



**Xarxes complexes i
models de difusió
d'epidèmies**

BOLZANO

AGRAIMENTS

M'agradaria agrair la col·laboració en aquest treball de recerca especialment al meu tutor que ha estat molt pacient i amable durant tot el treball.

També m'agradaria agrair la seva col·laboració a l'AMP i en DRS, ambdós estudiants de matemàtiques a la Universitat de Barcelona, per la seva col·laboració desinteressada. Realment són un exemple de cordialitat per la seva bona voluntat.

Tanmateix m'agradaria donar les gràcies a la meva família, per recolzar-me sempre en els moments de dificultat, i als meus amics, perquè sempre estan disposats a treure'm un somriure en els moments més complicats.

INDEX DE CONTINGUTS

1. INTRODUCCIÓ	8
2. TEORÍA DE GRAFS	10
2.1. Definició	10
2.2. Tipus de grafs	10
2.3. Representació matemàtica d'un graf.....	11
2.3.1. Matriu d'adjacència.....	11
2.3.2. Llista d'adjacència	11
3. XARXES COMPLEXES	12
3.1. Sistemes complexos	12
3.2.1. Coeficient d'agrupament o clustering (C)	13
3.2.2. Diàmetre (L).....	13
3.2.3. Distribució de grau [P(k)]	14
3.3. Tipus de xarxes complexes.....	14
3.4. Estudi de xarxes socials: Mesures de centralitat	15
3.4.1. Centralitat de grau (Degree centrality)	15
3.4.2. Centralitat de proximitat (Closeness centrality)	15
3.4.3 Centralitat d'intermediació (Betweness centrality)	15
3.5. Facebook: Xarxa social Orquestra Jove de La Selva	16
4. XARXES ALEATORIES	20
4.1. Erdős i Rényi	20
4.2. Propietats de les xarxes aleatòries.....	20
4.2.1. Coeficient de Clustering i diàmetre.....	20
4.2.2. Distribució de grau	20
4.2.3. Evolució de la distribució de grau en funció de la probabilitat de connexió	3
4.3. Percolació	23
4.3.1. Concepte de percolació.....	23
4.3.2. Simulació del fenomen de percolació	24
4.3.3. Simulació de la propagació d'un incendi forestal	25

5. XARXES DE MÓN PETIT.....	27
5.1. Introducció	27
5.2. Sis graus de separació	27
5.3. Model de Watts i Strogatz.....	28
5.4. Propietats de les xarxes de món petit.....	29
5.4.1. Coeficient de Clustering i diàmetre.....	29
5.4.2. Distribució de grau	32
5.4.2.1. Distribució Exponencial	32
5.4.2.2. Distribució Lliure d'Escala: Model de Barabasi - Albert	33
5.4.2.2.1. Simulació d'una xarxa lliure d'escala	34
5.4.2.2.2. Problemes del model de Barabasi – Albert.....	35
5.4.2.2.3. Propietats de les xarxes lliures d'escala.....	37
5.5. Exemples	38
5.5.1. Mutacions genètiques.....	38
5.5.2. Xarxes tròfiques	38
5.5.3. Difusió d'epidèmies.....	38
5.6. Hubs i xarxes socials: Anàlisi de la xarxa social Facebook.....	40
6. MODELS EPIDÈMICS	42
6.1. Introducció	42
6.2. Models determinístics.....	43
6.2.1. Model SIR	43
6.2.2. Model SIR: Simulació a la ciutat de La Glòria.....	43
6.3 Models estocàstics o probabilístics.....	48
6.4. Difusió d'epidèmies.....	50
6.4.1. Global epidemic model (GEM)	51
6.4.2. TranStat.....	51
6.4.3. STEM (Spatio Temporal Epidemic Modeler)	51
6.5 TRANSMISSIÓ D'UNA MALALTIA PER LA XARXA AÈRIA.....	52
6.5.1. Objectiu	52
6.5.2. Probabilitat de viatjar.....	52
6.5.3. Probabilitat d'infecció	53
6.5.4. Probabilitat de transmissió	55
6.6. MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES.....	57
6.6.1. Simulació sense restriccions de viatge	57

6.6.2 Simulació amb restriccions de viatge.....	60
7. CONCLUSIONS	62
8. BIBLIOGRAFIA.....	64
9. ANNEXOS.....	66 a 72

1. INTRODUCCIÓ

El sistema elèctric és un dels elements més importants de la civilització moderna. Constituint per una enorme xarxa de centrals, subestacions elèctriques i cables d'alta tensió que els connecten entre si, es distribueix pel territori d'un país o d'un continent.

