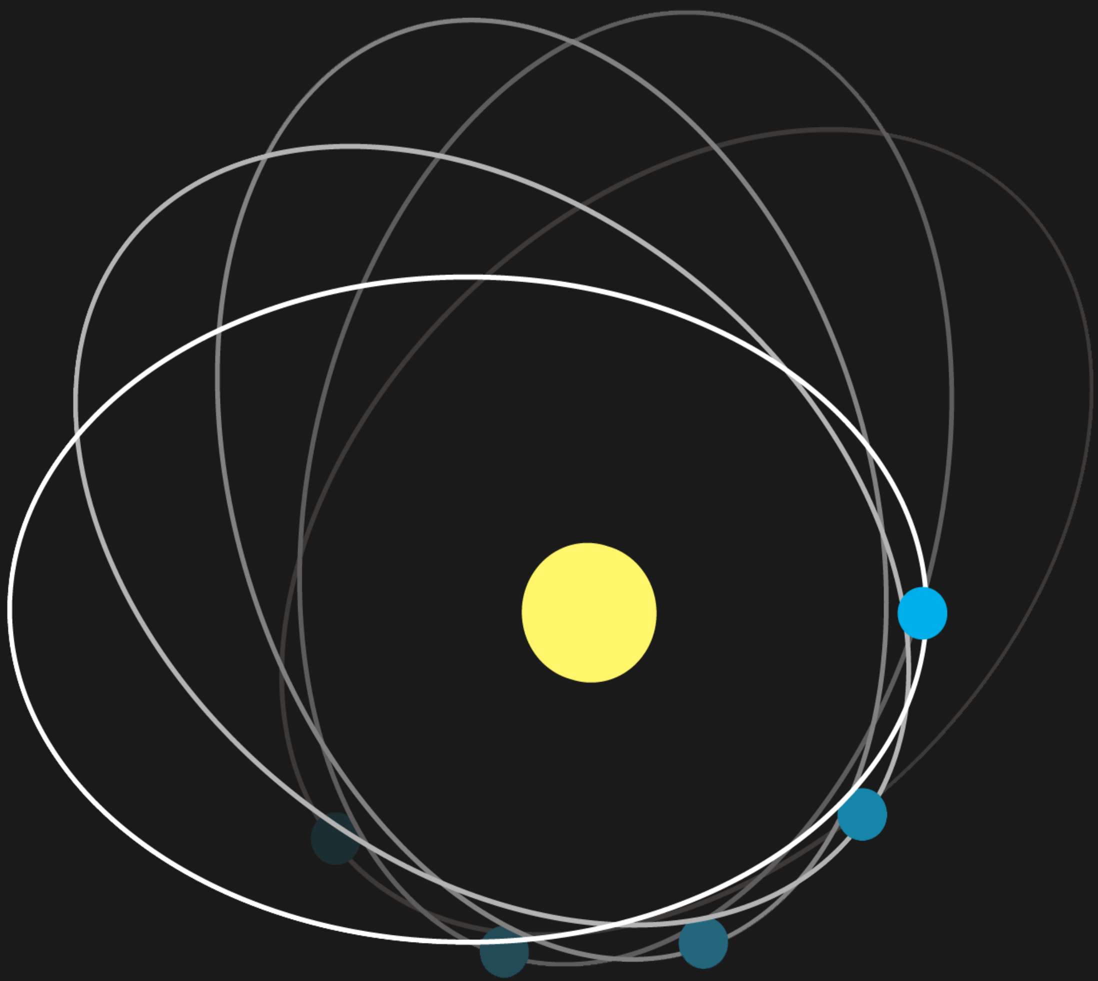
Com s'escriu òrbita?

Mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials sense solució analítica



Arquímedes

"Com és possible que la matemàtica, un producte del pensament humà independent de l'experiència, s'adapti tant admirablement als objectes de la realitat".

Albert Einstein

Índex

Índex de figures

1 Introducció

La necessitat de tractar problemes del món real ha comportat la construcció de models matemàtics amb l'objectiu de resoldre una tipologia de problemes que, per la seva naturalesa o complexitat, no es poden resoldre mitjançant procediments purament algebraics o analítics. Aquests problemes impliquen una equació funcional entre una o varies funcions i les seves derivades. Aquestes equacions són les denominades equacions diferencials.

D'aquesta manera, amb l'objectiu d'obtenir solucions per a resoldre i tractar aquestes equacions diferencials molt freqüents en enginyeries i altres rames de la ciència, sorgeixen els mètodes numèrics. Els mètodes numèrics són tècniques per les quals es pot formular els problemes matemàtics de tal forma que es puguin resoldre mitjançant operacions aritmètiques. D'aquesta manera, els mètodes numèrics comporten la realització d'un gran nombre de càlculs aritmètics per a estimar les solucions del problema en estudi, encara que aquestes no siguin precises sinó una aproximació del resultat real.

Així, l'extensió de l'ús de l'ordenador i l'aparició de molts paquets de programació cada vegada més potents ha facilitat la utilització dels mètodes numèrics per a resoldre equacions diferencials imprescindibles en qualsevol matèria que hi hagi la presència de les matemàtiques en l'àmbit del càlcul numèric.

Amb el desig de continuar els meus estudis amb la carrera de matemàtiques a la universitat, volia fer un treball de recerca relacionat amb les matemàtiques.

Les matemàtiques presenten un àmbit extens i complex que estudia, entre altres coses, nombres, canvis, estructures i patrons. En tots els àmbits de les matemàtiques ens trobem conceptes i problemes que ens criden l'atenció. En el meu cas, em va semblar molt interessant el tema del càlcul numèric, que és la base d'aquest treball de recerca. El treball ens va ser proposat pel Sr. XXXX, el qual ha estat el meu cotutor juntament amb la professora XXXX.

He escollit aquest tema perquè dins l'abstracció que en general predomina en el món de les matemàtiques, aquesta és una branca aplicada, fàcilment imaginable i que es pot visualitzar, fet que, d'alguna manera, facilita l'elaboració del treball. També està estretament lligada amb la física, assignatura que m'apassiona. Dins els mètodes numèrics m'he centrat en el càlcul de trajectòries, millor dit, en les aproximacions numèriques al càlcul de trajectòries. Em va semblar un tema interessant, que barrejava conceptes coneguts i desconeguts, però tractats de manera molt diferent a com ho fèiem a batxillerat. Fer-ho de manera experimental i amb l'ajut de programes d'ordinador potents de seguida em va resultar apassionant.

D'aquesta manera ens vam endinsar en aquest tema pràcticament nou i desconegut per a mi. Els objectius vàrem anar-los marcant a mesura que el treball avançava, ja que la nostra disposició enfront d'aquest treball ha estat sempre la màxima possible, intentant superar les complicacions sorgides al llarg del treball amb l'esforç. Cal tenir en compte que abans de començar conceptes com derivada o integral encara m'eren desconeguts, tampoc tenia nocions de programació i desconeixia totalment el que era una equació diferencial. Per tant, son molts els reptes que se'm presentaven per endavant.

De totes maneres, la nostra il·lusió per aquest treball va anar augmentant a mesura que avançàvem i anàvem aprenent nous conceptes, descobrint així, un nou món, que fins aleshores ni tant sols sabíem que existia. Aquest treball m'ha aportat una nova visió de les matemàtiques, potser més aplicada i pràctica i que ha contribuït a augmentar, encara més, les ganes d'aprofundir en aquest tema apassionant.

D'aquesta manera, aquest treball consistirà en l'aplicació de diferents mètodes numèrics a la resolució d'un problema simple i, donat que les solucions que trobarem seran aproximacions del resultat real del problema, el que farem posteriorment serà un estudi acurat de l'error comès en cada mètode. D'aquesta manera veurem les diferències entre els diversos mètodes implementats, i avaluarem com aquesta augmenta o disminueix en funció del mètode emprat. Finalment, s'aplicaran els mètodes utilitzats i explicats a un problema diferent i en un context real.

1.1 Objectius

1. Entendre el concepte d'EDO (equació diferencial ordinària).
2. Entendre i conèixer diversos mètodes numèrics per a resoldre EDOs i aplicar-los a un problema senzill, com pot ser el càlcul d'òrbites.
3. Simular el moviment d'un cos sotmès a una força central per verificar la primera i la segona llei de Kepler.
4. Calcular integrals definides tot utilitzant mètodes numèrics.
5. Entendre el concepte d'ordre d'un mètode i relacionar-ho amb l'error comès respecte la solució real.
6. Resoldre un problema real aplicant sistemes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials.
7. Programar rutines senzilles aplicant els conceptes bàsics de càlcul numèric.
8. Aprendre a utilitzar LaTex com a editor de textos.

1.2 Agraïments

La realització d'aquest treball ha estat possible gràcies a la col·laboració de diverses persones.

En primer lloc, vull agrair al Sr. XXXX pel seu suport i dedicació en aquest treball perquè sense la seva ajuda el resultat no hagués estat possible. També vull donar les gràcies a XXXX per la seva gran aportació en aquest treball i per guiar-me en aquest camí tant complex, que jo desconeixia, però que gràcies a ella ara conec una mica més. Gràcies per la confiança i la paciència.

En segon lloc, agrair a XXXX la seva ajuda per poder solucionar diferents problemes a nivell de programació sorgits durant la realització del treball.

També agrair el suport, l'ànim i la implicació de la meva família i amics.

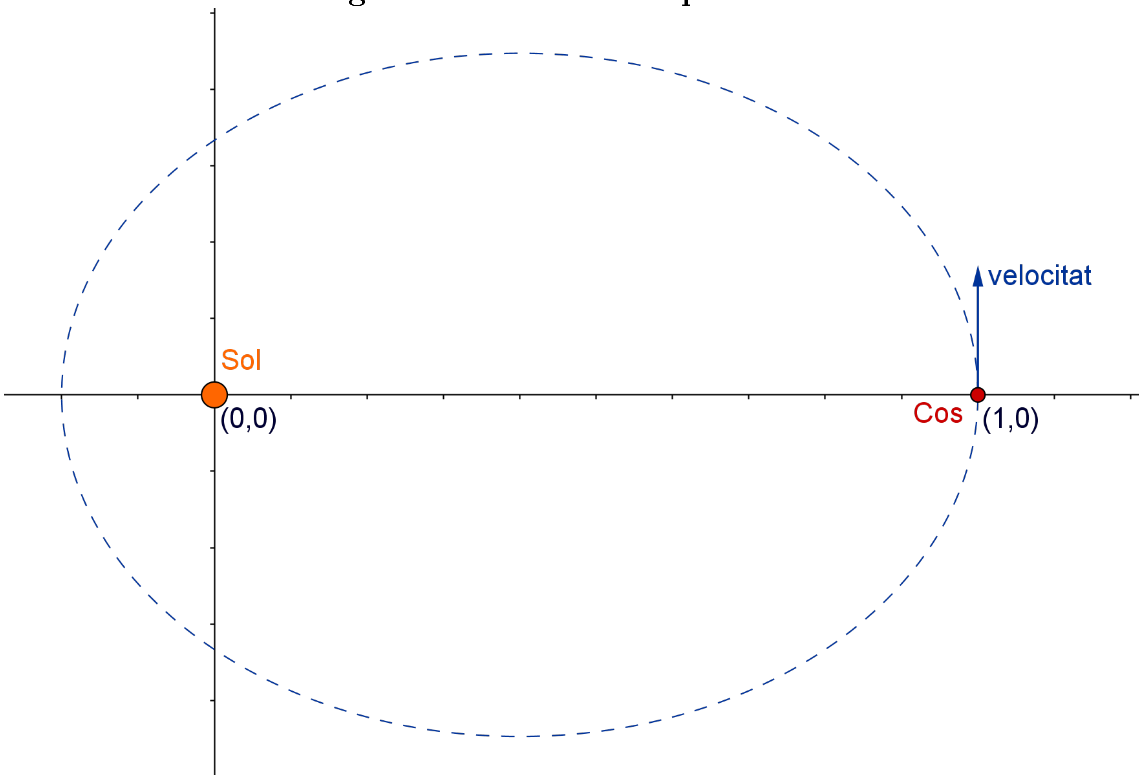
I finalment, gràcies a totes les persones que heu posat el vostre gra de sorra en aquest treball.

2 Càlcul d'òrbites

2.1 Definició del problema

El problema que ens plantejarem resoldre és el càlcul del moviment d'un cos en un camp gravitatori. Concretament, el càlcul de la trajectòria que seguirà aquest cos sota la influència del camp gravitatori d'un segon cos major. Si considerem que els dos cossos es troben en el pla, donarem una posició inicial i una velocitat inicial al primer cos. Definirem que la direcció de la velocitat inicial del cos sigui perpendicular a la força d'atracció del cos major i tenint en compte que el segon cos roman estàtic, podrem calcular la trajectòria del cos. Vegem-ho gràficament (fig. 1):

Figura 1: Definició del problema



2.2 Introducció a la resolució d'equacions diferencials

En aquest apartat volem introduir breument els conceptes d'equació diferencial i mètodes numèrics, els quals són la base matemàtica d'aquest treball.

Una equació diferencial és una equació matemàtica que relaciona una funció amb les seves derivades. S'anomena ordre d'una equació diferencial a l'ordre de la màxima derivada que conté. Així, una equació que conté només derivades primeres és una equació diferencial de primer ordre, una equació que conté, com a màxim, derivades segones és una equació diferencial de segon ordre, i així successivament.

Les equacions diferencials poden dividir-se en dos tipus. Per una banda, tenim les equacions diferencials ordinàries (EDO), les quals només contenen funcions d'una variable independent i les derivades d'aquesta variable. Per altra banda, hi ha les equacions diferencials en derivades parcials (EDP), les quals contenen funcions de més d'una variable i les seves derivades parcials. Nosaltres només treballarem amb el cas més simple, les equacions diferencials ordinàries.

La solució per a una EDO és una funció específica les derivades de la qual satisfan l'equació. Aquesta funció podem determinar-la de forma analítica en alguns casos molt concrets. En la majoria de casos rarament és possible la resolució analítica de l'equació diferencial. Per això, és indispensable disposar de tècniques de resolució aproximada. Així, utilitzarem mètodes numèrics per a la resolució d'aquestes equacions. Aquests mètodes numèrics ens proporcionaran una solució aproximada de l'equació diferencial mitjançant n iteracions o repeticions d'un càlcul aritmètic amb l'ajuda crucial dels ordenadors.

Hi han diversos mètodes numèrics que es poden implementar per a resoldre una equació diferencial. D'aquesta manera, veurem com l'error comés en l'aproximació dependrà de l'ordre del mètode numèric emprat. L'ordre d'un mètode ens indica el grau de fiabilitat d'un mètode. Així, com major sigui l'ordre, més pròxima serà la solució calculada a la solució real.

