générales qui passent le quatrième degré".*

la *Teoria de Galois*. Actualment, el *teorema d'irresolubilitat de la quíntica* d'Abel s'explica a les facultats de Matemàtiques com un corol·lari d'aquesta teoria de galois de les equacions polinòmiques.

4.1 Abans d'Abel

La qüestió de trobar un algorisme d'obtenció de les arrels de l'equació polinòmica de cinquè grau, i de graus superiors, fou motiu de treballs importants des de l'època d'Euler. Entre els més notables podem remarcar, a més dels del mateix Euler i del seu amic Ehrenfreid Walter von Tschirnhaus (1651-1708), els de Gian Francesco Malfiatti (1731-1807), Edward Waring (1736-1798), Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Louis Augustin Cauchy (1789-1857), a banda dels treballs de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) relatius a la caracterització dels polígons regulars construïbles amb regle i compàs i de la resolució d'equacions ciclotòmiques[2] per radicals.

El treball de Lagrange de 1770-1771 és un extens estudi –dues-centes setze pàgines!– de les equacions de 2n, 3r i 4t grau, amb l'esperança de trobar un patró, o una estratègia, que li permeti resoldre l'equació de 5è grau. El matemàtic de Torí intenta resoldre una equació polinòmica per mitjà del que avui anomenem una *resolvent* amb l'esperança fallida, després de realitzar un estudi molt acurat, complet i intens, de les equacions de grau inferior a cinc, en què el grau de la resolvent sigui més petit que el grau de l'equació polinòmica que es vol resoldre. Però va resultar que, en el cas irresolt de la quíntica la resultant és una sèxtica pròpia, a diferència del que succeïa en el cas de la cúbica (resolvent quadràtica) i de la quàrtica (resolvent cúbica).

Malgrat l'esforç –i el gran desengany–, Lagrange no aconsegueix provar ni la resolubilitat ni la irresolubilitat de les equacions generals de grau superior al cinquè. Caldrà esperar fins que, a la primavera de 1824, Niels Henrik Abel faci pública la seva prova de la impossibilitat de resoldre la quíntica per radicals. Tanmateix, en honor a la veritat i el rigor històric, cal dir que uns quants anys abans Paolo Ruffini (1765-1822) s'hi havia aproximat moltíssim.

4.1.1 El Treball de Lagrange

El mètode seguit per Lagrange en el seu treball *"Reflexions sobre la resolució algèbrica de les equacions numèriques"* enviat a l'Acadèmia de Berlín[3] és completament diferent de l'emprat pels matemàtics italians del segle XVI. Aquest van utilitzar transformacions especials, més o menys complicades, obtingudes de manera enginyosa –però també accidental– per simplificar les equacions que volien resoldre.

En canvi, Lagrange intenta demostrar que les solucions d'aquestes equacions es fonamenten en propietats generals, comunes a totes aquestes equacions. El seu mètode, perfectament

[2]S'anomenen *equacions ciclotòmiques* les equacions del tipus

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0\,, \qquad \text{on } p \text{ és un nombre primer.}$$

[3] *"Reflexions sur la résolution algebrique des équations numèriques", Nouveaux Mémoires de l'Academie de Berlín, 1 (1770) pp 134-215; 2 (1771) pp 138-253.*

ordenat i rigorós, es basa en tres conceptes bàsics: la teoria de les permutacions[4], la teoria dels polinomis simètrics[5] i la teoria de *resolvents*.

Exposem a continuació les idees principals en què es basa el mètode de Lagrange. Considerem una equació general de grau n amb $a_n = 1$,

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{4.2}$$

Suposem que els coeficients d'aquesta equació, a_k $k = 1 \div n$, són independents entre sí. Per tant, sembla lògic pensar que les solucions de l'equació també ho seran atès que, d'haver-hi alguna relació entre les arrels, els coeficients dependrien els uns dels altres. Això seria així atès que, en essència, els coeficients són funcions simètriques de les arrels. En definitiva, aquesta suposició el que ve a dir és que les n arrels de (4.2) s'han de considerar com variables independents i les funcions de les arrels són funcions de variables independents.

Per entendre el que estem dient, en el cas de l'equació de 2n grau.

$$x^2 + bx + c = 0$$

existeixen dues funcions de les seves arrels que són simètriques (no canvien de valor en canviar les arrels $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$) que són la suma $\alpha_1 + \alpha_2$ i el producte $\alpha_1\alpha_2$.

Lagrange va demostrar el fet següent lligat amb les funcions *simètriques*:

Teorema 4.1.1 (Lagrange, 1770-1)
Si una funció $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de les arrels d'una equació general de grau n admet, com a mínim, totes les permutacions de les x_i que admet una altra funció $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la funció F es pot expressar de manera racional en termes de G i dels coeficients de l'equació general.

La demostració que fa Lagrange d'aquest resultat és constructiva. És a dir, en diu com expressar F en funció G. Per exemple, en el cas d'una equació de segon grau, atès que $x_1 + x_2 = b$,

$$\left.\begin{array}{l} F(x_1, x_2) = x_1 \\ G(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x_1 = \frac{-b + (x_2 - x_1)}{2}$$

tal com afirma el teorema.

El segon teorema que demostra Lagrange és:

Teorema 4.1.2 (Lagrange, 1770-2)
Si una funció $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de les arrels d'una equació general de grau n no permet totes les permutacions admeses per una altra funció $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ però pren r valors diferents per a les permutacions admeses per G, aleshores F és una arrel d'una equació de grau r, els coeficients de la qual són funcions racionals de G i dels coeficients de l'equació general de grau n.

[4]Una Permutació és qualsevol reordenació dels elements d'un conjunt. Per exemple, el conjunt de tres elements $S_3 = \{x, y, z\}$ té $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutacions possibles:

$$\{x, y, z\}\,,\ \{x, z, y\}\,,\ \{y, x, z\}\,,\ \{y, z, x\}\,,\ \{z, x, y\}\,,\ \{z, y, x\}\,,$$

[5]Un polinomi s'anomena simètric si és invariant per a qualsevol reordenació –permutació– de les seves variables. Per exemple, el polinomi $p(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 5xyz$ és invariant per a qualsevol permutació del conjunt $S_3 = \{x, y, , z\}$.

Aquesta equació de grau r és el que avui anomenem una *resolvent*. Més concretament, Lagrange es va adonar que aquestes resolvents tenien una forma especial on les arrels n-simes de la unitat[6] hi juguen un paper important. La forma d'aquestes expressions és:

$$R = \left(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 + \cdots + \zeta^{n-1} x_n\right)^n \ , \quad \text{on } \zeta^n = 1 \text{ és una arrel } n\text{-sima de la unitat}$$

Exemple 4.1.1 (Mètode de la resolvent de Lagrange quan $n = 3$)
Les tres arrels de la unitat s'obtenen de resoldre

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta_1 = 1 \\ \zeta_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \zeta_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Siguin x_1, x_2 i x_3 les tres arrels d'una equació cúbica,

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{4.3}$$

Considerem la resolvent següent: $R = (x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)^3$. Les sis possibles permutacions de les tres arrels ens donaran els possibles valors de les funcions R. Per calcular els possibles valors, desenvolupem els trinomis i utilitzem les identitats: $\zeta^3 = \zeta^6 = 1$, $\zeta^4 = \zeta$ i $\zeta^5 = \zeta^2$.