2.3 Cas 0

Per començar, treballarem amb un cas 0. L'objectiu d'aquest primer cas serà trobar la solució al problema plantejat de determinar l'òrbita que descriu un cos en un sistema estel·lar binari donada una posició i velocitat inicial. Els mètodes numèrics ens permetran determinar aquesta òrbita que, matemàticament, no és altra cosa que la solució d'una equació que ve donada per la llei de la Gravitació Universal i la segona llei de Newton.

La llei de la Gravitació Universal deduïda per Isaac Newton determina la força en què s'atrauen dos cossos pel fet de tenir massa. Aquesta força d'atracció és anomenada força gravitatòria i ve donada per l'expressió:

$$F_g = \frac{-GMm}{r^2}$$

Tenint en compte que G és una constant anomenada constant de Gravitació Universal, podem dir que en aquesta fórmula s'exposa que el valor de F de les forces iguals i oposades amb què s'atreuen dues masses M i m, puntuals i separades per una distància r, és directament proporcional al producte de les dues masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que separa els seus centres.

La segona llei de Newton és un principi deduït, també, per Isaac Newton i que es recull en una obra clau per al desenvolupament de la ciència: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principis matemàtics de la filosofia natural). Entre les aportacions més valuoses d'aquest treball destaquen els principis del moviment, coneguts com a lleis de Newton. Aquests principis són el principi d'inèrcia, el principi fonamental de la dinàmica i el principi d'acció i reacció. El principi fonamental de la dinàmica o la segona llei de Newton estableix la relació entre el vector força i el vector acceleració. Aquesta relació s'expressa:

$$F = ma$$

Tenint en compte que m és la massa del cos, el que enuncia la fórmula és que l'acceleració a d'un cos és directament proporcional a la resultant de les forces que actuen sobre aquest, i té la mateixa direcció i sentit.

Segons aquesta llei l'acceleració d'un cos sempre és deguda a les forces que actuen sobre aquest cos.

Ara, vegem com queda matemàticament tot això i quina és l'equació que cal resoldre. Si escrivim les dues lleis explicades amb vectors ens queda:

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\hat{r}$$

On $\hat{r}$ és el vector unitari de la posició.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Així, igualem les forces de les dues lleis mencionades, la llei de la Gravitació Universal i la llei fonamental de la dinàmica:

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Si ho simplifiquem, veiem que l'acceleració no depèn de la massa del cos que orbita.

$$\vec{a} = -\frac{GM\hat{r}}{r^2}$$

Tenint en compte que:

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$\hat{r} = (r_x, r_y)$$

Ho substituïm a l'equació que havíem deduït:

$$(a_x, a_y) = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

I d'aquí n'obtenim els components x i y de l'acceleració:

$$a_x = -\frac{GMx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$a_y = -\frac{GMy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Aquesta és l'equació diferencial que cal resoldre. Diem que és una equació diferencial perquè a diferència de les equacions on treballem només amb una variable, en aquest cas també incorporarem les seves derivades. Ho escrivim en notació de Newton, que representa la derivada col·locant un punt damunt del nom de la funció o variable. Es defineix com:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Per tant, utilitzant aquesta notació:

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{GMy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Per resoldre aquesta equació s'utilitzaran mètodes numèrics. Excepte en casos trivials, no podem trobar expressions analítiques per a la solució d'una equació diferencial, i per tant, hem de recórrer a mètodes numèrics. Aquests mètodes ens proporcionaran una solució aproximada de l'equació mitjançant la repetició d'un gran nombre de càlculs aritmètics. Nosaltres utilitzarem Scilab, un programa que incorpora unes rutines que ens permeten resoldre equacions diferencials. En concret, la rutina que utilitzarem en el cas 0 és la funció ODE de Scilab, la qual utilitza un mètode numèric de gran precisió. Així, les aproximacions fetes per aquesta funció incorporen una gran fiabilitat amb un error gairebé menyspreable. Encara així, les equacions diferencials que resol la funció ODE de Scilab només poden ser de primer ordre. Recordem que l'ordre d'una equació diferencial ve donat per l'ordre màxim de les derivades que la formin. Per tant, com que en el nostre cas l'equació diferencial inclou una derivada segona tenim una equació diferencial de segon ordre. Així, en primer lloc hem d'utilitzar algun mètode per tal de reduir la nostra equació diferencial a primer ordre.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$\vec{f}$ és un vector que utilitzarem per resoldre l'equació diferencial. Només l'utilitzarem per tal de fer el canvi d'ordre, i per tant, no tindrà cap sentit físic. Observem que:

$$\begin{aligned} \dot{f}\,(1) &= \quad f\,(3) \\ \dot{f}\,(2) &= \quad f\,(4) \end{aligned}$$

D'aquesta manera hem simplificat una equació diferencial de segon ordre a una de primer ordre.

A més, en tota equació diferencial cal definir, amb precisió, les condicions inicials ja que determinaran l'evolució del sistema. Aquestes seran la posició inicial i la velocitat inicial.

Anem a explicar ara el cas 0 que ens ocupa. Partirem de:

$$\dot{\vec{f}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

És a dir, la posició inicial serà $(1, 0)$ i la velocitat inicial $(0, a)$.
L'objectiu serà determinar la trajectòria del cos, en funció del valor de a. Comprovarem que si:

- $a < \sqrt{2}$ amb $a \neq 1$, llavors la trajectòria serà el·líptica.
- $a = 1$, llavors la trajectòria serà circular.
- $a > \sqrt{2}$, llavors el cos s'escaparà del camp gravitatori.

D'altra banda, en aquest cas per simplificar la resolució de l'equació en comptes de treballar en unitats del SI, s'adoptarà un escalat que faci desaparèixer la constant GM. Vegem-ho:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \quad \frac{m^3}{kgs^2}$$

$$Massa \quad solar = \quad M = \quad 1,989 \cdot 10^{30} \quad kg$$

$$1 \quad ua = \quad 1,4960 \cdot 10^{11} \quad m$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right) anys = \quad \frac{31556926 \quad s}{2\pi}$$

Ara:

$$GM = 6,67 \cdot 10^{-11} \quad \cdot \quad 1,989 \cdot 10^{30} \quad \frac{m^3}{s^2} \quad \cdot \quad \left(\frac{1 \quad ua}{1,4960 \cdot 10^{11} \quad m}\right)^3 \cdot \left(\frac{3,156 \cdot 10^7 \quad s}{2\pi \quad anys}\right)^2$$

$$= \frac{6,67 \cdot 1,989}{(1,4960)^3} \cdot \left(\frac{3,156}{2\pi}\right)^2 \quad \cdot \frac{10^{19} \cdot 10^{14}}{10^{33}} = \quad \frac{99,98}{100} \approx \quad 1$$

D'aquesta manera, estem dient:

$$\vec{f} \cdot \quad 1 \quad ua = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdot \quad 1 \quad ua$$

És a dir, multiplicant per la velocitat de la terra que en les nostres unitats seria:

$$v = \frac{1 \quad ua}{\frac{1 \quad any}{2\pi}} = \frac{2\pi \quad ua}{1 \quad any} = \frac{2\pi r}{1 \quad any}$$

Així, aconseguim que el valor de la constant GM de la nostra equació diferencial esdevingui 1.

Una vegada explicat l'objectiu del cas 0, passem a programar-ho amb Scilab. Com a solució del programa obtenim una matriu que conté els valors de la posició i la velocitat en cada instant de temps. N'obtindrem dues components per a cadascun. A partir de les quals podem representar la trajectòria del cos.

Ara passarem a distingir els diferents casos.

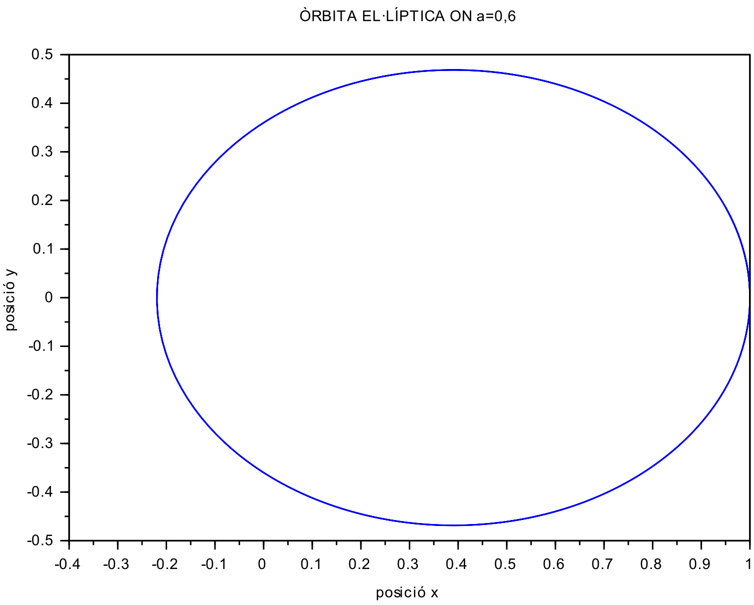
2.3.1 Òrbita el·líptica

En aquest apartat del cas 0, establim que la velocitat inicial sigui $(0, a)$ essent $a < \sqrt{2}$ amb $a \neq 1$.

Una vegada hem imposat aquesta condició al programa ens dóna com a solució una matriu de 1262x2 elements que inclou el components x i y de la posició i de la velocitat. D'aquesta matriu n'extraiem cadascun dels components amb unes variables pròpies que anomenarem *posiciox*, *posicioy*, *velocitatx* i *velocitaty*. D'aquesta manera si fem un gràfic de la *posiciox* i la *posicioy*, ens donarà com a resultat la trajectòria que seguirà el cos. En aquest cas aquesta trajectòria serà el·líptica, l'únic que variarà, segons la velocitat inicial donada, serà el grau d'aixafament de l'el·lipse.

Per exemple, si establim que $a = 0,6$ l'òrbita resultant serà la que s'observa en la imatge següent (fig. 2):

Figura 2:

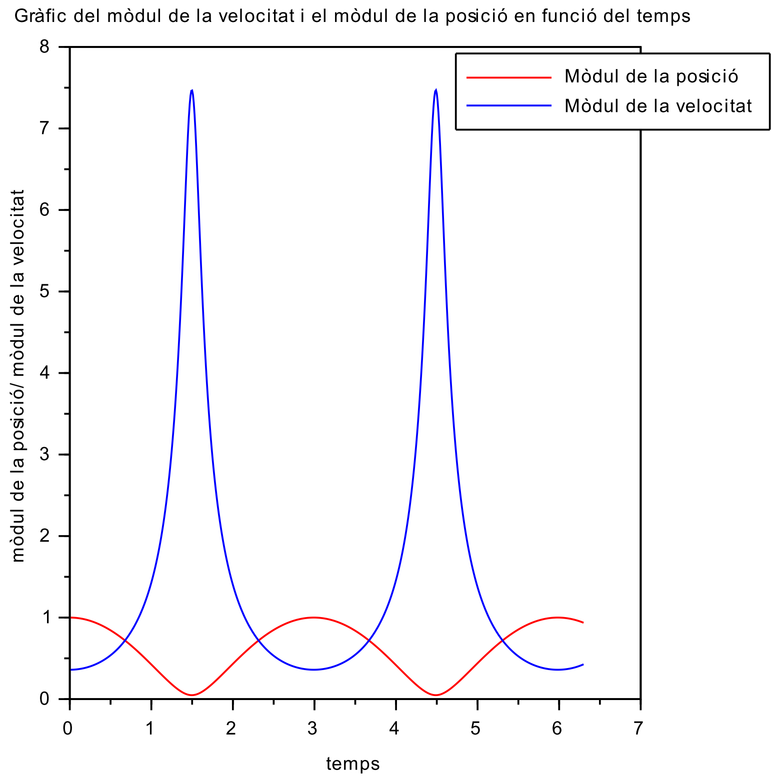


D'aquest apartat, també podem observar que la gràfica del mòdul de la posició i el mòdul de la velocitat en funció del temps no és constant. Això és degut a que es tracta d'una òrbita el·líptica i com explica la segona llei de Kepler, un cos que orbita al voltant d'una altre cos major es desplaça més ràpidament quan està més a prop del astre central, i la seva velocitat disminueix quan se n'allunya. Quan analitzem el gràfic que ens mostra els mòduls de la velocitat i de la posició en funció del temps, comprovem que els dos mòduls dibuixen dues funcions sinusoïdals amb el mateix període. Això es degut a que, cadascuna de les dues variables depèn de l'altra. Això ho comprovem fàcilment veient que la fórmula que ens calcula la velocitat a la que orbita un cos al voltant d'un altre depèn de la distància (R) que els separa:

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

La posició del cos en relació al cos central determina la seva velocitat. D'aquesta manera entenem com es mostra el seu gràfic (fig. 3).

Figura 3:

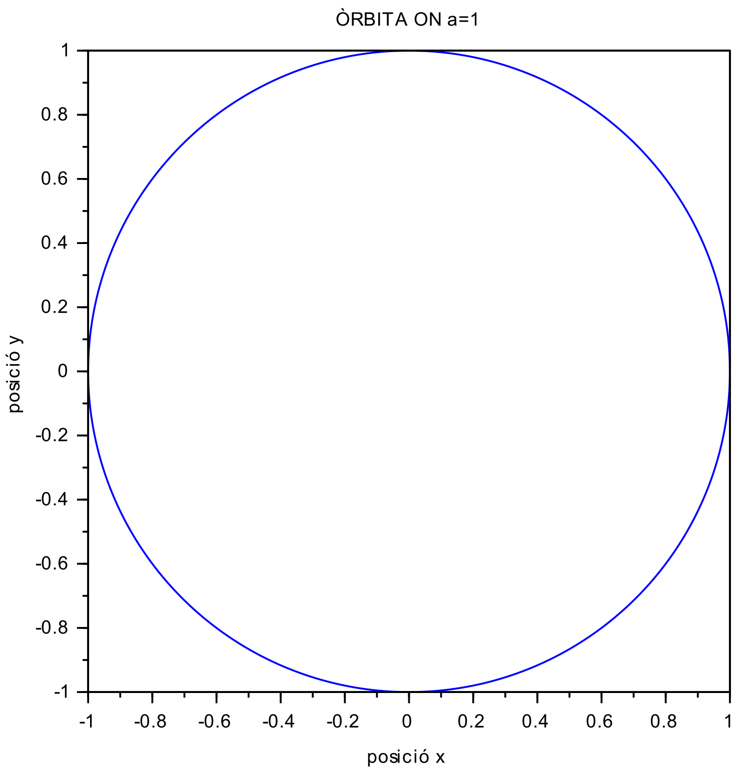


2.3.2 Òrbtia circular

En aquest segon subcas establim que $a = 1$. Per tant, la velocitat inicial del cos serà $(0, 1)$.