Permutació	R	Valor
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$	$(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)^3$	R_1
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1)$	$(x_2 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_1)^3$	$R_2 = R_1$
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$	$(x_3 + \zeta x_1 + \zeta^2 x_2)^3$	$R_3 = R_1$
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$	$(x_1 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_2)^3$	R_4
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1)$	$(x_3 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_1)^3$	$R_5 = R_4$
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$	$(x_2 + \zeta x_1 + \zeta^2 x_3)^3$	$R_6 = R_4$

Per tant, sota l'efecte d'aquestes permutacions, observem que només obtenim dos valors diferents: $R_1 = R_2 = R_3 = t_1$ i $R_4 = R_5 = R_6 = t_2$. Aquests valors de t_1 i t_2 són:

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\zeta(x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3) + 3\zeta^2(x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2) \\ t_2 &= x_1^3 + x_3^2 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\zeta(x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2) + 3\zeta^2(x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3) \end{aligned}$$

Si calculem $t_1 + t_2$ obtenim un polinomi simètric respecte les arrels x_1, x_2 i x_3.

$$t_1 + t_2 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 + 3(\zeta + \zeta^2) f(x_1, x_2, x_3) \tag{4.4}$$

on $f(x_1, x_2, x_3)$ també és un polinomi simètric de les arrels,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3$$

[6] Els valors que compleixen l'equació $x^n - 1 = 0$.

Per tant, t_1+t_2 és funció dels coeficients de (4.3), $F(a_2,a_1,a_0)$. En efecte, per una banda:

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\
&\Rightarrow\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{-a_2})^2 - 2(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{a_1})\\
&\qquad\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = a_2^2 - 2a_1
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Atès que x_1, x_2 i x_3 són arrels de (4.3),

$$\left.\begin{aligned}
x_1^3+a_2x_1^2+a_1x_1+a_0&=0\\
x_2^3+a_2x_2^2+a_1x_2+a_0&=0\\
x_3^3+a_2x_3^2+a_1x_3+a_0&=0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{3} x_k^3 = -a_2\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - a_1\sum_{k=1}^{3} x_k - 3a_0$$

És a dir,

$$\sum_{k=1}^{3} x_k^3 = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0 \tag{4.6}$$

Per altra banda, a l'expressió $(\zeta+\zeta^2)f(x_1,x_2,x_3)$ emprem el fet que $\zeta^2+\zeta+1=0 \Rightarrow \zeta+\zeta^2=-1$ i calculem $(x_1+x_2+x_3)^3$ utilitzant (4.6).

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^3 &= \sum_{k=1}^{3} x_k^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\left(\sum_{i<j} x_i^2x_j + \sum_{i<j} x_ix_j^2\right)\\
(-a_2)^3 &= -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0 + 6(-a_0) + 3f(x_1,x_2,x_3)\\
\Rightarrow\ 3f(x_1,x_2,x_3) &= 9a_0 - 3a_1a_2
\end{aligned}$$

Finalment obtenim l'expressió (4.4) en funció dels coeficients a_2, a_1 i a_0:

$$\boxed{t_1+t_2 = -2a_2^3 + 9a_1a_2 - 27a_0} \tag{4.7}$$

Un procés semblant ens permet escriure el producte t_1t_2, que també és un polinomi simètric de les arrels, en funció dels coeficients de (4.3).

$$\begin{aligned}
t_1t_2 &= (x_1+\zeta x_2+\zeta^2x_3)^3(x_1+\zeta x_3+\zeta^2x_2)^3\\
&= \left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(\zeta+\zeta^2)(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{a_1})\right]^3
\end{aligned}$$

Emprant, com abans, el fet que $\zeta+\zeta^2=-1$ i la igualtat (4.5)

$$\boxed{t_1t_2 = (a_2^2-3a_1)^3} \tag{4.8}$$

Les igualtats (4.7) i (4.8) ens indiquen que t_1 i t_2 són les solucions de l'equació de segon grau en variable w,

$$w^2 + (2a_2^3 - 9a_1a_2 27a_0)w + (a_2^2-3a_1)^3$$

d'acord amb la "resolvent" quadràtica que obteníem en el procés de cercar les solucions d'una cúbica. $\bowtie$

L'exemple anterior, tot i que pot semblar un mètode més complicat que les demostracions de Ferrari i Tartaglia, presenta un avantatge que és d'una importància vital en les demostracions matemàtiques: que es pot generalitzar. Aquest era el punt feble de les demostracions dels matemàtics del Renaixement. Cada nova equació començava el procés pràcticament des de zero.

Exemple 4.1.2 (Mètode de la resolvent de Lagrange quan $n = 4$)
Un estudi semblant es pot fer per al cas $n = 4$. Aquest cas és més feixuc en càlculs i només explicarem les equacions que s'obtenen, sense fer explícitament tots els càlculs.

Considerem una equació general de 4t grau,

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

i siguin x_1, x_2, x_3 i x_4 les quatre arrels d'aquesta equació i la resolvent

$$R = x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 + \zeta^3 x_4 \,, \qquad \zeta \text{ arrel 4a de la unitat}$$

Prenem, per exemple, $\zeta = -1$. Aleshores, $R = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$. En permutar de les $4! = 24$ maneres possibles les quatre arrels x_i, obtenim només sis expressions diferents que, a més, són oposades dues a dues:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= R_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= R_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= R_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= R_4 = -R_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= R_5 = -R_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= R_6 = -R_3 \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Construïm una equació de sisè grau, en variable y, amb arrels les sis expressions anteriors.

$$(y - R_1)(y - R_2)(y - R_3)(y + R_1)(y + R_2)(y + R_3) = (y^2 - R_1^2)(y^2 - R_2^2)(y^2 - R_3^3)$$

Però, un cop més, les expressions R_i són polinomis simètrics de les arrels de l'equació inicial i, per tant, es poden expressar en funció dels coeficients a_i.

$$y^6 - My^4 + 3Ny^2 - P = 0 \qquad \text{on: } \begin{cases} M = 3a_3^2 - 8a_2 \\ N = a_3^4 - 16a_3^2a_2 - 16a_2^2 + 16a_2a_1 - 64a_0 \\ P = a_3^2 - 4a_3 + 8 \end{cases}$$

Amb el canvi de variable $y^2 = z$ obtenim la *resolvent cúbica* de Lagrange per al cas de la quàrtica.

$$z^3 - Mz^2 + 3Nz - P = 0$$

Si anomenem a, b i c les tres arrels de l'equació anterior, desfem el canvi de variable considerant la determinació positiva de l'arrel, $y = \sqrt{z}$, i afegim el fet que la suma de les arrels de la quàrtica inicial compleixen $x_1+x_2+x_3+x_4=-a_3$, obtenim un sistema de quatre equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4&=\sqrt{a}\\ x_1+x_2-x_3-x_4&=\sqrt{b}\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=\sqrt{c}\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=-a_3 \end{aligned}\right\}$$

que és fàcilment resoluble per reducció, obtenint les quatre arrels de l'equació inicial de 4t grau en funció de les tres arrels d'una resolvent cúbica.

$$x_1=\frac{1}{4}\left(-a_3+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \qquad x_2=\frac{1}{4}\left(-a_3-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$$
$$x_3=\frac{1}{4}\left(-a_3+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) \qquad x_4=\frac{1}{4}\left(-a_3-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$\bowtie$

Lagrange doncs, generalitza un procés pel qual la solució d'una equació de 4t grau es redueix a la solució d'una de 3r grau, que al seu temps es redueix a una de segon grau. Però, tal i com s'ha comentat anteriorment, aquesta estratègia falla quan el grau de la que volem resoldre és 5 atès que, en aquest cas, la resolvent és de 6è grau.