Així, seguint el mateix procediment que hem explicat anteriorment, la gràfica de la posició del cos en estudi ens mostra una òrbita circular (fig. 4). Aquest segon subcas es podria incloure en el subcas anterior, doncs una circumferència no és més que una el·lipse en la qual els seus dos focus coincideixen en la posició. Per tant, una òrbita circular es podria considerar un cas particular d'òrbita el·líptica. Tot i això, ho hem volgut explicar perquè és el cas que utilitzarem més en aquest treball i on aplicarem els diferents mètodes numèrics.

Figura 4:

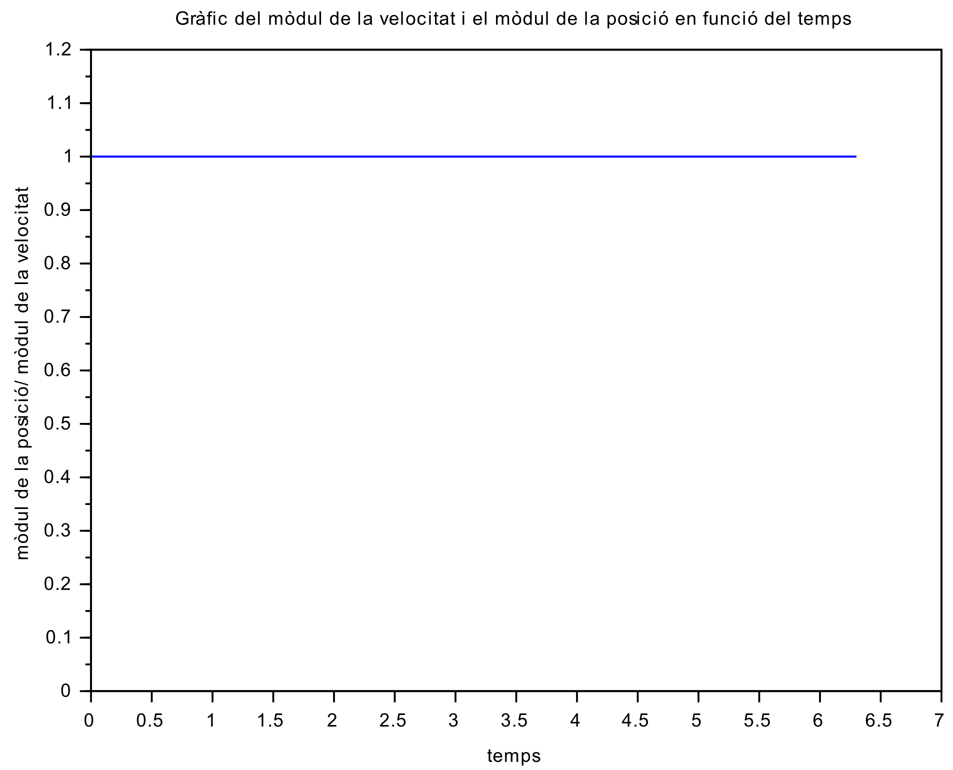


A més a més, si observem la gràfica del mòdul de la posició en funció del temps, veiem com el mòdul de la posició és constant. Això és degut al fet que la trajectòria és circular, i per tant la distància que separa el cos de l'astre central és constant. En el nostre cas, el valor de la constant és 1, ja que és la distància inicial que hem establert.

També observem que el mòdul del vector velocitat, que té com a components x i y la *velocitatx* i la *velocitaty*, és constant. Això ho podem veure clarament, com en el cas anterior, analitzant la fórmula que ens calcula la velocitat a la que orbita un cos al voltant d'un altre. La velocitat depèn de la distància que els separa. Per tant, si aquesta distància és constant, com hem explicat anteriorment, també ho serà la velocitat orbital.

Ho observem en la següent imatge (fig. 5):

Figura 5:

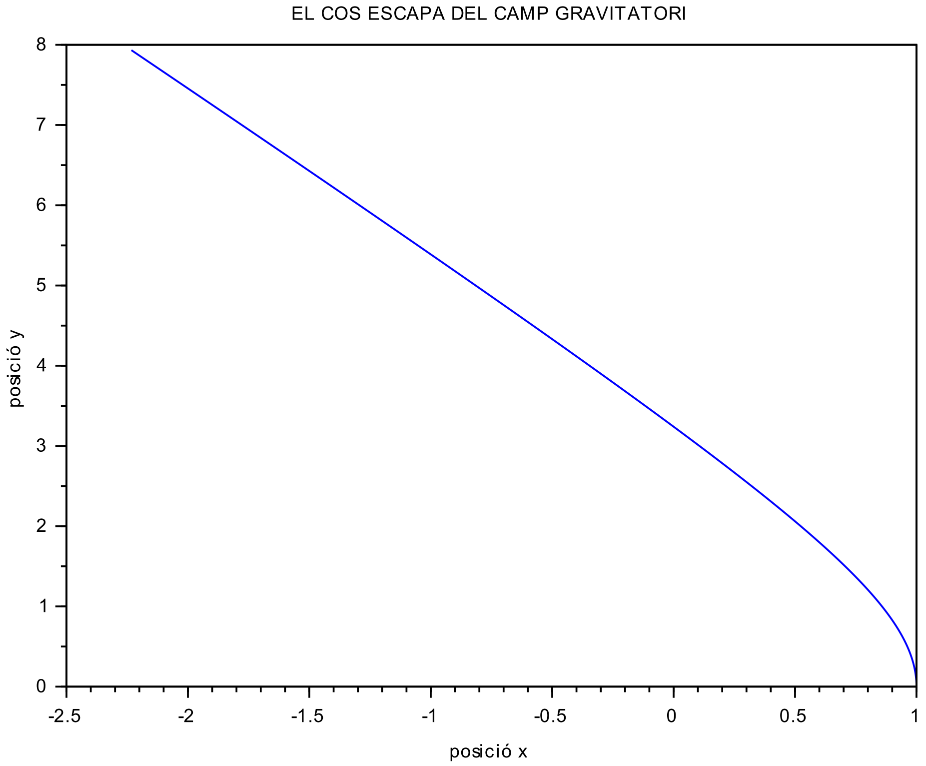


I, finalment, en aquest cas també podem dir que el moviment que segueix el cos és un MCU (Moviment Circular Uniforme), doncs segueix una trajectòria circular a una velocitat constant.

2.3.3 El cos s'escapa del camp gravitatori

En aquest subcas establim que $a > \sqrt{2}$. D'aquesta manera, al programar-ho, observem com el cos s'escapa del camp gravitatori (fig. 6).

Figura 6:



Per tal de demostrar-ho, ho hem de relacionar amb la velocitat d'escapament de l'astre central del nostre sistema binari. Definim la velocitat d'escapament com la velocitat mínima que necessita un cos per poder escapar de l'atracció del camp gravitatori generat per un altre cos, enlloc de caure-hi a sobre una altra vegada o entrar en òrbita a una alçada concreta sobre la seva superfície, suposant convencionalment que aquest cos no es veu afectat per cap altra força externa a part de la gravetat. Recordem que la seva fórmula és:

$$v_{escapament} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si GM és 1 i la distància inicial que els separa (R) és 1, tindrem que la velocitat d'escapament és $v_{escapament} = \sqrt{2}$. Llavors si la velocitat inicial ja supera des del principi aquesta, el cos s'escaparà del camp gravitatori.

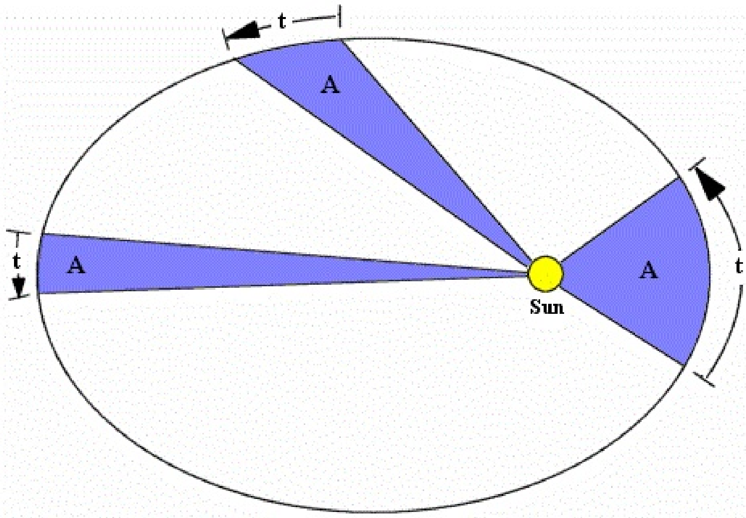
2.4 Comprovació de la segona llei de Kepler

La segona llei de Kepler, enunciada el 1609, diu: *"El radi vector que uneix el planeta i el Sol realitza àrees iguals en temps iguals"*.

Aquesta segona llei, referent a les àrees, ens diu que les àrees són equivalents a la constància del moment angular, dit de manera més simplificada, com més allunyat estigui el planeta del Sol (afeli) la seva velocitat serà menor. De la mateixa manera, quan el planeta estigui més proper (periheli), la seva velocitat serà major, però l'àrea que escombra serà la mateixa.

Recordem que l'afeli és el punt de l'òrbita d'un objecte al voltant d'un altre, en què aquests es troben a la màxima distància. D'aquesta manera, en aquest punt la velocitat serà la mínima possible, doncs en un temps determinat ha de recórrer poc espai. Mentre que quan el cos es trobi en el periheli, que és la distància mínima de l'òrbita d'un cos respecte al cos al qual orbita, la seva velocitat serà la màxima. Doncs, ha de recórrer molt més espai en el mateix temps per tal de que les àrees escombrades tinguin el mateix valor.

Figura 7: Segona llei de Kepler



Per tal de comprovar aquesta llei, calcularem el valor de les àrees que en un mateix període de temps va determinant el cos en moviment i comprovarem que aquestes àrees tenen el mateix valor numèric. Farem els càlculs imposant que la velocitat inicial sigui $(0, a)$ amb $a < 1$. Recordem que la primera llei de Kepler, tal i com hem comprovat en el primer apartat, diu que tots els plantetes es mouen al voltant del Sol descrivint una trajectòria el·líptica. (En el cas en què la velocitat inicial sigui (0,1), ja hem vist que la trajectòria era circular). Per tirar endavant el nostre exemple ho farem establint que la velocitat inicial és $(0, 0.8)$.

Amb l'objectiu de calcular l'àrea que descriu el cos en moure's durant un cert període de temps, utilitzarem mètodes d'integració numèrica. La raó és que no tenim l'expressió analítica de la trajectòria i per tant no podem integrar. Recordem aquí el concepte d'integral definida. Donada una funció $f(x)$ i un interval $[a, b]$, el valor de l'integral definida és igual a l'àrea limitada entre la gràfica de $f(x)$, l'eix d'abscisses, i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$.

Ho notem:

$$\int_a^b f(x) \quad dx$$

Integració numèrica
Donada una funció f definida sobre un interval fitat $[a, b]$, volem calcular:

$$J(f) = \quad \int_a^b f(x)dx$$

Suposant, és clar, que aquesta integral tingui sentit per a la funció f.

La integració numèrica consisteix a donar fórmules aproximades per al càlcul de la integral $J(f)$ de f; aquestes fórmules poden ser de gran utilitat quan la integral no es pot calcular per mètodes analítics (tal i com comentàvem anteriorment, perquè, per exemple, no disposem de l'expressió de f, per tal d'usar la Regla de Barrow).

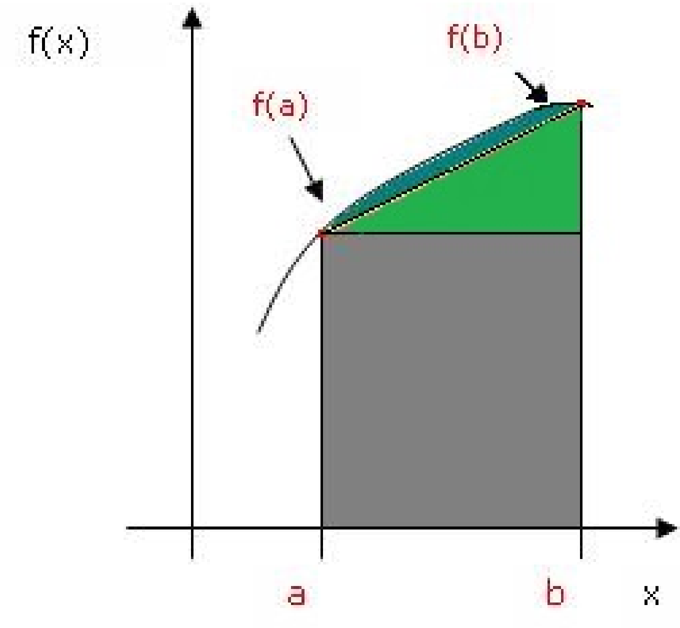
A tal fi, aproximarem f per un polinomi interpolador $p(x)$ i calcularem $J(p)$, obtenint així fórmules d'integració numèrica.

Fórmula del Trapezi
Prenent $h = b - a$:

$$\int_a^b f(x) = \quad \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)] - \frac{f^2(\xi)}{12} \cdot h^3 \qquad , \qquad \xi \quad \in \quad (a, b)$$

Observem la següent imatge, on podem veure gràficament el concepte d'inetgració numèrica (fig. 8).

Figura 8: Integració numèrica



L'àrea del triangle verd correspon a:

$$\frac{(f(b)-f(a))\,h}{2}$$

I l'àrea del rectangle gris a:

$$f(a)h$$

Si en fem la suma, surt:

$$f(a)h+\frac{(f(b)-f(a))\,h}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot h$$

Nosaltres, però, utilitzarem una regla composta d'integració numèrica, ja que aplicarem la regla dels trapezis no sobre tot l'interval $[a,b]$, sinó sobre subintervals de $[a,b]$, donant lloc així a les següents fórmules, que són les que implementarem al Scilab. Això ho fem amb l'objectiu de reduir l'error comès en el mètode d'integració numèrica.

Dividim $[a,b]$ en M parts iguals, a cadascuna d'elles apliquem trapezis i obtenim:

$$T(h) = \frac{h}{2}\cdot[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+...+2f(b-h)+f(b)]$$

Ho obtenim en descompondre la integral inicial com la suma de les integrals en M parts d'amplada $h = \frac{b-a}{M}$

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \quad = \quad \sum_{k=0}^{M-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \quad = \quad \sum_{k=0}^{M-1} J_k(t)$$

Amb $x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0 \div M)$. Com que:

$$J_k(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \quad = \quad \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right] - \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{12}h^3$$

L'error comés serà:

$$J(f) - T(h) = -\frac{b-a}{12M}\sum_{k=0}^{M-1} f^{(2)}(\xi_k)\cdot h^2$$

Anem a veure com ho implementem. Doncs, distingirem segons els quadrants i segons si es tracta del primer triangle o els successius.