Lagrange intentà debades cercar un altre mètode però, finalment hi hagué de renunciar quan s'adonà de la dificultat que presentaven les equacions de grau més gran que 4. Com ell mateix escriu en la seva memòria presentada el 1770,

> *"El problema de resoldre per radicals equacions de grau més gran que quatre és un d'aquells problemes que encara no han estat resolts, malgrat res no demostra la impossibilitat d'obtenir una solució [...]. Segons el nostre raonament, observem que és molt dubtós que els mètodes considerats puguin donar una solució completa de les equacions de cinquè grau."*

De les seves paraules encara s'extreu aquell desig matemàtic de trobar la solució a un problema. Però no podem fer res més que disculpar-lo perquè ningú no pot trobar allò que no existeix.

Durant la seva estada a Berlín, Lagrange encara publicà dues memòries més relacionades amb la resolució d'equacions algebraiques: *"Sobre la forma de les arrels imaginàries de les equacions"* (1773), on feia una dissertació sobre el que més tard acabaria essent el *Teorema Fonamental de l'Àlgebra*[7]; i una ampliació de la memòria anterior titulada *"Investigació sobre la determinació del nombre d'arrels imaginàries de les equacions algebraiques"* (1779).

4.2 La Demostració d'Abel

L'any 1824 Niels Abel va publicar una primera versió de la demostració de la irresolubilitat de l'equació general de 5è grau, o quíntica. Sense conèixer el treball previ de Ruffini, Abel

[7] Aquest text seria el punt de sortida de la tesi doctoral de C. F. Gauss presentada el 1799 i on es feia per primera vegada una demostració rigorosa del *TFA*.

va descobrir el mateix argument uns quants anys més tard i va donar una demostració completa per primera vegada. Segurament Abel coneixia l'opinió de Gauss sobre el fet que la quíntica era irresoluble, però no havent-ne donat cap demostració, semblava que el problema continuava obert.

Quan va arribar a París el 1823, Abel s'enfrontà a alguns dels problemes més durs que es coneixien en aquell moment com, per exemple, el *Darrer Teorema de Fermat*, intentant demostrar la no existència de solucions enteres de l'equació $x^n + y^n = z^n$ quan $n > 2$. La seva aportació a aquest problema són les conegudes com *Fórmules d'Abel* que demostren que qualsevol solució de l'equació anterior, d'existir, haurien de ser nombres extremadament grans[8].

A proposta dels seus professors, Abel va fixar la seva atenció en la cerca de les expressions radicals que poguessin resoldre una quíntica. En un primer moment Abel va creure que havia trobat la solució però quan els seus professors li van demanar alguns exemples numèrics, Abel s'adonà ràpidament que l'expressió que ell havia trobat no era tan general com s'havia pensat. Aquest fet sembla que va ser decisiu perquè ell comencés a pensar que la resolució de la quíntica per radicals no era possible.

La primera versió de la demostració es va publicar el 1824 i va ser sufragada pel propi Abel. Això va fer que, per raons econòmiques, l'estil fos pràcticament telegràfic. Però aquesta demostració li va servir com a carta de presentació entre la comunitat matemàtica internacional del moment, dels que va rebre força elogis, Gauss entre ells. Dos anys més tard publicà una segona demostració on ampliava i refinava alguns dels seus arguments.

Un dels objectius d'aquest treball era donar una versió comentada de la demostració d'Abel. Però aquesta demostració no és gens fàcil. Per tant, explicarem en general en quins fets es basa la demostració i anirem completant amb exemples (sempre que es pugui) els arguments que s'hi presenten. La demostració d'Abel és pel mètode de *reducció a l'absurd*, això és, suposar que existeixen fórmules que resolen la quíntica i, a partir de raonaments matemàtics correctes, arribar a una contradicció.

La demostració d'Abel es basa en quatre etapes.

4.2.1 Primer Pas

Comencem considerant una equació general de 5è grau

$$y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0 \tag{4.10}$$

on els coeficients a, b, c, d i e són variables independents i suposem que es pot resoldre per radicals, és a dir, que y es pot expressar com a funció de les quantitats a, b, c, d i e, usant radicals. Aleshores,

Teorema 4.2.1
Qualsevol funció algèbrica es pot escriure com:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \tag{4.11}$$

[8]Pierre de Fermat (1607-1665) va afirmar –sense demostració– que l'equació $x^n + y^n = z^n$ no tenia solucions enteres positives quan $n \geq 3$. La remarcable demostració d'aquesta afirmació no es va produir totalment fins l'any 1995, a càrrec del professor Andrew Wiles. Altres contribucions importants al problema les devem a Y. Taniyama, G. Shimura, G. Frey, K. Ribet i R. Taylor.

on m és un nombre primer i p, p_1, p_2,..., p_{m-1} i R tenen la mateixa forma que y.

Nota. A la demostració de 1824 Abel considera $p_1 = 1$. Aquesta restricció no és essencial i no apareixerà en la demostració de 1826. Per simplificar, considerarem $p_1 = 1$.

Demostració
Comencem observant que sempre podrem escriure qualsevol radical com a un radical d'índex primer, si cal escrivint radicals dins de radicals. Per exemple, $\sqrt[6]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{A}}$.

Sigui v una funció algebraica. Per tant, $v = F/G$ on:

$$G = g_0 + R^{\frac{1}{p}} + g_2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q R^{\frac{q}{p}}$$

per algun $q \in \mathbb{N}$ i p primer. De manera semblant per F. Considerem les substitucions:

$$R^{\frac{1}{p}} \mapsto \zeta R^{\frac{1}{p}}\ ,\ R^{\frac{1}{p}} \mapsto \zeta^2 R^{\frac{2}{p}}\ ,\ R^{\frac{1}{p}} \mapsto \zeta^{p-1} R^{\frac{1}{p}}\ ,$$

on $\zeta \neq 1$ és una arrel p-sima de la unitat ($\zeta^p - 1 = 0$). Observem que fem $p-1$ substitucions. Per tant, en general, tindrem $p-1$ valors diferents de G. Anomenem-los G_1, G_2, ...,G_{p-1}. Considerem l'expressió

$$v = \frac{FG_1G_2\cdots G_{p-1}}{GG_1G_2\cdots G_{p-1}}$$

El denominador de l'expressió anterior es pot escriure com:

$$\begin{aligned} GG_1G_2\cdots G_{p-1} &= (g_0 + g_1 R^{\frac{1}{p}} + g_2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q R^{\frac{q}{p}}) \\ &\quad \times (g_0 + g_1 \zeta R^{\frac{1}{p}} + g_2 \zeta^2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q \zeta^q R^{\frac{q}{p}}) \\ &\quad \times \cdots \times (g_0 + g_1 \zeta^{p-1} R^{\frac{1}{p}} + g_2 \zeta^{2(p-1)} R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q \zeta^{q(p-1)} R^{\frac{q}{p}}) \\ &= \text{ una expressió sense cap terme } R^{\frac{i}{p}}, \text{ amb } 0 < i < p \end{aligned}$$

on, per raonar la darrera igualtat, hem emprat el fet que:

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{p-1} = \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = 0$$

Si g_0 és un polinomi, ja hem acabat. Si no és el cas, és que conté radicals. Aleshores repetim el procés fins que no tinguem cap radical, deixant g_0 com a una simple funció racional dels coeficients de l'equació. Per tant, podem escriure v com una funció algebraica

$$v = \frac{FG_1G_2\cdots G_{p-1}}{GG_1G_2\cdots G_{p-1}} = f_0 + R^{\frac{1}{p}} + f_2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + f_q R^{\frac{q}{p}}$$

on hem absorbit la funció racional $GG_1G_2\cdots G_{p-1}$ en els numeradors de les f_i, que són funcions dels coeficients del polinomi inicial. Sempre podrem suposar $q < p$. Si no fos el cas, escrivint $q = n_1 p + m_1$, el radical $R^{\frac{q}{p}}$ s'escriu $R^{n_1} R^{\frac{m_1}{p}}$ i introduïm el factor R^{n_1} dins els coeficients f_i. $\square$