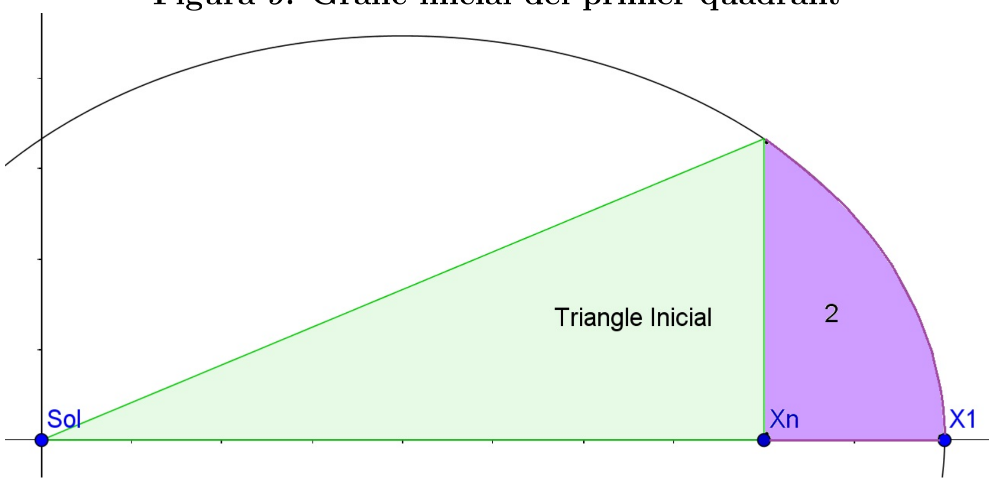
1r quadrant

Triangle inicial (Fig. 9). A la part marcada amb un *2* hi apliquem la regla dels trapezis per tal de calcular l'àrea, i calculem l'àrea del triangle anomenat *triangle inicial.* L'àrea que busquem serà la suma d'aquestes dues àrees.

$$A_1 = \frac{f(x_n)x_n}{2}$$

$$A_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$$

Figura 9: Gràfic inicial del primer quadrant

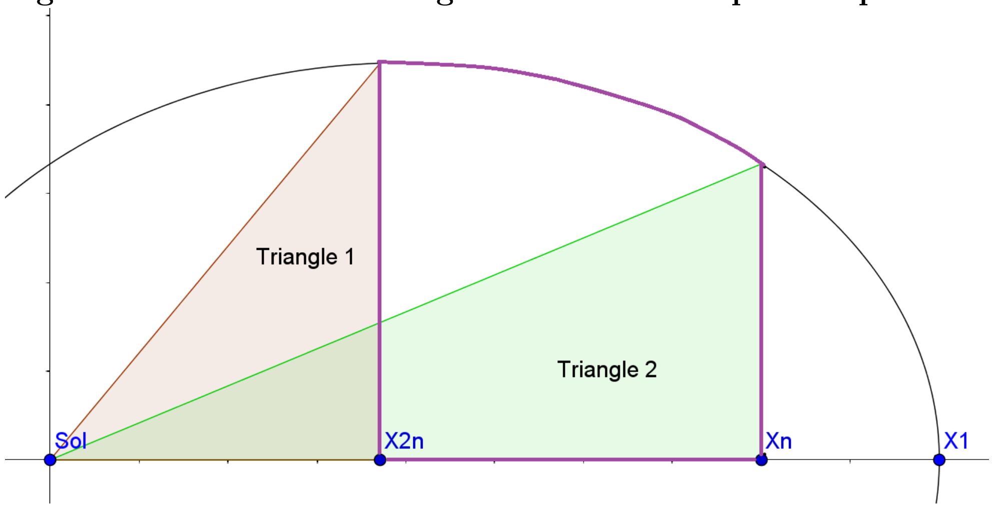


Triangles successius (Fig. 10). Primer apliquem la regla dels trapezis per calcular l'àrea compresa entre x_n i x_{2n}, emmarcada de color violeta a la imatge. Li sumem l'àrea del triangle *1* i li restem l'àrea del triangle *2*.

$$A_1 = \frac{f(x_{2n})x_{2n}}{2}$$

$$A_2 = \frac{f(x_n)x_n}{2}$$

Figura 10: Gràfic dels triangles successius del primer quadrant



Finalment, ens ocuparem del problema dels quadrants ja que segons en quin quadrant estem la manera de calcular-ho canviarà. Per fer-ho, hem programat una rutina que ens permet saber el quadrant on ens trobem.

Determinem un vector amb totes les coordenades de posició: $posicio = (posiciox, posicioy)$. Recordem que per cada valor de t tenim unes coordenades. El que farem és anar-les recorrent per determinar canvis de signe:

$$\begin{bmatrix} producte1 = & posicio(j,1) \cdot posicio(j+1,1) \\ producte2 = & posicio(j,2) \cdot posicio(j+1,2) \end{bmatrix}$$

Controlem el producte de les components x i de les y consecutives. La raó és que quan passem del primer quadrant al segon, canviarà de signe el *producte1*. Quan passem del segon quadrant al tercer, canviarà de signe el *producte2*. Quan passem del tercer quadrant al quart, canviarà de signe el *producte1*. I quan passem del quart quadrant al primer, canviarà de signe el *producte2*. D'aquesta manera, en el moment que es canvia de signe, detectem la posició on passa i ja sabem quina és la darrera component de la posició abans de canviar de quadrant. En el Scilab ho programem com apareix en la imatge (fig. 11):

Figura 11: Programació de Scilab per a la comprovació de la segona llei de Kepler

```
a=size(posicio);
index1=2;
canvi_signe(1)=1;
for j = 1:(a(1)-1)
    producte2=posicio(j,1)*posicio(j+1,1);
    producte1=posicio(j,2)*posicio(j+1,2);
    if (producte2<0) then
        canvi_signe(index1)=j;
        index1=index1+1;
    end
    if (producte1<0) then
        canvi_signe(index1)=j;
        index1=index1+1;
    end
end;
a=size(canvi_signe)
if a(1,1)<5 then
    disp("Necessitem mes temps")
    else
    npuntsquadrant(1)=canvi_signe(2)-canvi_signe(1);
    npuntsquadrant(2)=canvi_signe(3)-canvi_signe(2);
    npuntsquadrant(3)=canvi_signe(4)-canvi_signe(3);
    npuntsquadrant(4)=canvi_signe(5)-canvi_signe(4);

    npuntscalcularea=int(min(npuntsquadrant)/3);
end
```

Cal tenir en compte aquí, que cal que doni una volta completa.

Una vegada tenim els punts que pertanyen a cada quadrant, ens quedem amb la part entera del mínim de tres valors. Això ho decidim nosaltres, enlloc de tres podria ser més, però per fer la comprovació de la segona llei de Kepler és suficient així.

Finalment ja calculem les tres àrees de cada quadrant. El primer i el tercer es programen igual, i el segon i el quart, tenen la petita diferenciació que enlloc de suma les àrees dels trapezis i del triangle gran i restar-li l'àrea del triangle petit, haurem de restar les àrees dels trapezis i del triangle gran al triangle petit.

Fet això, l'ordinador ens llista el vector àrea on veiem que totes les àrees calculades són aproximadament iguals:

àrea =

0.0679989

0.0679988

0.0679987

0.0657491
0.0679923
0.0679899
0.0716661
0.0679920
0.0679944
0.0668919
0.0679973
0.0679979

Per tant, podem afirmar que la segona llei de Kepler es compleix en el nostre cas 0.

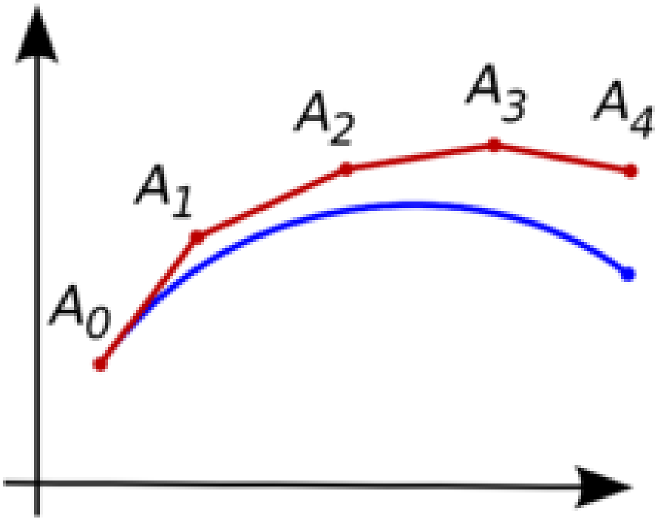
2.5 Mètode d'Euler

El mètode d'Euler és un mètode numèric per a resoldre equacions diferencials ordinàries sota unes condicions inicials donades. És el cas més bàsic i senzill de mètode d'integració numèrica per a equacions diferencials ordinàries.

La idea en què es basa aquest mètode, és que, tot i que la corba és inicialment desconeguda, sí que coneixem posició i velocitat inicial. Això ens permet calcular el següent punt de la corba, tal i com descriurem posteriorment a través d'equacions matemàtiques.

Si iterem aquest procés podrem determinar una corba poligonal aproximada de la solució, tal i com podem veure en la il·lustració (fig. 12).

Figura 12: Il·lustració del mètode d'Euler



En general, aquesta corba no divergeix gaire de la corba original desconeguda, i l'error entre totes dues corbes es pot reduir si la mida del pas és prou petita i l'interval de computació és finit. Això ho quantificarem en el següent apartat on es tracta el tema de l'error comès.

En aquest treball, utilitzarem aquest mètode per tal de trobar una solució aproximada de la nostra equació diferencial. A continuació, compararem aquesta solució amb la solució obtinguda per la funció ODE de Scilab i farem un anàlisi dels errors (quantificació, evolució, representació, gràfica,...). Donat que no podem saber la solució exacta de l'equació diferencial, utilitzarem l'òrbita obtinguda amb la funció ODE de Scilab com a solució estàndard, ja que utilitza un mètode molt precís i proporciona una solució gairebé indistingible a la realitat.

Considerem el problema de calcular la trajectòria del nostre cos, donats el valor inicial i l'equació diferencial que satisfà. El valor inicial serà $f(t_0) = f_0$. D'aquesta manera, encara que la trajectòria ens es desconeguda, tenim el seu punt inicial $f(t_0)$. I, amb l'equació diferencial podem calcular el pendent de la recta tangent donat un punt de la corba, aquest serà el punt inicial.

$$f(t_1) = f_0 + hf'(t_0)$$

On $h = t_1 - t_0$. Podrem anar variant aquest pas. Així, observarem que com més petit sigui el pas menys error tindrem entre la corba aproximada i la corba solució.

Aquesta fórmula l'obtenim tenint en compte que la pendent de la tangent calculada és: $\tan\alpha = f'(t_0)$.

Matemàticament la pendent de la recta tangent en un punt de la corba és:

$$\tan\alpha = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$\tan\alpha = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{h}$$

Si fem tendir ara el valor de h cap a 0, ens trobem amb el concepte de derivada en un punt. Físicament, podem parlar de velocitat instantània o, matemàticament, ho podem definir com el pendent de la recta tangent en un punt a la funció f.

$$f'(t_0) \quad = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_1) - f(t_0)}{h}$$

Així, podem dir que:

$$\tan\alpha = f'(t_0) = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{h}$$

Si:

$$f'(t_0) \quad = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{h}$$

D'aquesta fórmula en podem extreure:

$$f(t_1) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0)$$

Amb aquesta fórmula podem calcular un nou punt aproximat de la corba a partir del punt inicial donat. I a partir d'aquest punt podrem calcular-ne un de nou:

$$\tan\beta = f'(t_1) \quad = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{h_1}$$

$$f(t_2) = f(t_1) + h \cdot f'(t_1)$$

D'aquesta manera, si anem repetint aquest procés, n'obtindrem un corba poligonal aproximada de la corba original.

El mètode d'Euler integra equacions diferencials ordinàries de primer ordre. Tot i així, també es pot utilitzar per integrar una EDO d'ordre superior, com és el nostre cas en què tenim una EDO de segon ordre. Tornarem a utilitzar el mateix mètode explicat anteriorment per reduir l'equació diferencial a una de primer ordre. Així, utilitzarem el vector $\vec{f}$.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Ens és conegut que:

$$\dot{f}\,(1) = \quad f\,(3)$$

$$\dot{f}\,(2) = \quad f\,(4)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Quan apliquem el mètode d'Euler, si f correspon al vector $\vec{f}$ d'una equació diferencial de segon ordre, el raonament serà idèntic. Només ens cal saber les condicions inicials ($\vec{f}(0)$):

$$\vec{f}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Recordant que $h = \Delta t$, apliquem la fórmula:

$$\vec{f}(h) = \quad \vec{f}(0) + h \cdot \dot{\vec{f}}(0)$$

I posteriorment, de forma iterativa:

$$\vec{f}(2h) = \quad \vec{f}(h) + h \cdot \dot{\vec{f}}(h)$$

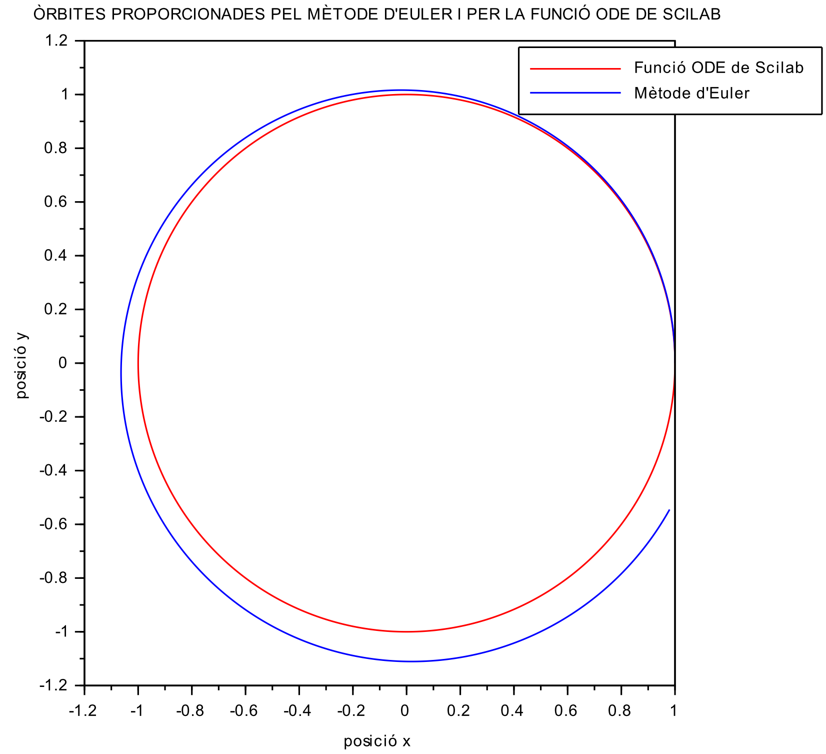
D'aquesta manera obtenim un corba poligonal constituïda a partir de trams lineals corresponents a les rectes tangents dels punts que hem anat obtenint.