Exemple 4.2.1 (Cas $m = 2$)
En aquest cas tindríem $y = p + R^{\frac{1}{2}}$, essent p un polinomi dels coeficients de l'equació de segon grau, $y^2 + by + c = 0$. La substitució de $y = p + R^{\frac{1}{2}}$ a l'equació ens dóna:

$$\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right)^2 + b\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right) + c = 0 \;\Rightarrow\; \left(p^2 + R + bp + c\right) + (2p + b)\sqrt{R} = 0$$

Aleshores Abel raona que la igualtat només es pot satisfer si tots dos parèntesis són idènticament nuls[9]. El segon parèntesi ens dóna directament el valor de $p = -b/2$, que el substituïm al primer parèntesi per obtenir R.

$$p^2 + R + bp + c = \frac{b^2}{4} + R - \frac{b^2}{2} + c = 0 \;\Rightarrow\; R = \frac{b^2}{4} - c$$

Per tant, la solució (segons el mètode d'Abel) de l'equació quadràtica és:

$$y = p + \sqrt{R} = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - c}}{2}$$

que és la coneguda expressió de la solució d'una equació de 2n grau. $\bowtie$

Exemple 4.2.2 (Cas $m = 3$)
Considerem la cúbica reduïda amb les solucions segons Cardano.

$$y^3 + a_1 y + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; y = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}}$$

Per comprovar que el mètode d'Abel arriba a la mateixa expressió, considerem ara la solució escrita com: $y = p + R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}$. Atès que la cúbica reduïda no té terme de segon grau, la suma de les 3 solucions ha de valdre 0. Però les tres solucions són:

$$p + R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}\ , \quad p + \zeta R^{\frac{1}{3}} + \zeta^2 p_2 R^{\frac{2}{3}}\ , \quad p + \zeta^2 R^{\frac{1}{3}} + \zeta p_2 R^{\frac{2}{3}}$$

Sumant-les i agrupant termes obtenim:

$$3p + R^{\frac{1}{3}}(1 + \zeta + \zeta^2) + p_2 R^{\frac{2}{3}}(1 + \zeta + \zeta^2) = 0$$

Atès que $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$, l'equació anterior queda com: $3p = 0 \;\Rightarrow\; p = 0$. Per tant,

$$y = R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \left(R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}\right)^3 + a_1\left(R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}\right) + a_0 = 0$$

Desenvolupant i agrupant termes en potències de R,

$$\left(R + p_2^3 R^2 - a_0\right) + R^{\frac{1}{3}}\left(3p_2 R + a_1\right) + R^{\frac{2}{3}}\left(3Rp_2^2 + a_1 p_2\right) = 0$$

Segons el raonament d'Abel, la darrera igualtat només és possible si cada un dels termes és idènticament nul.

$$\left.\begin{aligned} R + p_2^3 R^2 - a_0 &= 0 \\ 3p_2 R + a_1 &= 0 \\ 3Rp_2^2 + a_1 p_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; p_2 = -\frac{a_1}{3R}$$

[9] De fet aquesta és una de les claus de la demostració i és, bàsicament, el segon pas.

Si substituïm el valor de p_2 obtingut a la tercera equació, obtenim una equació auxiliar (resolvent) de segon grau en variable R que té per solucions:

$$3Rp_2^2 + a_1 p_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; R^2 - a_0 R - \frac{a_1^3}{27} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \nearrow \quad R_1 = \dfrac{a_0}{2} + \sqrt{\dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{a_1^3}{27}} \\ \searrow \quad R_2 = \dfrac{a_0}{2} - \sqrt{\dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{a_1^3}{27}} \end{array}$$

Per tant, una solució de la cúbica reduïda és:

$$y = R_1^{\frac{1}{3}} - \frac{a_1}{3R_1} R_1^{\frac{2}{3}} = R_1^{\frac{1}{3}} - \frac{a_1}{3} R_1^{-\frac{1}{3}} \tag{4.12}$$

El producte de R_1 i R_2 és el terme independent de l'equació auxiliar de segon grau. És a dir,

$$R_1 R_2 = -\frac{a_1^3}{27} \;\Rightarrow\; R_1 = -\frac{a_1^3}{27} R_2^{-1}$$

Substituint aquesta darrera expressió a (4.12), obtenim:

$$y = R_1^{\frac{1}{3}} - \frac{a_1}{3}\left(-\frac{27}{a_1^3} R_2\right)^{\frac{1}{3}} = R_1^{\frac{1}{3}} + R_2^{\frac{1}{3}}$$

que és l'expressió de Tartaglia-Cardano per a la cúbica. $\bowtie$

Per a l'equació de 4t grau, essent 4 compost, la solució general conté combinacions de formes quadràtiques i cúbiques.

En el cas de la quíntica, la solució general d'Abel ha de ser una expressió de la forma

$$y = p + R^{\frac{1}{5}} + p_2 R^{\frac{2}{5}} + p_3 R^{\frac{3}{5}} + p_4 R^{\frac{4}{5}} \tag{4.13}$$

Atès que aquesta forma es deriva del seu resultat sobre l'estructura general d'una solució d'una equació algèbrica, o bé la quíntica té solució i és d'aquesta forma, o bé no té solució. Per tant, Abel assumeix que la solució d'una quíntica és de l'estil (4.13) i aquest fet el conduirà a una contradicció. Aquesta estratègia li reclama tres passos més.

El següent pas és clau en la demostració d'Abel. Ruffini, en el seu treball, el va assumir sense donar-ne cap demostració.

4.2.2 Segon Pas

Teorema 4.2.2
Totes les funcions algebraiques y es poden expressar en termes de funcions racionals de les arrels de l'equació.

La idea és simple però complicada de demostrar. A l'equació (4.13), la forma general de y s'expressa en funció de polinomis i també altres funcions irracionals (en aquest cas, $R^{\frac{1}{5}}$, $R^{\frac{2}{5}}$, $R^{\frac{3}{5}}$ i $R^{\frac{4}{5}}$) dels coeficients. Abel demostra brillantment que y es pot expressar en funció de les *arrels* en lloc dels *coeficients* de l'equació.

Exemple 4.2.3 (Relació entre arrels i coeficients, cas $m = 2$)
Sigui $y = p + R^{\frac{1}{2}}$. A l'exemple 4.2.1 hem vist que $R = \frac{b^2}{4} - c$. Considerem ara les arrels de l'equació de segon grau,

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{R}\,, \qquad y_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{R}$$

Aleshores,

$$y_1 - y_2 = 2\sqrt{R} \Rightarrow (y_1 - y_2)^2 = 4R = b^2 - 4c = \Delta$$

Anomenem *discriminant de l'equació de segon grau* a l'expressió $\Delta = b^2 - 4c$ que val zero quan les arrels són iguals (múltiples), positiu si les arrels són reals diferents i negatiu si són complexes imaginàries (suposant que els coeficients b i c són nombres reals). $\bowtie$

En el cas de la quíntica, el segon pas d'Abel implica que $R^{\frac{1}{5}}$ és una funció de les arrels, així com també ho són les seves potències $R^{\frac{2}{5}}$, $R^{\frac{3}{5}}$ i $R^{\frac{4}{5}}$ i també p, p_2,... Atès que totes aquestes expressions són funcions racionals, deduïm que y ha de ser funció racional de les arrels. I aquí es comença a veure un cert desacord. Les arrels són funcions radicals (*irracionals*) dels coeficients que al seu temps són funcions racionals de les arrels. Així que el grau de l'equació augmenta, aquesta desavinença entre *irracionalitat* d'unes expressions i *racionalitat* d'unes altres es va fent més greu fins que quan el grau és 5 és impossible compatibilitzar les dues situacions.

El següent pas limita quina forma té la possible solució de la quíntica.

4.2.3 Tercer Pas

Teorema 4.2.3
Si una funció racional de cinc quantitats pren menys de cinc valors quan les cinc quantitats es permuten, aleshores només pot prendre dos valors diferents, o un valor, però mai ni tres ni quatre valors diferents.

Considerem ara les funcions irracionals de la forma $R^{\frac{1}{m}}$, on R és una funció racional de a, b, c, d i e. Sigui $r = R^{\frac{1}{m}}$. Aleshores r és una funció racional de les arrels y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, i R una funció simètrica d'aquestes quantitats[10]. Però, atès que, per hipòtesi, la quíntica és general, les variables y_1, y_2, y_3, y_4 i y_5 són independents. Per tant, l'equació $R^{\frac{1}{m}} = r$ s'ha de satisfer amb aquest supòsit. Aleshores, permutem les y_i en $R^{\frac{1}{m}} = r$ de les 120 maneres possibles i, atès que R és una funció simètrica, $R^{\frac{1}{m}}$ prendrà m valors diferents[11]. Atès que m és un nombre primer[12], segons un resultat de Cauchy, $m = 5$ o $m = 2$.

Aleshores Abel constata que cap d'aquests casos no és possible.

- Cas $m = 5$. Aleshores la funció r té 5 valors diferents. Per tant, és de la forma:

$$\sqrt[5]{R} = p_0 + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 = P(y_1),$$

[10] Pel teorema de les funcions simètriques, els coeficients de l'equació polinòmica són funcions simètriques de les arrels.

[11] Que són els valors r, ζr, $\zeta^2 r$, $\zeta^3 3r$, $\ldots$, $\zeta^{m-1} r$.

[12] Segons un resultat de Lagrange, m ha de dividir a $5! = 120$. És a dir, hi ha tres casos possibles per a m primer: $m = 2$, $m = 3$ o $m = 5$.

on p, p_1, p_2, p_3 i p_4 són funcions simètriques de y_1, y_2, y_3, y_4 i y_5. Si canviem y_1 per y_2, tindrem un resultat de la forma

$$P(y_1) = \zeta P(y_2)\ , \qquad \text{amb } 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 1$$

Això estableix un lligam entre y_1 i y_2, que, segons hem dit, són independents. Per tant, no és possible que $m = 5$.

- Cas $m = 2$. La discussió d'aquest cas és un xic més elaborada i no la tindrem en compte en aquest treball. Tan sols comentarem que Abel demostra, un cop més, que aquest cas condueix cap a una contradicció. Ho fa deduint una equació que el seu primer membre pot prendre 120 valors diferents, mentre que el segon membre de l'equació tan sols en pot prendre 10. La contradicció és clara.

Amb tots els casos possibles exclosos, Abel raona finalment el darrer pas.

4.2.4 Quart Pas

Teorema 4.2.4
L'equació general de cinquè grau,

$$y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

és irresoluble per radicals.

La feina ja és gairebé tota feta. Si cap de les possibles formes d'una solució es pot donar perquè cada una condueix a una contradicció, aquesta solució no és possible.

Aquesta contradicció està fortament lligada al nombre 5 per la quantitat de valors diferents que pot prendre una resolvent quan permutem les cinc arrels d'una equació. El factorial de n, $n!$, és una funció que creix amb desmesura i per a $n = 5$ el conjunt d'elements és tan gran que, en certa manera, el fa ingovernable.

L'argument es pot estendre a equacions de grau més gran que 5. Per exemple, si multipliquem una quíntica irresoluble pel factor $y = y - 0$, obtenim una sèxtica que té una arrel $y = 0$ i les altres cinc irresolubles per radicals.

4.3 Grups de Permutacions

Encara que sembli sorprenent, la impossibilitat de la resolució per radicals de la quíntica està lligada al comportament que tenen uns determinats conjunts d'elements anomenats *grups de permutacions*, notats per S_n. En aquest treball no farem un estudi sistemàtic d'aquests grups, però intentarem explicar què li passa al grup S_5 en contraposició als grups S_2, S_3 i S_4.

El grup S_2 de les permutacions de dos elements és un grup que està format per totes les maneres possibles d'ordenar (*permutar*) dos elements, diem-los 1 i 2. Les possible permutacions són:

$$(1 \quad 2) \mapsto (1 \quad 2)$$
$$(1 \quad 2) \mapsto (2 \quad 1)$$

La permutació $(1 \quad 2) \mapsto (1 \quad 2)$ indica que $1 \mapsto 1$ i $2 \mapsto 2$. És a dir, no fem res. D'aquesta permutació se'n diu la *identitat*, I. L'altra permutació envia $1 \mapsto 2$ i viceversa i es nota simplement per $(1\,2)$.

La taula 4.1 mostra què passa en combinar l'acció de les permutacions de S_2. Observem que l'efecte de combinar les permutacions, en el cas de S_2, *no depèn de l'ordre* en què les fem. Diem que S_2 és un grup *commutatiu* o *abelià*.

Taula 4.1: Taula de Cayley del grup S_2

S_2	I	$(1\,2)$
I	I	$(1\,2)$
$(1\,2)$	$(1\,2)$	I

Estem pensant en les possibles maneres d'ordenar un conjunt de dos objectes. Suposem ara que aquests dos objectes són les *dues* arrels d'una equació de segon grau, $\alpha 1$ i α_2. Poder resoldre una equació de segon grau correspon a preservar una certa simetria commutativa.

Si pensem ara en el grup S_3 de totes les permutacions de tres elements, aquest grup ja té sis elements. Fem notar que $3! = 6$.

$$\begin{aligned} I &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (1\,2\,3) \\ (1\,2\,3) &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (2\,3\,1) \\ (1\,3\,2) &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (3\,1\,2) \\ (1\,2) &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (2\,1\,3) \\ (1\,3) &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (3\,2\,1) \\ (2\,3) &: \quad (1\,2\,3) \mapsto (1\,3\,2) \end{aligned}$$

Per entendre l'efecte de cada permutació, $(1\,2\,3)$ significa $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$ i $3 \mapsto 1$. Anàlogament, la permutació $(2\,3)$ significa $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$ mentre que l'element 1 es queda quiet. La taula 4.2 representa les possibles maneres de combinar els elements de S_3.

Taula 4.2: Taula de Cayley del grup S_3

S_3	I	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$
I	I	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$
$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$	I	$(2\,3)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$
$(1\,3\,2)$	$(1\,3\,2)$	I	$(1\,2\,3)$	$(1\,3)$	$(3\,2)$	$(2\,3)$
$(1\,2)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	I	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$(1\,3)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2)$	$(1\,3\,2)$	I	$(1\,2\,3)$
$(2\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$	I

Observem primerament que S_3 ja no és commutatiu. En efecte, si ho fos, la taula 4.2 seria simètrica. En canvi, observem que la part superior esquerra de la taula sí que és simètrica.

Els elements de S_3 I, $(1\,2\,3)$ i $(1\,3\,2)$ formen un subgrup dins S_3, anomenat l'alternat A_3 que dins de S_3 preserva la commutativitat. El grup A_3 és el subgrup abelià de S_3 que no deixa cap element fix, excepte quan actua I. Parlant en llenguatge de grups, el subgrup A_3 és el subgrup de les permutacions d'ordre *parell*[13].