Escrit en forma matricial tenim:

$$\vec{f}(h) = \quad \vec{f}(0) + h \cdot \dot{\vec{f}}(0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En el següent gràfic (fig. 13) podem veure la comparació entre la corba calculada per la funció ODE de Scilab (corba vermella), i la corba que hem calculat amb el mètode d'Euler(corba blava).

Figura 13:



2.6 Mètode d'Euler millorat

El mètode d'Euler millorat segueix el mateix raonament que el mètode d'Euler, però intenta millorar l'aproximació prenent les solucions del mètode d'Euler com una predicció que ens permeti calcular la mitjana entre certes pendents, i utilitzar aquests valors en l'equació d'Euler millorada. D'aquesta manera, obtindrem una nova corba poligonal aproximada, on observarem que l'error amb la corba original disminueix considerablement respecte l'error de la corba aproximada pel mètode d'Euler normal.

Com hem dit, utilitzem l'equació d'Euler com una equació predictora:

$$f(t_1) = f_0 + h \cdot f'(t_0)$$

Els resultats obtinguts d'aquesta equació els utilitzarem en l'equació d'Euler millorada. Així, en aquesta nova equació farem la mitjana entre el valor predit per la primera equació i el valor inicial:

$$f(t_1) = f_0 + h \cdot f'(\frac{t_0 + t_1}{2})$$

Si comparem la corba obtinguda (corba blava), amb la corba d'ODE (corba vermella), observem les òrbites obtingudes (fig. 14) i com les corbes divergeixen (figure 15).

Figura 14:

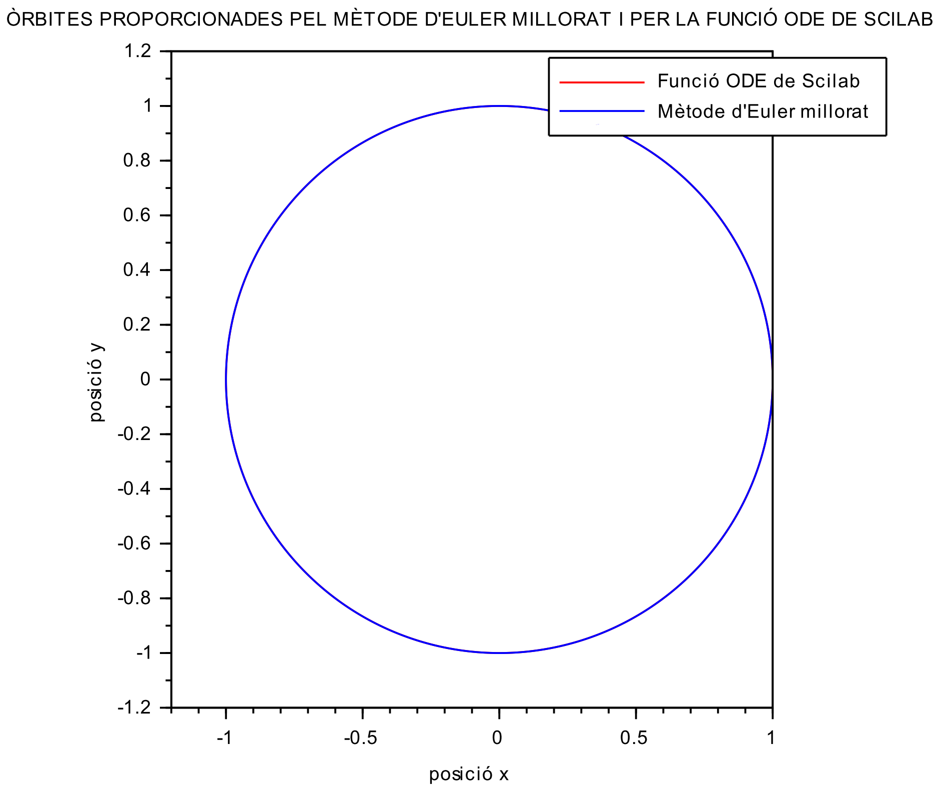
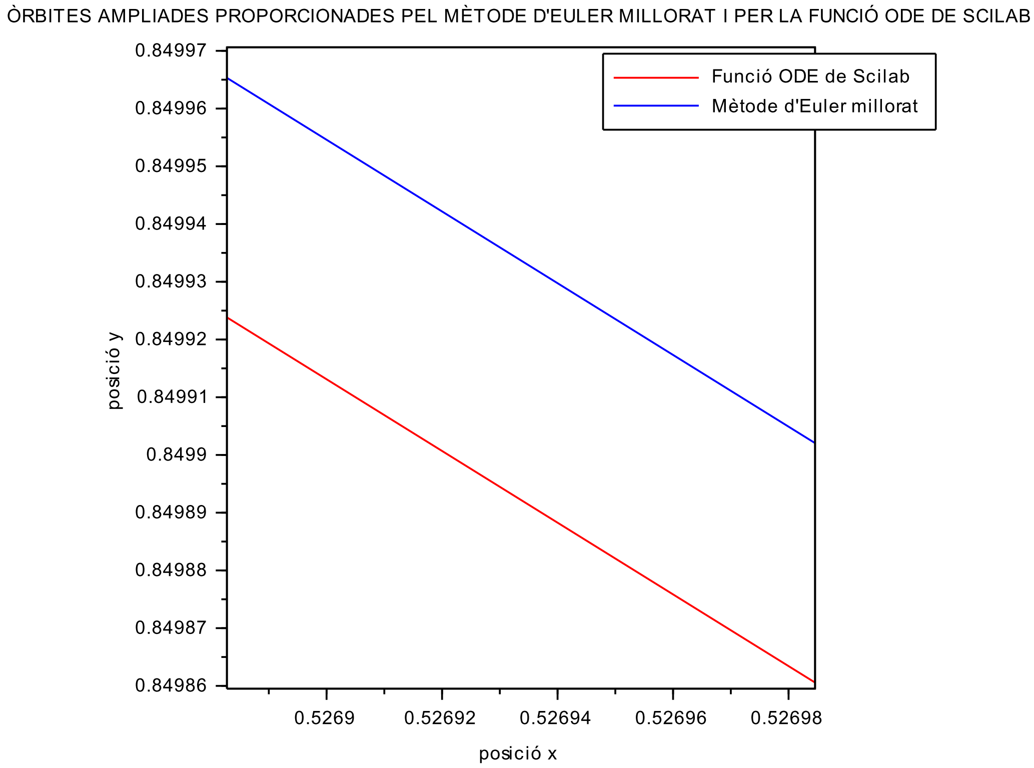


Figura 15:



2.7 Taylor

Definim, la sèrie de Taylor com un procés numèric per resoldre equacions diferencials ordinàries que consisteix en l'aproximació de la funció solució en un polinomi de Taylor d'un grau determinat.

Així, un polinomi de Taylor d'una funció $f(x)$ es calcula amb la suma d'infinits termes que s'obtenen a partir de les derivades de la funció en un punt donat. La sèrie de Taylor es defineix com:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)\cdot(x-a)^2}{2} + ... + \frac{f^n(a)\cdot(x-a)^n}{n!} + E_r \quad (error \quad relatiu)$$

Partint d'una funció f que ha de ser n vegades derivable en un punt concret a, busquem una funció polinòmica de grau n que correspongui a una aproximació del valor de la funció f en aquest punt a.

2.7.1 Polinomi de Taylor de grau 1

Si establim que $n = 1$, veiem com obtenim la fórmula per calcular el mètode d'Euler, descrit anteriorment; tenint en compte que el terme $x - a$ correspondria al pas donat (h):

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a) \cdot (x - a)$$

Ens adonem que el mètode d'Euler només és un cas particular dels mètodes de Taylor corresponent al polinomi de Taylor de grau 1.

2.7.2 Polinomi de Taylor de grau 2

Així, amb l'objectiu de disminuir l'error en el mètode d'Euler, podem utilitzar, de la mateixa manera, polinomis de Taylor d'un grau major.

A continuació, utilitzarem un polinomi de Taylor de grau 2. D'aquesta manera utilitzarem la fòrmula:

$$f(x+1) = f(x) + f^{'}(x) \cdot h + \frac{f^{''}(x) \cdot h^2}{2}$$

Els dos primer termes de la fórmula ($f(x)$ i $f^{'}(x) \cdot h$) ens són coneguts doncs corresponen als dos termes que se sumen en la fórmula del mètode d'Euler.

El tercer terme correspon a:

$$\frac{f^{''}(x) \cdot h^2}{2}$$

Per tal de calcular el valor d'aquest tercer terme, utilitzarem la definició de derivada.

Donada una funció $y = f(x)$, anomenem derivada de la funció en el punt d'abscissa $x = x_0$, i la representem per $f^{'}(x_0)$, al nombre que resulta de calcular aquest límit:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Fent $x - x_0 = h$, resulta $x = x_0 + h$. Quan x tendeix a x_0, h tendeix a 0. Per tant, el valor $f^{'}(x_0)$ també es pot expressar:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

D'aquesta manera podem dir que la segona derivada de $f(x)$ correspon a:

$$f^{''}(x) = \frac{f^{'}(x+1) - f^{'}(x)}{h}$$

Si substituïm aquesta segona derivada de $f(x)$ a l'equació formulada al principi:

$$f(x+1) = f(x) + f^{'}(x) \cdot h + \frac{f^{''}(x) \cdot h^2}{2}$$

Ens queda:

$$f(x+1) = f(x) + f^{'}(x) \cdot h + \frac{(f^{'}(x+1) - f^{'}(x)) \cdot h}{2}$$

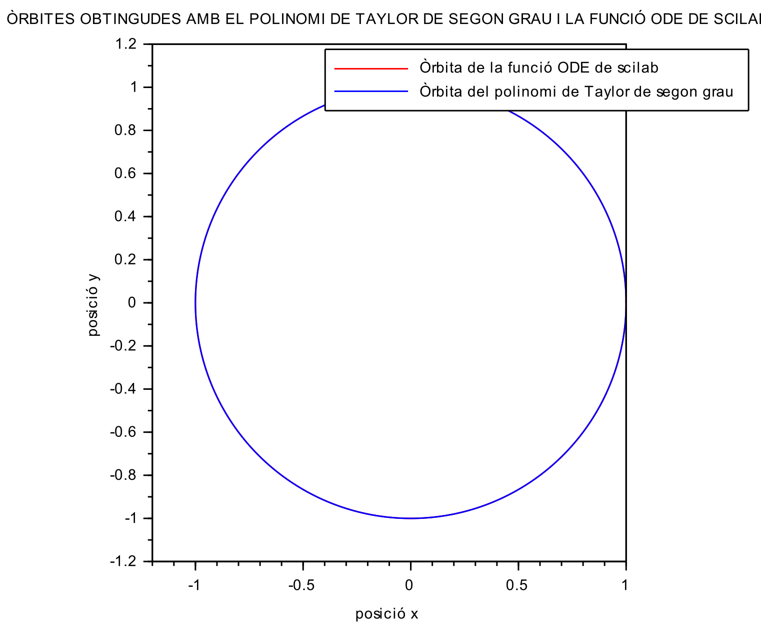
Si ho apliquem de manera iterativa, tenim que:

$$f(2h) = f(h) + f^{'}(h) \cdot h + \frac{(f^{'}(2h) - f^{'}(h)) \cdot h}{2}$$

D'aquesta manera, si en el mètode d'Euler aproximàvem la funció de l'EDO per trams poligonals, és a dir, rectes; en el polinomi de Taylor de grau 2, la corba solució estarà constituïda a partir de trams parabòlics corresponents a les paràboles del polinomi de Taylor de grau 2.

En la següent imatge (fig. 16) podem veure la comparació entre la solució obtinguda amb la funció de l'EDO de Scilab i la solució obtinguda amb el polinomi de Taylor de grau 2. Així, podem dir que hem disminuït l'error comès en relació al mètode d'Euler. Doncs a primera vista no es distingeixen les dues funcions, tot i que les òrbites sí que divergeixen. Més tard, estudiarem amb més detall l'error comès i l'ordre del mètode utilitzat.

Figura 16:



3 Control de l'error

A continuació, farem un estudi de l'error comès en els diferents mètodes que hem aplicat per resoldre la nostra EDO. Així, definint l'error com la distància entre el valor exacte i el valor calculat, trobarem l'error en la posició.

$$Error = \sqrt{(x_{exacta} - x_{calculada})^2 + (y_{exacta} - y_{calculada})^2}$$

Essent $x_{calculada}$ i $y_{calculada}$ la posició calculada amb el mètode utilitzat, la compararem amb la posició que ens dóna la funció ODE de Scilab, que correspon a x_{exacta} i y_{exacta}.

L'error del mètode l'establirem com l'error màxim de la col·lecció de tots els errors a cada punt.

Després, calcularem l'ordre del mètode. Així, un mètode és d'ordre p quan, després d'aplicar-lo en un interval fixat, tenim aproximadament:

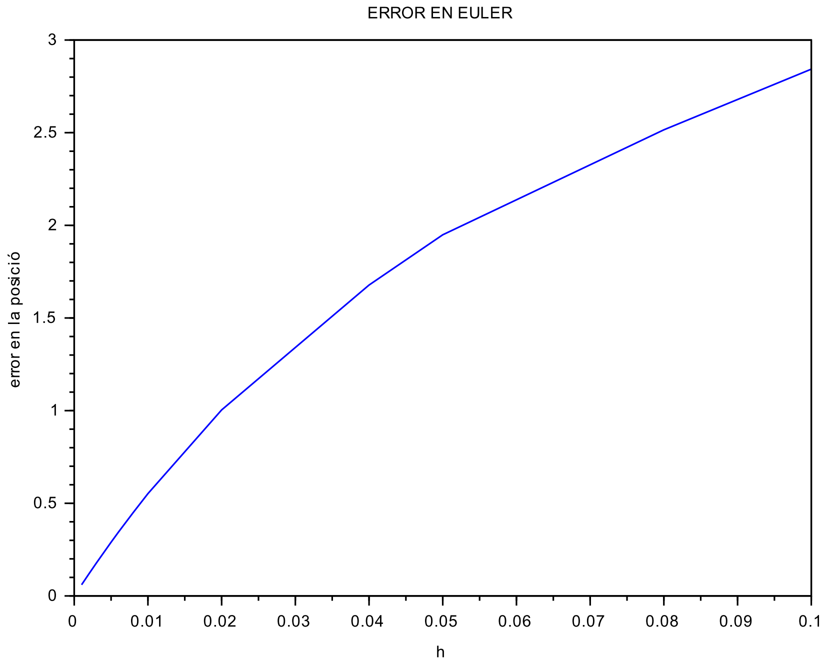
$$E(h) = Nh^p$$

On $E(h)$ és l'error comès, N és una constant que depèn del sistema d'equacions diferencials i h és el pas.