Tornant a fer l'analogia amb les arrels d'una equació cúbica, ara tenim α_1, α_2 i α_3. Sota l'acció dels elements de A_3, hi ha una simetria i això implica l'existència d'un invariant que, traduït al llenguatge d'equacions, vol dir que la cúbica es pot resoldre.

El cas del conjunt S_4 és més difícil d'analitzar però presenta certes semblances amb S_3. Per començar S_4 té $4! = 24$ elements. No hauria de ser cap sorpresa descobrir que S_4 no és commutatiu. La seva taula de Cayley conté $24 \times 24 = 576$ entrades, massa extensa per ser representada aquí. El conjunt de les permutacions parells, l'alternat A_4, tampoc no és abelià. Però dins A_4, hi ha un subgrup que sí és abelià. És el conjunt V_4 format per totes les permutacions que només intercanvien parelles. És a dir, per exemple la permutació

$$(1\,2)(3\,4) \equiv (1\,2\,3\,4) \mapsto (2\,1\,4\,3) \qquad \text{intercanvia } 1 \leftrightarrow 2 \text{ i } 3 \leftrightarrow 4.$$

La taula 4.3 ens mostra la simetria respecte la diagonal, fet que mostra el caràcter abelià de V_4. Atès que S_4 conté un subgrup abelià dins seu, aquest fet implica que l'equació de 4t grau també es pot resoldre per radicals (com va fer Ferrari).

Taula 4.3: Taula de Cayley del subgrup V_4 de A_4.

V_4	I	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4)(2\,3)$
I	I	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4)(2\,3)$
$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2)(3\,4)$	I	$(1\,4)(2\,3)$	$(1\,3)(2\,4)$
$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4)(2\,3)$	I	$(1\,2)(3\,4)$
$(1\,4)(2\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,2)(3\,4)$	I

Evidentment, cada grup dels vistos fins ara S_2, S_3 i S_4 tenen altre grups abelians dins seu. Però són el grup format per un sol element que, forçosament ha de ser I. Aquests subgrups, anomenats trivials, no resolen res perquè no "mouen" res.

I passem ara al grup S_5, que té $5! = 120$ elements i la seva taula conté $120 \times 120 = 14\,400$ entrades. El seu grup alternat A_5 està format per 60 elements (i la taula per $3\,600$ entrades). Ambdós grups no són abelians. Quan busquem dins aquest grup (ja força gran) un subgrup invariant (com ho eren A_3 dins S_3 i V_4 dins A_4) no en trobem cap altre que el grup format per l'element I. Aquesta inexistència de grups amb simetries és la raó –en llenguatge de *teoria de grups*– de que la quíntica no sigui resoluble per radicals.

Els conceptes de la teoria de grups varen començar a rebre un tractament matemàtic a partir de l'obra d'Évariste Galois (1811-1832) una promesa matemàtica francesa contemporània d'Abel, que comparteix amb ell la precocitat en els seus descobriments i una mort jove. Tanmateix, els conceptes introduïts per tots dos van obrir la porta a un nou llenguatge matemàtic i, amb ell, tot un nou món per descobrir.

[13] La definició d'ordre d'una permutació és fora dels objectius d'aquest treball.

Capítol 5

Conclusions

5.1 Conclusions Matemàtiques

En aquest treball, primerament he mirat d'ampliar els coneixements bàsics del nombres complexos per així poder-los treballar amb més facilitat. He après a escriure un nombre complex en forma polar i trigonomètrica, que són fonamentals a l'hora de treballar les equacions de 3r i 4t grau. També he exposat diferents enunciats del Teorema Fonamental de l'Àlgebra, un teorema que s'utilitza molt però que realment no s'explica si no s'estudia una carrera científica. Finalment, en el primer bloc també he intentat entendre com són els polinomis simètrics i quines relacions tenen les arrels amb els coeficients de les equacions.

Tot seguit he pogut entendre les fórmules per obtenir les solucions de les equacions de 3r i 4t grau, com també he aprofundit en les seves demostracions. Després d'haver estudiat en profunditat l'equació de 3r grau, puc entendre perquè no s'explica al Batxillerat. Es necessiten dominar les idees elementals dels nombres complexos, així com tenir certa agilitat a l'hora de manipular expressions algebraiques. Pel que fa a la demostració de l'equació de 4t grau, la dificultat de la demostració torna a augmentar, tot i que la idea en què es fonamenta és la mateixa que la de 3r grau.

Les idees de Lagrange per intentar resoldre una equació algebraica de 5è grau de la mateixa manera que Cardano resolia les equacions de 3r i 4t grau no eren tan descabellades. De fet, era lògic pensar que si havia funcionat per a les equacions de 3r i 4t grau, també havia de ferho per a la de 5è grau. Però en aquest treball he intentat entendre perquè no podem trobar aquesta fórmula. Primer he exposat diferents resultats de l'obra de Lagrange i finalment he intentat comprendre els 4 passos en què es basa la demostració d'Abel. Val la pena comentar que aquesta demostració, tot i considerar-se *elemental* –no ho és en el sentit estricte de la paraula sinó en el sentit de les eines matemàtiques emprades– entendre-la completament és una tasca bastant complicada per a un alumne de batxillerat.

A la última secció del 3r bloc he fet una introducció al que es coneix com la *Teoria de Galois*, i si hagués de continuar el meu treball, ho faria estudiant els fonaments d'aquesta branca matemàtica. De fet, és força difícil veure en els textos clàssics d'àlgebra, o en els llibres d'història de la matemàtica, la demostració de la irresolubilitat d'Abel, perquè, en l'actualitat, el seu resultat no és més que un corol·lari dins la teoria de Galois de les equacions polinòmiques.

5.2 Conclusions Personals

Primer de tot, vull esmentar que el meu desig és estudiar la carrera de matemàtiques. Tenint això en compte, tot seguit explicaré perquè considero que aquest treball m'ha ajudat tant pel que fa a la meva formació acadèmica.

Per començar, m'ha permès estudiar uns coneixements que ja tindré assolits de cara a estudiar-los a la carrera. Això em sembla molt positiu, perquè probablement el nivell de dificultat a la carrera serà encara més alt però jo ja tindré una base a partir de la qual treballar.

Aquest treball també ha fet que hagués de llegir llibres de matemàtiques i, per tant, hagi pogut entendre com és el "discurs matemàtic" que s'ha de seguir quan es demostra un resultat matemàtic. A l'escola no s'acostuma a fer tanta èmfasi en la rigorositat, però quan he llegit alguns articles i llibres m'he adonat que és molt complex redactar un escrit sense fer cap errada ni donar res per suposat (és a dir, no fer servir resultats que no s'hagin demostrat anteriorment).

A la vegada, però, m'ha agradat haver de redactar per mi mateix aquest treball. No puc dir que ja hagi creat un estil propi, ja que això seria completament fals, però he tingut una oportunitat per fer el meu primer treball sobre matemàtiques.

Finalment, el que també valoro molt positivament és el fet d'haver après com funciona el processador de textos matemàtics LaTeX. Abans de redactar el Treball de Recerca, tenia unes nocions bàsiques sobre com s'ha de treballar amb LaTeX. Però quan realment n'he après és quan he hagut de redactar per mi sol i he hagut d'enfrontar-me a les dificultats d'escriure unes determinades expressions matemàtiques.

Per aquestes raons crec que l'experiència del Treball de Recerca ha estat molt positiva, tot i que ha sigut més difícil del que jo pensava al principi. De fet, aquesta dificultat resideix en el fet que era la primera vegada que feia un escrit matemàtic propi i, com ja he explicat prèviament, això significa haver de redactar molt curosament per no cometre cap error. Per tant m'he hagut de recolzar en l'experiència del meu tutor per resoldre dubtes de caire matemàtic o estilístic.

Per acabar, aquest treball m'ha servit per practicar l'anglès en l'àmbit matemàtic, ja que gran part de la informació que he trobat estava escrita en anglès i he hagut de fer un procés de traducció i comprensió. En general he gaudit molt d'aquest treball i de l'aprenentatge que ha suposat per a mi. Tot i que m'organitzaria de manera diferent a l'hora d'escriure'l, no em faria res fer-ne un altre sobre un tema diferent. La millor manera d'aprendre un concepte nou és enfrontant-s'hi i fent-ne una explicació clara perquè una altra persona el pugui entendre.

Apèndix A

Demostracions per Reducció a l'Absurd

En una demostració per contradicció (o *reductio ad absurdum*), assumim, juntament amb la hipòtesi, la negació lògica de l'afirmació que volem demostrar, per així arribar a algun tipus de contradicció. En arribar a la contradicció, podem concloure que el que hem assumit originalment (és a dir, la negació del que volem demostrar) és fals, i per tant el que volem demostrar ha de ser cert. En aquest apèndix veurem alguns exemples per tal d'entendre com funciona la demostració per contradicció.

Exemple A.0.1
Demostreu, sense fer servir calculadora, que $\sqrt{2}+\sqrt{3}<6$.

Solució: Assumim que $\sqrt{2}+\sqrt{3}>6$. Per tant, elevant ambdós membres al quadrat, obtenim

$$2+2\sqrt{6}+3>36$$

que ens porta a

$$2\sqrt{6}>31$$

Tornant a elevar al quadrat obtenim

$$24>961$$

que és, òbviament, una contradicció. Aquesta contradicció només pot venir del fet d'haver suposat una desigualtat falsa. Per tant, concloem que $\sqrt{2}+\sqrt{3}<6$. $\bowtie$

Tot seguit, presentem dues demostracions clàssiques per reducció a l'absurd –històricament parlant– degut a la seva notable transcendència.

Proposició A.0.1
L'arrel quadrada de 2 no és un nombre racional ($\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$)

Demostració
Suposem que $\sqrt{2}$ és racional, és a dir,

$$\sqrt{2}=\frac{r}{s}$$

on r i s no tenen factors comuns (la fracció és irreductible). Llavors

$$2 = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow 2s^2 = r^2$$

Això significa que r^2 ha de ser parell, i que també ho ha de ser r, diguem-n'hi $r = 2c$. Llavors obtenim

$$2s^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

i aïllem

$$s^2 = 2c^2$$

el que significa que s és també parell. Això és una contradicció ja que r i s no tenen factors comuns. Per tant, concloem que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Corol·lari A.0.1
Els costats i la diagonal d'un quadrat no poden ser simultàniament nombres $\mathbb{Q}$.

Demostració
Considerem un quadrat de costat $c \in \mathbb{Q}$. Segons el Teorema de Pitàgores, sabem que la diagonal, d, ha de complir

$$c^2 + c^2 = d^2 \Rightarrow 2c^2 = d^2 \Rightarrow \sqrt{2}c = d$$

Acabem de demostrar que la diagonal del nostre quadrat no pot ser un nombre racional. Considerem ara un quadrat de diagonal $d \in \mathbb{Q}$. Fent servir el Teorema de Pitàgores, obtenim que

$$2c^2 = d^2 \Rightarrow c^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}d \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

demostrant que el costat d'aquest quadrat no pot ser racional, com havíem enunciat al corol·lari (Figura A.1). $\square$

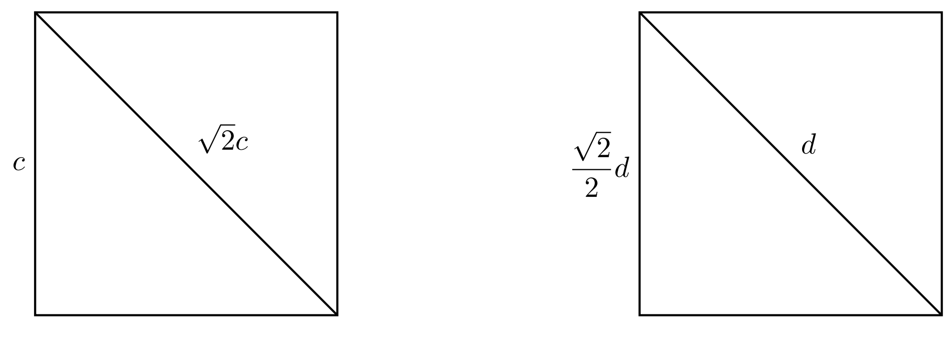


Figura A.1: Els costats i la diagonal d'un quadrat es relacionen a través de $\sqrt{2}$.

Proposició A.0.2 (Euclides, Elements Llibre IX, proposició 20)
El conjunt dels nombres primers és infinit.

Demostració
Assumim el contrari del que volem demostrar; és a dir, que hi ha un finit nombre de primers, n. Llavors $p_1, p_2, \ldots p_n$ és la llista a la que hi pertanyen tots el primers. Ara considerem el nombre:

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

Aquest és un nombre positiu més gran que 1. Cal observar que cap dels nombres de la llista $p_1, p_2, \ldots, p_n$ divideix N, ja que la divisió de N entre qualsevol d'aquests nombres ens dóna un residu de 1. Com que N és més gran que qualsevol dels nombres de la llista, ha de ser o un primer o divisible per un primer fora de la llista. Així, hem demostrat que l'assumpció que hi ha una llista de finits nombres primers ens porta a l'existència d'un primer fora d'aquesta llista. Això és, òbviament, una contradicció, que implica que el conjunt dels nombres primers és infinit. $\square$

Apèndix B

Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel va néixer a Finnöy (Noruega) el 5 d'agost del 1802. Abel era descendent d'una família de sacerdots rurals. El seu pare, Sorën-George Abel, exercia com a rector protestant en un petit poble de Finnöy, i la seva mare, Anna Maria Simonsen, era filla d'un comerciant de Risör. Abel era el segon fill de set germans i la seva família patia una aguda pobresa a causa de la crisi econòmica que travessava Noruega en aquell moment.

Així Abel es va anar formant a casa, tenint com a mestre el seu pare, i no fou fins als 13 anys que Sorën-George pogué aconseguir, amb molt d'esforç, una petita ajuda que va permetre a Abel i al seu germà gran anar a estudiar a l'Escola Episcopal de Christiana, la capital de Noruega que més tard es rebatejà amb el nom d'Oslo.

Els primers anys que va anar a l'escola, Abel es mostrava com un alumne mediocre, i semblava que no s'hi trobava bé en aquell lloc. Dos anys més tard, la mort d'un alumne de l'escola per culpa dels maltractaments per part del professor de matemàtiques va provocar l'expulsió d'aquest i el seu lloc va passar a ocupar-lo un jove matemàtic molt més competent, Bernt Holmboe, que era ajudant de Cristopher Hansteen a la Universitat.

Holmboe proposava als seus alumnes problemes d'àlgebra i geometria que havien de resoldre ells sols. Aquesta mena d'activitats van despertar l'interès d'Abel cap a les matemàtiques, i el seu entusiasme va ser tan notori que Holmboe va haver de buscar alguns problemes especials per a ell. Veient la passió del noi per les matemàtiques, Holmboe el va incitar perquè llegís les obres d'Euler sobre el càlcul, obres de Newton, de Gauss i de Lagrange.