3.1 Error en el mètode d'Euler

Fem una gràfica (Fig. 17) per veure com evoluciona aproximadament l'error en funció de h, el pas utilitzat.

Figura 17:



El mètode d'Euler consisteix en l'aproximació d'una corba mitjançant trams lineals. Degut a que aquesta aproximació no és exacta, es comet un error derivat del mètode. En la figura 17 podem observar que l'error va augmentant a mesura que augmentem el pas h. Així, comprovem que si utilitzem un pas de temps molt petit el mètode serà molt més precís que si utilitzem un pas major, i per tant, podrem reduir l'error en l'aproximació. Encara així, hem de tenir en compte que un pas més petit comportarà un número major de càlculs, i per conseqüent un major esforç computacional de l'ordenador.

El mètode d'Euler és, per definició, un mètode d'ordre 1. Així haurà de complir que:

$$E(h) = Ah$$

On $E(h)$ és l'error comès, A és la constant pròpia del mètode d'Euler i del problema considerat, i h és el pas.

Per tal de verificar que el mètode és d'ordre 1, apliquem l'escala logarítmica als punts de la gràfica anterior.

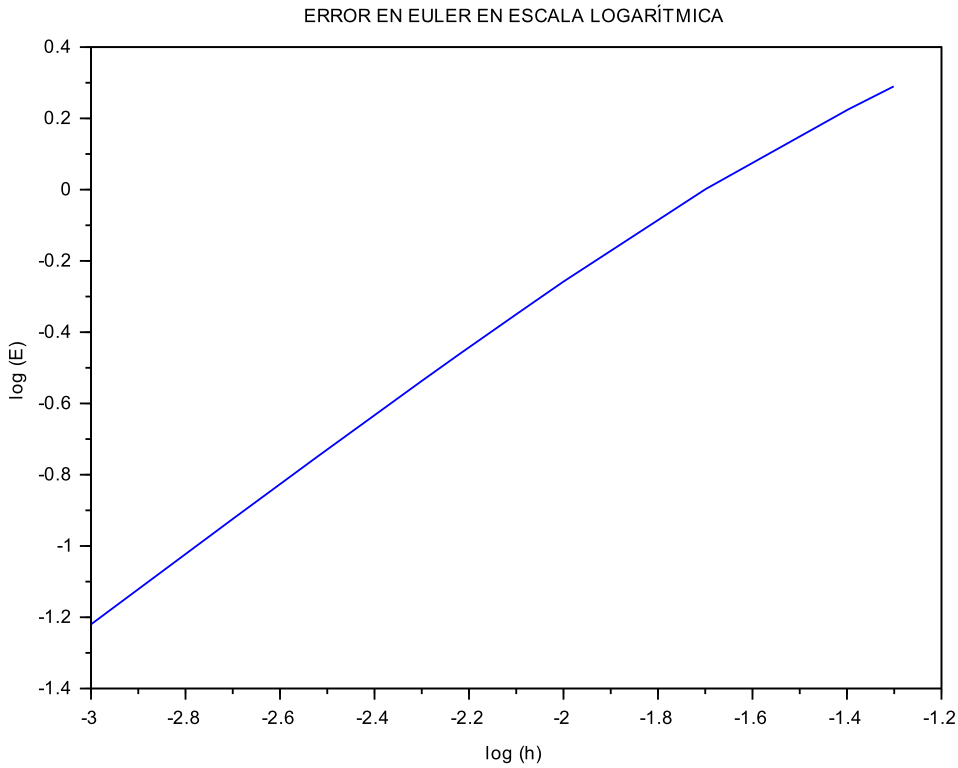
$$\log E(h) = \log h + \log A$$

Així, hem de comprovar que el pendent de la recta definida pels punts $\log E(h)$ i $\log h$

sigui l'ordre del mètode. D'aquesta manera implementem una rutina a Scilab per tal de verificar que el mètode d'Euler es tracta d'un mètode d'ordre 1 i constatem que el pendent mitjà de la recta és aproximadament 1.

Veiem la gràfica que expressa l'error en funció del pas en escala logarítimica (Fig. 18):

Figura 18:



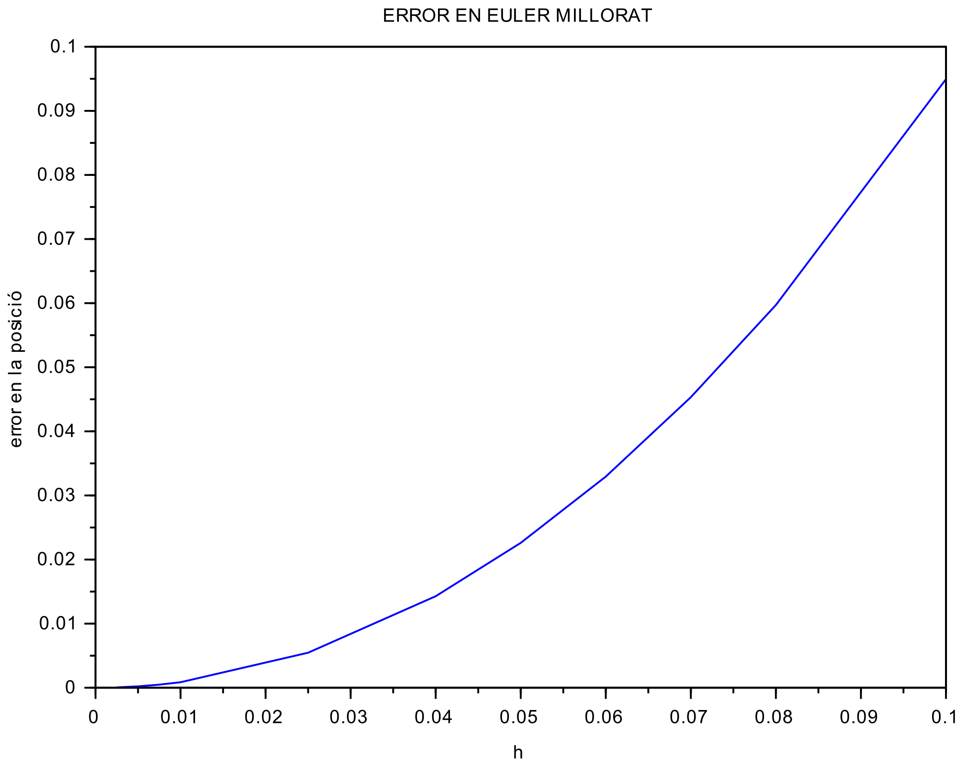
3.2 Error en el mètode d'Euler millorat

Construïm la gràfica (Fig. 19) que ens relaciona l'error comès amb el pas utilitzat, i que ha de complir, aproximadament:

$$E(h) = Bh^2$$

On $E(h)$ és l'error comès, B és una constant pròpia del mètode d'Euler millorat i h és el pas.

Figura 19:



Tornem a verificar que com menor sigui el pas utilitzat menys error cometrem.

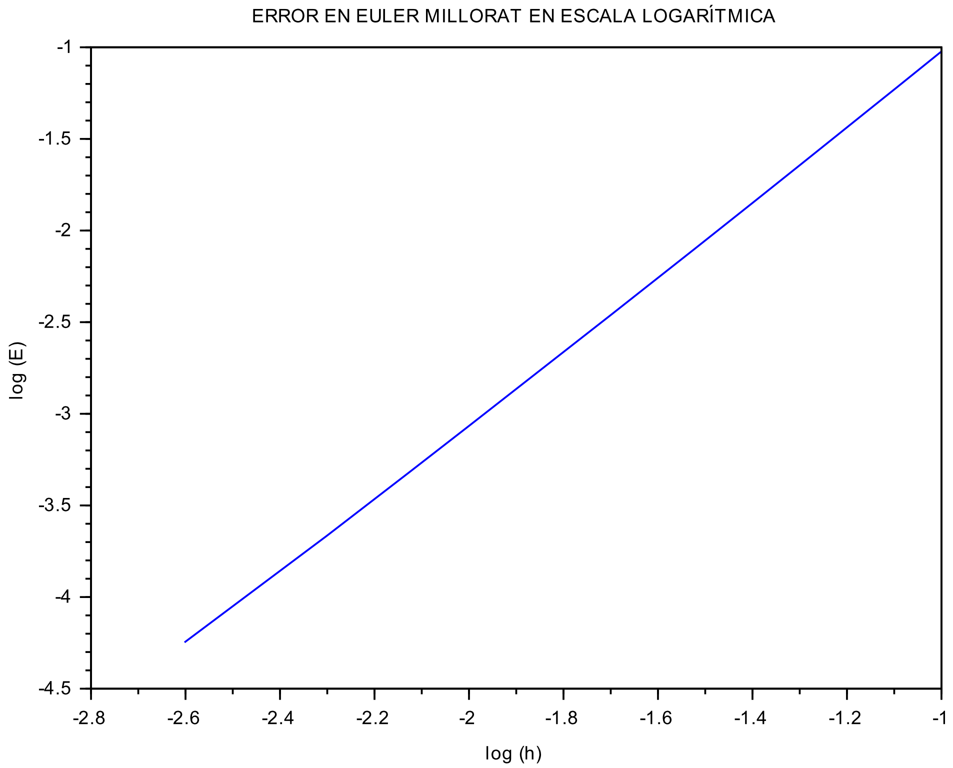
En aquest cas, si apliquem l'escala logarítmica, obtenim una recta que compleix:

$$\log E(h) = 2 \log h + \log B$$

Comprovem amb la implementació d'una rutina a Scilab que el pendent d'aquesta recta és 2, el qual correspon a l'ordre del mètode.

Veiem la gràfica (Fig. 20) que relaciona l'error comés amb el pas en escala logarítmica:

Figura 20:



3.3 Error en el polinomi de Taylor de grau 2

El polinomi de Taylor de grau 2 és un mètode d'ordre 2, així veurem com les funcions que relacionen l'error amb el pas coincideixen amb les funcions d'Euler millorat (Fig. 21 i fig. 22).

$$E(h) = Ch^2$$

$$\log E(h) = 2 \log h + \log C$$

On $E(h)$ és l'error comés, h és el pas i C és una constant pròpia del mètode del polinomi de Taylor de grau 2.

Figura 21:

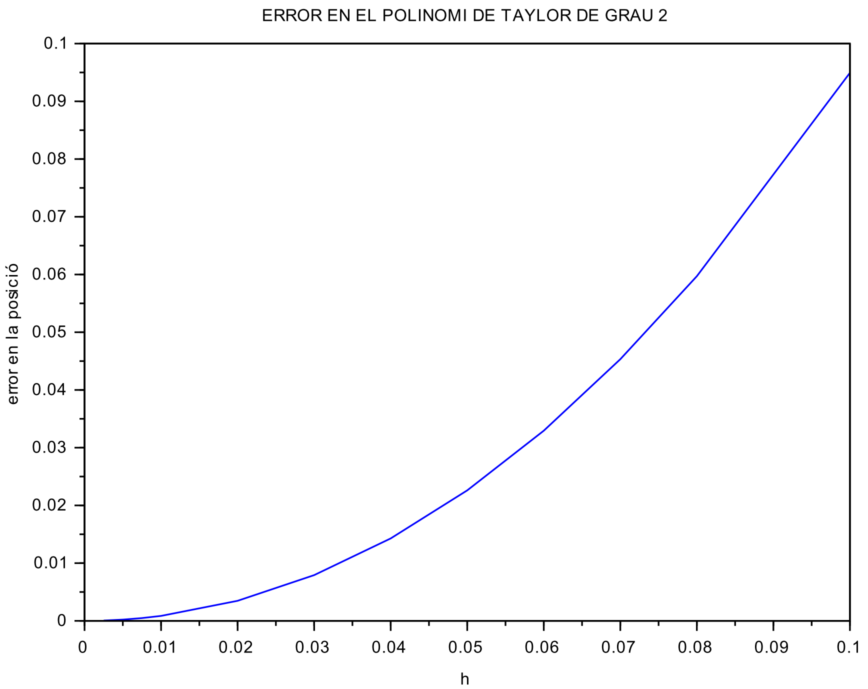
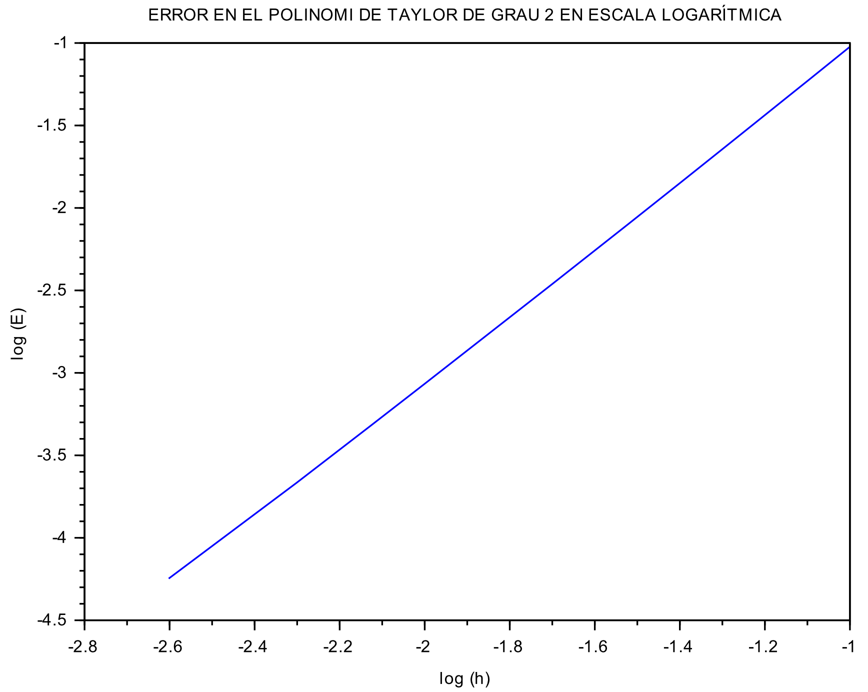


Figura 22:



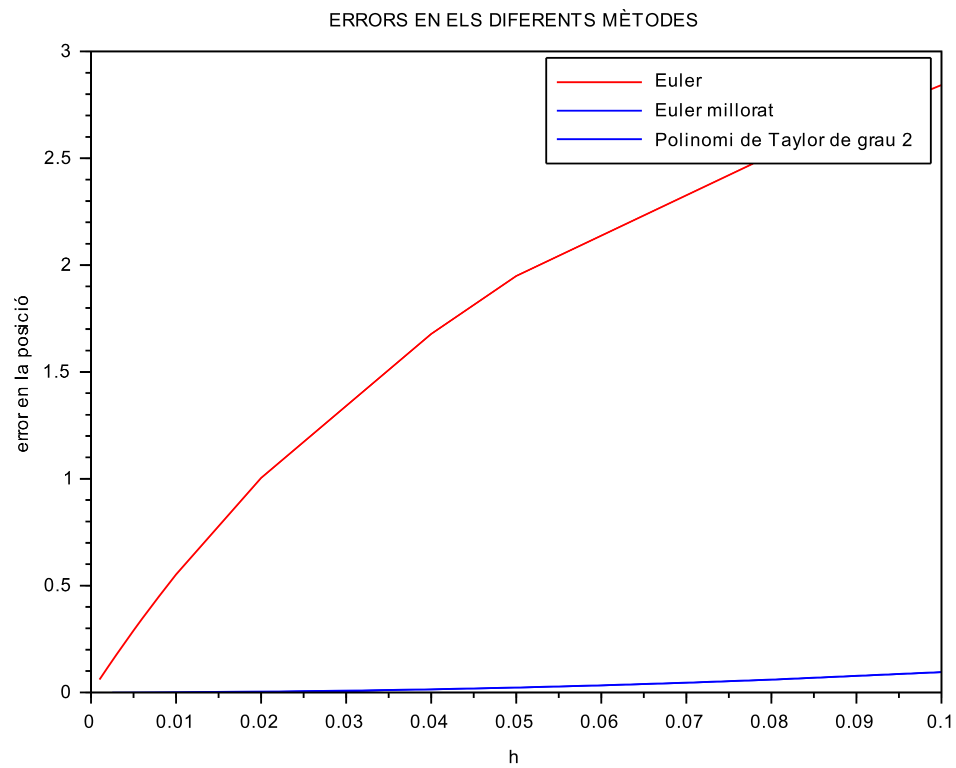
3.4 Comparació de l'error

Comparem, ara, l'error comés en cada mètode (fig. 23).

En la gràfica, hi podem observar la rellevant diferència en l'error comés entre el mètode d'ordre 1, el mètode d'Euler, i els dos mètodes d'ordre 2, el mètode d'Euler millorat i el polinomi de Taylor de grau 2. Això constata la importància que té l'ordre d'un mètode en relació a l'error comés. Com més elevat sigui l'ordre d'un mètode, més reduït serà el seu error, i per tant, més fiable serà la seva aproximació a la solució real.

Per altra banda, la gràfica també ens mostra l'error en relació al pas utilitzat. Així, podem veure que un pas més petit, tot i que requereixi una major quantitat de càlculs i per tant més esforç computacional, ens permet reduir notablement l'error. D'aquesta manera, fins i tot els mètodes d'ordre no gaire elevat, com els que nosaltres hem estudiat, ens proporcionen una aproximació prou fiable i no molt allunyada de la realitat amb l'ús d'un pas prou petitt.

Figura 23:



4 Aplicació dels mètodes numèrics estudiats

Una gran quantitat de problemes de la ciència, sobretot de la física i d'enginyeries, poden modelar-se matemàticament mitjançant equacions diferencials que per tal de trobar la seva solució requereixen mètodes numèrics. D'aquesta manera veurem que la resolució d'equacions diferencials mitjançant mètodes numèrics té múltiples aplicacions.

L'aplicació del mètodes numèrics en enginyeries es basa en la predicció dels comportament de les estructures en el seu sentit més ampli. D'aquesta manera, tot allò que comporti elaborar projectes amb materials resistents implica la necessitat de quantificar com es comportarà aquesta estructura. Per altra banda, també hi ha altres aplicacions en el món de la enginyeria i d'altres ciències. Gran part dels models físics, químics i biològics, entre d'altres, venen donats per equacions diferencials. D'aquesta manera, en la majoria de casos aquesta equació diferencial no té una solució analítica o bé és massa difícil trobar-la, i per tant, s'exigeix l'ús de mètodes numèrics per a trobar una solució aproximada.

A continuació, resoldrem un problema real en el qual aplicarem el mètode d'Euler millorat.

4.1 Problema 1

El primer problema extret del llibre *Física para la ciencia i la tecnología, Vol. 1.* ens diu:

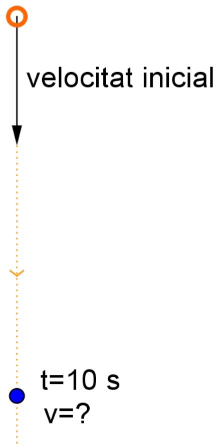
Des d'un globus aerostàtic es tira una pilota de beisbol verticalment cap avall amb una velocitat inicial de 35 km/h. La pilota arriba a la velocitat terminal de 150 km/h. Suposant que la resistència amb l'aire és proporcional al quadrat de la velocitat, estima la velocitat de la bola al cap de 10 s del seu llançament.

Si es deixa caure una segona bola, aquesta vegada amb una velocitat inicial nul·la, quant temps li costarà arribar al noranta-nou per cent de la seva velocitat límit? Quina distància recorre durant aquest temps?

Resolució:

En aquest problema físic real, se'ns dóna unes condicions inicials i se'ns demana que estimem la velocitat de la bola llançada al cap de 10 segons del seu llançament. Vegem-ho:

Figura 24: Condicions del problema



La velocitat inicial donada és:

$$v = 35km/h = 9,7\hat{2}m/s$$

El problema es regeix pel principi fonamental de la dinàmica.

$$\sum F = ma$$

Sobre la pilota de beisbol, el cos que estudiem, hi actuen dues forces. Verticalment cap amunt hi actua una força de fregament, que, com ens diu l'enunciat, és proporcional al quadrat de la velocitat:

$$F_f = kv^2$$

On F_f és la força de fregament, k és la constant de proporcionalitat i v és la velocitat a que es mou el cos.

Verticalment cap avall hi actua el pes del cos:

$$P = mg$$

On P és el pes, m és la massa i g és la gravetat terrestre.

D'aquesta manera, substituïm les dues forces a la fórmula que ens proporciona el principi fonamental de la dinàmica. Tenint en compte que agafem el sentit positiu cap avall, i el sentit negatiu cap amunt, i que per tant, el pes tindrà signe positiu i la força de fregament tindrà signe negatiu. Ens queda:

$$P - F_{freg.} = ma$$

$$mg - kv^2 = ma$$

Aquesta serà l'equació diferencial que haurem de resoldre. Per tal de implementar-ho a Scilab, aïllem l'acceleració:

$$a = g - \frac{kv^2}{m}$$

En notació de Newton seria:

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\dot{x}^2$$

En aquesta equació ens és desconeguda la fracció entre la constant de proporcionalitat k i la massa del cos. Per tal de trobar-ne el seu valor, utilitzarem les altres dades que ens proporciona el problema:

$$v_{terminal} = 150 \quad km/h \quad = 41,\hat{6} \quad m/s$$

$$g = 9,81 m/s^2$$

Recordem el concepte de velocitat terminal, aquesta és defineix com la velocitat màxima a la qual arribarà un cos sota una força constant. D'aquesta manera, quan el cos arriba a aquesta velocitat adquireix un moviment amb velocitat constant, doncs no es pot superar la velocitat terminal. Per tant, l'acceleració del cos serà nul·la.

$$a = 0$$

Apliquem aquesta condició a l'equació diferencial:

$$mg = kv_{terminal}^2$$

Aïllem les variables desconegudes i substituïm les variables conegudes:

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{v_{terminal}^2}$$

$$\frac{k}{m} = 5,65056 \cdot 10^{-3}$$

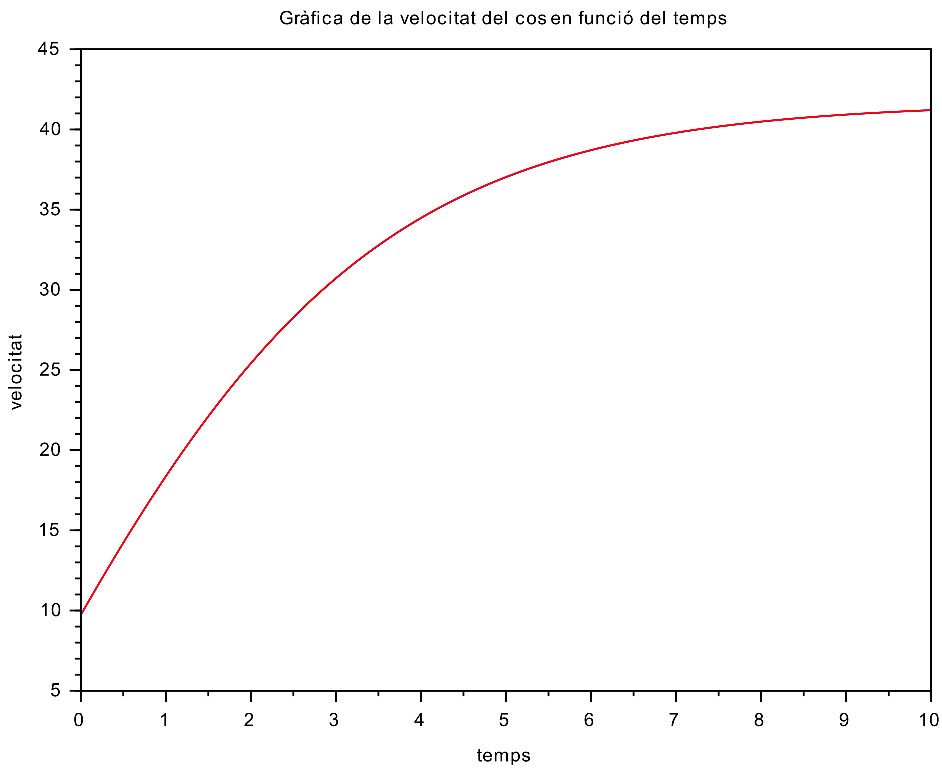
Si substituïm el valor obtingut a l'equació on hem aïllat l'acceleració ens queda:

$$a = g - (5,65056 \cdot 10^{-3})v^2$$

$$\ddot{x} = g - (5,65056 \cdot 10^{-3})\dot{x}^2$$

Finalment, implementem el mètode d'Euler millorat a Scilab amb les condicions donades pel problema. Com a resultat obtenim una matriu de 1001x2 elements que conté la posició i la velocitat del cos. Donat que en aquest problema se'ns pregunta el valor de la velocitat a $t = 10s$, fem la gràfica de la velocitat del cos estudiat en funció del temps (fig. 25). En la gràfica compararem la corba obtinguda amb el mètode d'Euler millorat, en vermell, amb la corba obtinguda amb la funció ODE de Scilab, en blau.

Figura 25:



Comprovem que les dues corbes calculades gairebé no es distingeixen. Així, la corba calculada amb el mètode d'Euler millorat ens dóna un resultat similar al de la realitat. En definitiva, hem conseguit una aproximació amb un error tolerable amb un mètode d'ordre 2 i un pas suficientment petit.

Anem ara a respondre les qüestions que ens planteja el problema. El primer apartat del problema ens demana la velocitat a $t = 10s$, si establim el temps màxim a deu segons, l'últim element de la matriu solució ens dóna la velocitat demanada. El seu valor és:

$$t = 10 \quad s \qquad \rightarrow \qquad v = 41.20006 \quad m/s$$

En el segon apartat se'ns demana el temps que tardarà a assolir el noranta-nou per cent de la seva velocitat terminal si ara la velocitat inicial és nul·la. Per tal de resoldre-ho, establim la nova condició inicial i busquem quan la velocitat és la demanda.

Primer, calculem la velocitat demanada:

$$\frac{99}{100} \quad de \quad v_{terminal} = \quad \frac{99}{100} \quad de \quad 41,\hat{6} = \quad 41,25 \quad m/s$$

I, finalment, trobem el temps per arribar a aquesta velocitat que té el valor següent:

$$v = \quad 41,25 \quad m/s \quad \rightarrow \quad t = 11,25 \quad s$$

5 Conclusions

Després de la realització d'aquest treball de recerca i de les moltes hores dedicades vull subratllar l'aprenentatge que m'ha suposat, tot i les grans dificultats amb què m'he anat trobant, tant a nivell de conceptes nous i abstractes com a nivell de programació.

En el moment d'iniciar el treball ens vam adonar que no seria una feina fàcil. La proposta que se'ns va presentar a la UPC englobava molts conceptes que no estaven inclosos en el currículum de batxillerat. Això suposaria, per exemple, començar a treballar amb derivades, integrals, equacions diferencials i mètodes numèrics, entre d'altres. Conceptes difícils d'assimilar i que tot hi haver-hi estat treballant durant els darrers mesos, puc dir que costa fer-se'n del tot capaç. D'altra banda hi havia el tema de la programació, totalment desconeguda per mi, i que va suposar un repte molt important, infinites hores de recerca d'errors i d'entendre per què les coses no acabaven de funcionar. A més a més, els tutors em varen aconsellar fer-ho amb LaTex un editor de textos amb un llenguatge de programació propi. El seu aprenentatge tampoc va ser fàcil.

De totes maneres, puc afirmar que hem anat resolent els diferents entrebancs, i una vegada vists els resultats, els coneixements apresos i la dimensió del món que se m'ha obert per davant bé han valgut tot els esforços dedicats. De fet, a mesura que ens endinsàvem en el projecte, la curiositat i les ganes d'aprendre han sigut una constant i un motor.

Per altra banda, podem dir que hem assolit els objectius que ens havíem proposat inicialment i també hem anat resolent de forma satisfactòria els que ens hem marcat a mesura que el treball avançava, com és el cas, per exemple, de la comprovació de la segona llei de Kepler, gens trivial de programar. Potser ens hauria agradat poder incloure alguns problemes d'aplicació al món real una mica més complexos, però això ho deixarem, de moment, per la universitat.

En conjunt valorem positivament el treball realitzat després de gairebé deu mesos de feina. L'aprenentatge de mètodes numèrics per a resoldre equacions diferencials, per a calcular integrals de les que desconeixem la funció analítica, l'avaluació de les solucions obtingudes i l'anàlisi de l'error comès,... tot plegat ha sigut molt enriquidor. A més, durant el desenvolupament del treball, hem sigut conscients de la importància de les equacions diferencials en el món que ens envolta, de la gran aplicació en els diferents àmbits de la vida. Hem vist que els mètodes numèrics tenen un paper clau en tots els problemes que afectin la vida de l'ésser humà on s'hagi de saber amb precisió el resultat. Així aquest mètodes ens permeten saber una estimació del resultat sense haver de realitzar cap prova biològica, química o física a escala real.