El 1820 el pare d'Abel va morir i Abel va haver de deixar els estudis per poder fer-se càrrec de la seva família. Malgrat aquesta desgràcia, el professor Holmboe, que estava convençut que Abel era un gran matemàtic, no va poder quedar-se de braços plegats i va aconseguir una beca perquè Abel pogués anar a estudiar a la Universitat de Christiana l'any següent. A la capital, Christopher Hansteen i la seva dona van convertir-se en la família d'acollida de Niels, van recolzar-lo econòmicament i anímica perquè pogués seguir estudiant i van cuidar-lo com si fos el seu propi fill.

El primer treball d'Abel fou publicat el 1823 per la revista *Magazin for Naturvidenskaben.* En aquest treball es publicava per primer cop el plantejament i la solució d'una equació integral. Al seu últim any d'escola, Abel va sentir-se mont encuriosit per un important problema obert formulat al segle XVI, que molts matemàtics de renom, entre ells Lagrange, havien intentat trobar-ne la solució però cap d'ells ho havia aconseguit fins aleshores. El problema consistia a trobar la manera de solucionar, mitjançant radicals, l'equació algebraica general de cinquè grau

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad a_5 \neq 0$$

anomenada *quíntica.* Abel coneixia molt bé les fórmules de Cardano i de Bombelli per resoldre les equacions cúbiques i quàrtiques, i va decidir intentar resoldre aquell problema que havia restat obert durant tant de temps. Després d'estar treballant en aquest problema durant més de dos anys Abel va arribar a la conclusió que era impossible resoldre algebraicament la quíntica. El 1824, Abel va publicar la demostració d'aquesta impossibilitat i va establir el següent teorema:

> "Si l'equació és resoluble mitjançant radicals, les expressions de les arrels poden expressar-se de tal manera que els radicals d'aquestes siguin funcions racionals de les arrels de l'equació donada i certes arrels de la unitat."

Aquella demostració tenia un error que va rectificar més tard.

Així Abel creia haver resolt el problema de l'equació de cinquè grau, però com que cap dels matemàtics de Noruega podia corroborar que la seva demostració fos correcta, va decidir enviar un fulletó al professor F. Degen de Copenhague amb la intenció que ho presentés a la Real Societat de Ciències de Dinamarca. Degen, després de rebre el seu fulletó, li va enviar una contesta en què li demanava que hi adjuntés algun exemple numèric, i va ser llavors, mentre Abel repassava la seva demostració buscant algun exemple numèric, que va descobrir la seva errada i va corregir-la immediatament. Poc temps després Abel aconseguí una beca per anar a Copenhague a visitar Degen. Allí fou on conegué a la noia que un temps més tard es convertiria en la seva promesa, Cristina Kemp.

Més tard el govern noruec va concedir-li una beca que li permetia visitar els centres matemàtics més important d'Europa, situats a Alemanya i a França. Abans de marxar l'agost del 1825, Abel va editar una breu memòria sobre la seva idea de la inversió de les equacions el·líptiques que va enviar a Gauss. El seu desencís fou majúscul quan, durant la seva visita a Alemanya, descobrí que Gauss havia tractat de monstruositat el fulletó que Abel li havia enviat amb el resultat sense ni tan sols haver-lo llegit. Però aquell viatge a Alemanya no fou en va. Allí Abel conegué en Leopold Crelle, un destacat enginyer Noruec amant de les matemàtiques que va fundar la revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, també conegut com *Crelle's Journal*, que va ser la revista pionera de la matemàtica pura al món i la més prestigiosa d'Alemanya. En aquest diari, Niels va publicar-hi 22 dels seus treballs, incloent-hi la versió revisada de la demostració de la impossibilitat de la resolució algebraica de les equacions de cinquè grau o superior.

L'any següent Abel va anar a París, on va acabar el seu treball sobre funcions transcendents i va presentar-lo a l'Institut amb l'esperança que Cauchy, reconegut matemàtic francès, se'l mirés. Era el primer assaig d'Abel sobre les integrals el·líptiques i va ser presentat el 30 d'octubre del 1826 al Secretari de l'Acadèmia de Ciències de París, J. B. Fourier, que va enviar-ho a Cauchy i a Legendre. Aquest últim va trobar que el treball era penós i il·legible. D'altra banda, Cauchy va ignorar el treball d'Abel i el va perdre.

C. G. Jacobi també va estar treballant les equacions el·líptiques, i quan es va assabentar del que havia passat amb el treball d'Abel, per boca del propi Legrenge el 14 de març del 1829, va exclamar:

> "Com és possible que un descobriment, potser el més important d'aquest segle, s'hagi comunicat a la seva Acadèmia fa dos anys i ningú no n'hagi fet cas?."

Llavors Cauchy va buscar l'assaig que Abel li havia enviat i Legendre va decidir fer l'informe del treball que no va publicar-se fins el 1841. Inicialment Legendre havia dit que el treball d'Abel era penós, però un cop va haver acabat l'informe el va qualificar com a *monumentum aere perennius.*

A París, Abel es va carregar de deutes i com que la situació de la seva família ja era prou desesperant, va tornar a Noruega el maig del 1827. Allí donava classes de matemàtiques i anava escrivint articles sobre les funcions el·líptiques. Abel sabia que estava malalt de tuberculosi, però allò no va impedir-li d'anar amb trineu fins a Fröland per veure la seva promesa, que treballava allà com a institutriu d'una família anglesa. Va ser allà on la malaltia d'Abel va empitjorar a causa d'una hemorràgia persistent i va morir, amb 26 anys, el 6 d'Abril de 1829.

Tant Abel com el seu treball no van ser reconeguts fins després de la seva mort. Dos dies després de la defunció del matemàtic, una carta de Crelle anunciava que la Universitat de Berlín l'havia nomenat professor de matemàtiques. Gauss i Humboldt van sol·licitar una càtedra per Abel, i Legendre, Poisson i Laplace van escriure al rei de Suècia perquè Abel ingressés a l'Acadèmia d'Estocolm. Però ja era massa tard i Abel no va poder gaudir en vida del seu reconeixement.

En honor d'Abel es va batejar amb el seu nom un cràter de la Lluna, un carrer del districte dotzè de París i una estàtua seva va ser esculpida per Gustav Vigeland el 1908 al Royal Park d'Oslo. També, des del 2002, es va instituir en el seu honor el prestigiós *Premi Abel*, equivalent al Premi Nobel, que s'atorga cada any als matemàtics més destacats.

Bibliografia

[1] Ahlfors, Lars V. *"Complex Analysis"*. Ed. McGraw-Hill. Singapur, 1979

[2] Dunham, William *"Euler. El maestro de todos los matemáticos"*. Ed. Nivola, Madrid, octubre 2000

[3] Pardo, Venancio *"Lagrange. La elegancia matemática"*. Ed. Nivola, Madrid, abril 2003

[4] Pla, Josep. *"Una història breu de la matemàtica"*. Volum 18-1. pp 47-129. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona, 2003.

[5] Pesic, Peter. *"Abel's Proof. An Essay on the Sources of Meaning of Mathematical Unsolvability"*. The MIT Press. Boston, Massachussets, 2003.

[6] Valiente, Gabriel. *"Composició de textos científics amb LaTeX"*. Edicions UPC, Barcelona, 1996.

[7] *"Abel and the Insolvability of the Quintic"*, Jim Brown. Caltech.
`http://www.math.caltech.edu/jimlb/abel.pdf` (Data de consulta 17/07/2017)