Per últim, però no menys important, cal afegir que el fet d'escriure el treball en codi LaTex m'ha aportat una noció bàsica d'aquest editor de textos. Les seves característiques m'han permès introduir fórmules i equacions matemàtiques més fàcilment, és per aquesta raó que LaTex és el format majoritàriament utilitzat per a la redacció de documents científics.

En conclusió, puc dir matemàticament parlant que la suma de les hores, l'esforç i les ganes han donat lloc a un aprenentatge de conceptes, a la descoberta d'un nou món i a clarificar cap a quina direcció enfocar el meu futur. Realment vull agrair l'oportunitat que m'ha suposat aquest treball d'aprendre i reconèixer que he gaudit d'una experiència molt profitosa que s'ha traduït en satisfacció en veure el resultat del treball.

6 Bibliografia i webgrafia

Per realitzar aquest treball, s'ha extret informació de les següents fonts:

Llibres:

- PAUL ALLEN, TIPLER; GENE, MOSCA. *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1: mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica.* Editorial Reverté, cinquena edició, 2005.
- M.J. MARTINEZ. *Física 2, Segon de batxillerat.* Vicens Vives, 2009.

Pàgines web:

- `https://mat-web.upc.edu/people/carles.batlle/apunts/apuntsEQDI.pdf`
- `https://portal.camins.upc.edu/materials_guia/250224/2013/EDOs.pdf%3Bjsessionid=EAC8C594F98A56006DFED081A6861936`
- `https://ca.wikipedia.org/wiki/M%C3%A8tode_d%27Euler`
- `https://ca.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Taylor`
- `http://www.scilab.org/`

7 Annexos

Annex I: Programació de la resolució del cas 0 mitjançant la funció ODE de Scilab.

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(3);
   yprim(2)=y(4) ;
   yprim(3)=-y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
   yprim(4)=-y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
endfunction
t0=0; tmax=6.30; h=0.01;
t=t0:h:tmax;
y0=[1,0]; yprim0=[0,0.6];
y=ode([y0;yprim0],t0,t,f);
// y conte la solució de l'equació diferencial
// tot el que ve ara és per destriar el resultat
a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      posiciox2(index1)=y(1,i)^2;
      posicioy(index1)=y(2,i);
      posicioy2(index1)=y(2,i)^2;
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      velocitatx2(index2)=y(1,i)^2;
      velocitaty(index2)=y(2,i);
      velocitaty2(index2)=y(2,i)^2;
      index2=index2+1;
   end
end;
modulposicio=posiciox2+posicioy2;
modulvelocitat=velocitatx2+velocitaty2;
clf; plot(t,velocitatx)
scf(1);
plot(t',modulposicio);
plot(0,0);
plot(t',modulvelocitat);
plot(0,0);
```

Annex 2: Programació de la comprovació de la segona llei de Kepler.

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(3);
   yprim(2)=y(4) ;
   yprim(3)=-y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
   yprim(4)=-y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
endfunction
t0=0; tmax=6.30;
t=t0:0.01:tmax;
y0=[1,0]; yprim0=[0,0.8];
y=ode([y0;yprim0],t0,t,f);
// y conte la solució de l'equació diferencial
// tot el que ve ara és per destriar el resultat
a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      posiciox2(index1)=y(1,i)^2;
      posicioy(index1)=y(2,i);
      posicioy2(index1)=y(2,i)^2;
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      velocitatx2(index2)=y(1,i)^2;
      velocitaty(index2)=y(2,i);
      velocitaty2(index2)=y(2,i)^2;
      index2=index2+1;
   end
end;
modulposicio=posiciox2+posicioy2;
modulvelocitat=velocitatx2+velocitaty2;
//clf; plot(t,velocitatx)
clf;
scf(0);
plot(posiciox,posicioy);
title('ÒRBTIA EL·LÍPTICA ON a=0,8')
xlabel('posició x')
ylabel('posició y')
scf(1);
plot(t',modulposicio,'r');
plot(0,0);
plot(t',modulvelocitat,'b');
```

```
plot(0,0);
ylabel('mòdul de la posició/ mòdul de la velocitat')
xlabel('temps')
title('Gràfic del mòdul de la velocitat i el mòdul de la posició en funció del temps')
legend('Mòdul de la posició','Mòdul de la velocitat')
posicio=posiciox;
posicio(:,2)=posicioy;

a=size(posicio);
index1=2;
canvi_signe(1)=1;
for j = 1:(a(1)-1)
    producte2=posicio(j,1)*posicio(j+1,1);
    producte1=posicio(j,2)*posicio(j+1,2);
    if (producte2<0) then
        canvi_signe(index1)=j;
        index1=index1+1;
    end
    if (producte1<0) then
        canvi_signe(index1)=j;
        index1=index1+1;
    end
end;
a=size(canvi_signe)
if a(1,1)<5 then
    disp("Necessitem mes temps")
    else
    npuntsquadrant(1)=canvi_signe(2)-canvi_signe(1);
    npuntsquadrant(2)=canvi_signe(3)-canvi_signe(2);
    npuntsquadrant(3)=canvi_signe(4)-canvi_signe(3);
    npuntsquadrant(4)=canvi_signe(5)-canvi_signe(4);

    npuntscalculararea=int(min(npuntsquadrant)/3);
end

//comprovem la segona llei de Kepler
//PRIMER QUADRANT
k=npuntscalculararea-1;
index1=1;
areatriangle(1)=0;
for j=1:3
   areatram=0;
   for i=1:(npuntscalculararea-1)
      areatram=areatram+abs(0.5*(posiciox(i+((j-1)*k)) -posiciox(i+1+((j-1)*k)))
*(posicioy(i+1+((j-1)*k))+posicioy(i+((j-1)*k))));

end
```

```
    areatriangle(j+1)=abs(posiciox(i+1+(j-1)*k)*posicioy(i+1+(j-1)*k)*0.5);
    area(index1)=areatram+abs(areatriangle(j+1))-abs(areatriangle(j));
    index1=index1+1;
end

//SEGON QUADRANT
areatriangle(1)=0;
for j=1:3
  areatram=0;
   for i=canvi_signe(2)+1:(canvi_signe(2)+npuntscalcularea-1)
     areatram=areatram+abs(0.5*(posiciox(i+((j-1)*k)) -posiciox(i+1+((j-1)*k)))
*(posicioy(i+1+((j-1)*k))+posicioy(i+((j-1)*k))));

end
  areatriangle(j+1)=abs(posiciox(i+1+(j-1)*k)*posicioy(i+1+(j-1)*k)*0.5);
    area(index1)=areatram-abs(areatriangle(j+1))+abs(areatriangle(j));
    index1=index1+1;
end

//TERCER QUADRANT
areatriangle(1)=0;
for j=1:3
  areatram=0;
   for i=canvi_signe(3)+1:(canvi_signe(3)+npuntscalcularea-1)
     areatram=areatram+abs(0.5*(posiciox(i+((j-1)*k)) -posiciox(i+1+((j-1)*k)))
*(posicioy(i+1+((j-1)*k))+posicioy(i+((j-1)*k))));

end
  areatriangle(j+1)=abs(posiciox(i+1+(j-1)*k)*posicioy(i+1+(j-1)*k)*0.5);
    area(index1)=areatram+abs(areatriangle(j+1))-abs(areatriangle(j));
    index1=index1+1;
end

//QUART QUADRANT
areatriangle(1)=0;
for j=1:3
  areatram=0;
   for i=canvi_signe(4)+1:(canvi_signe(4)+npuntscalcularea-1)
     areatram=areatram+abs(0.5*(posiciox(i+((j-1)*k)) -posiciox(i+1+((j-1)*k)))
*(posicioy(i+1+((j-1)*k))+posicioy(i+((j-1)*k))));

end
  areatriangle(j+1)=abs(posiciox(i+1+(j-1)*k)*posicioy(i+1+(j-1)*k)*0.5);
    area(index1)=areatram-abs(areatriangle(j+1))+abs(areatriangle(j));
    index1=index1+1;
end
```

Annex 3: Programació de la resolució de l'equació diferencial mitjançant el mètode d'Euler.

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(3);
   yprim(2)=y(4) ;
   yprim(3)=-y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
   yprim(4)=-y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
endfunction
t0=0; tmax=6.30; h=0.01;
t=t0:h:tmax;
y0=[1,0]; yprim0=[0,0.6];
y=ode([y0;yprim0],t0,t,f);
// y conte la solució de l'equació diferencial
// tot el que ve ara és per destriar el resultat

a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      posiciox2(index1)=y(1,i)^2;
      posicioy(index1)=y(2,i);
      posicioy2(index1)=y(2,i)^2;
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      velocitatx2(index2)=y(1,i)^2;
      velocitaty(index2)=y(2,i);
      velocitaty2(index2)=y(2,i)^2;
      index2=index2+1;
   end
end;
modulposicio=posiciox2+posicioy2;
modulvelocitat=velocitatx2+velocitaty2;
clf; plot(t,velocitatx)

scf(1);
plot(t',modulposicio);
plot(0,0);
plot(t',modulvelocitat);
plot(0,0);

// Ara anem a resoldre la nostre equació mitjançant el mètode d'Euler
```

```
// la funció ens serveix igual.
// condicions inicials
X(1,:)=[1,0,0,1];
for (j=2:tmax/h)
   X(j,:)=X(j-1,:)+h*f(,X(j-1,:))';
end
clf;
scf(0);
plot(posiciox,posicioy,'r');
plot(X(:,1),X(:,2));
title('ÒRBITES PROPORCIONADES PEL MÈTODE D"EULER I PER LA FUNCIÓ ODE
DE SCILAB');
xlabel('posició x');
ylabel('posició y');
legend('Funció ODE de Scilab','Mètode d"Euler');
```

Annex 4: Programació de la resolució de l'equació diferencial mitjançant el mètode d'Euler millorat.

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(3);
   yprim(2)=y(4) ;
   yprim(3)=-y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
   yprim(4)=-y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
endfunction
t0=0; tmax=6.30; h=0.01;
t=t0:h:tmax;
y0=[1,0]; yprim0=[0,0.6];
y=ode([y0;yprim0],t0,t,f);
// y conte la solució de l'equació diferencial
// tot el que ve ara és per destriar el resultat

a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      posiciox2(index1)=y(1,i)^2;
      posicioy(index1)=y(2,i);
      posicioy2(index1)=y(2,i)^2;
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      velocitatx2(index2)=y(1,i)^2;
      velocitaty(index2)=y(2,i);
      velocitaty2(index2)=y(2,i)^2;
      index2=index2+1;
   end
end;
modulposicio=posiciox2+posicioy2;
modulvelocitat=velocitatx2+velocitaty2;
clf; plot(t,velocitatx)

scf(1);
plot(t',modulposicio);
plot(0,0);
plot(t',modulvelocitat);
plot(0,0);

// Ara anem a resoldre la nostre equació mitjançant el mètode d'Euler millorat
```

```
// la funció ens serveix igual.
// condicions inicials
X(1,:)=[1,0,0,1];
for (j=2:tmax/h)
    X(j,:)=X(j-1,:)+h*f(,X(j-1,:))';
    X(j,:)=X(j-1,:)+h*(f(,X(j-1,:))'+f(,X(j,:))')/2;

 end
clf;
scf(0);
plot(posiciox,posicioy,'r');
plot(X(:,1),X(:,2));
title('ÒRBITES PROPORCIONADES PEL MÈTODE D"EULER MILLORAT I PER LA
FUNCIÓ ODE DE SCILAB');
xlabel('posició x');
ylabel('posició y');
legend('Funció ODE de Scilab','Mètode d"Euler millorat');
```

Annex 5: Programació de la resolució de l'equació diferencial mitjançant el polinomi de Taylor de grau 2.

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(3);
   yprim(2)=y(4) ;
   yprim(3)=-y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
   yprim(4)=-y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5;
endfunction
t0=0; tmax=6.30; h=0.01;
t=t0:h:tmax;
y0=[1,0]; yprim0=[0,1];
y=ode([y0;yprim0],t0,t,f);
// y conte la solució de l'equació diferencial
// tot el que ve ara és per destriar el resultat

a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      posiciox2(index1)=y(1,i)^2;
      posicioy(index1)=y(2,i);
      posicioy2(index1)=y(2,i)^2;
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      velocitatx2(index2)=y(1,i)^2;
      velocitaty(index2)=y(2,i);
      velocitaty2(index2)=y(2,i)^2;
      index2=index2+1;
   end
end;
// Ara anem a resoldre la nostre equació diferencial mitjançant el polinomi de Taylor de grau
2
// la funció ens serveix igual.
// condicions inicials
X(1,:)=[1,0,0,1];
for (j=2:tmax/h)
   X(j,:)=X(j-1,:)+h*f(,X(j-1,:))';
   X(j,:)=X(j-1,:)+h*f(,X(j-1,:))'+h*(f(,X(j,:))'-f(,X(j-1,:))')/2;

 end
```

```
clf;
scf(0);
plot(posiciox,posicioy,'r');
plot(X(:,1),X(:,2));
title('ÒRBITES OBTINGUDES AMB EL POLINOMI DE TAYLOR DE SEGON GRAU I LA FUNCIÓ ODE DE SCILAB');
xlabel('posició x');
ylabel('posició y');
legend('Òrbita de la funció ODE de scilab','Òrbita del polinomi de Taylor de segon grau');
```

Annex 6: Programació del control de l’error.

```
// calculem errors acumulats
// considerem només l'error en la posició
error_posicio_max=0;
for i = 1:(a(2)-1)/2
    error_posicio=(posiciox(i)-X(i,1))^2+(posicioy(i)-X(i,2))^2;
    if (error_posicio>error_posicio_max)
        error_posicio_max=error_posicio;
    end
end
error_posicio_max=sqrt(error_posicio_max);
```

Annex 7: Programació de la resolució del problema 1

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=y(2);
   yprim(2)=9.81-(0.00565056)*(y(2))^2 ;
endfunction
t0=0; tmax=10; h=0.01;
t=t0:h:tmax;
y0=[0,9.722222222];
y=ode([y0],t0,t,f);

a=size(y);
index1=1;
index2=1;
for i = 1:a(2)
   if (i/2-int(i/2))>0 then
      posiciox(index1)=y(1,i);
      index1=index1+1;
   else
      velocitatx(index2)=y(1,i);
      index2=index2+1;
   end
end;

X(1,:)=[0,9.722222222];
for (j=2:tmax/h)
   X(j,:)=X(j-1,:)+h*f(,X(j-1,:))';
   X(j,:)=X(j-1,:)+h*(f(,X(j-1,:))'+f(,X(j,:))')/2;
end

scf(0);
plot(t,velocitatx);
plot(t,X(:,2),'r');
title('Gràfica de la velocitat del cos en funció del temps');
xlabel('temps');
ylabel('velocitat');
```