El 23 de juliol de 2007 es va produir una gran apagada elèctrica a Barcelona. L'accident va ser responsabilitat de dues empreses que operen a Catalunya, ENDESA com a distribuïdora i REE (Red Eléctrica Española) com a gestora de la distribució d'electricitat. L'origen de l'incident va ser la caiguda d'un cable elèctric sobre la subestació elèctrica de Collblanc.

Com sol ser habitual en aquests casos, ambdues companyies es van acusar de ser la causa primera de l'incident. Tot fa pensar que una successió de petits incidents a la xarxa de distribució de REE va produir sobreescalfament i vibracions en els conductors elèctrics i la posterior caiguda del cable. Aquest tipus de succés no és inhabitual, però en aquest cas, el fet diferencial de caure sobre una subestació, va produir tres curtcircuits successius, la fallida de sis subestacions i l'incendi de dos transformadors situats a l'Avinguda de Josep Tarradellas i el Passeig Joan Maragall. Com a conseqüència les línies d'alta tensió es van desconnectar, generant incidents posteriors en cadena.

El cert és que l'estructura de la xarxa de distribució elèctrica a Barcelona no podia evitar deixar als abonats sense subministrament en cas de problemes en una determinada subestació. L'informe de conclusions de la "Comisión Nacional de la Energía" (octubre de 2007) afirmava que "el disseny de les infraestructures elèctriques de transport i distribució no permetien una ràpida recuperació del subministrament i que en el disseny de la xarxa de distribució no s'havien entès adequadament les interdependències existents en el sistema global".

El problema dels sistemes com la xarxa de distribució elèctrica és que estan formats per multitud de components dels quals es coneix el seu funcionament individual però que poden tenir un comportament col·lectiu en ocasions caòtic i, fins i tot, destructiu. Això és el que va succeir a la gran apagada que es descrivia anteriorment: amb l'avaria inicial, la probabilitat de que sorgissin danys posteriors va augmentar i, un cop aquests es van produir, va augmentar el risc d'avaries posteriors.

L'exemple anterior ens permet plantejar una pregunta: Com és possible que la reunió dels components que formaven la xarxa de distribució es tradueix en quelcom completament diferent al seu funcionament esperat considerats de forma separada? O, més ben dit: **De quina manera s'associen els comportaments individuals per donar lloc a un comportament col·lectiu?**

L'estudi de les xarxes té el seu origen en el cèlebre problema dels set ponts de Königsberg resolt per Leonard Euler (1736) i és actualment una part de les matemàtiques en ple desenvolupament. La majoria de xarxes biològiques (xarxes tròfiques, xarxes neuronals, genoma, epidemiologia), socials (xarxes socials) i tecnològiques (xarxes elèctriques, xarxes d'ordinadors, difusió de virus informàtics) són no trivials i, en conseqüència, complexes des d'un punt de vista estructural i dinàmic. L'objectiu d'aquest treball és analitzar aquest tipus de

xarxes, anomenades **xarxes complexes**, les quals estan constituïdes per un nombre molt elevat de nodes i arestes que interactuen entre si, constituint un **sistema complex**.

Atès el meu interès per la biologia i la medicina, al llarg del text es fa referència a qüestions que relacionen aquestes disciplines científiques amb les xarxes complexes i, en particular, amb la difusió d'epidèmies, com a part pràctica d'aquest treball de recerca. Més concretament, la pràctica ha consistit en la creació de dos models matemàtics que permetin pronosticar l'evolució d'una epidèmia a través de la seva difusió per la xarxa aèria.

2. TEORÍA DE GRAFS

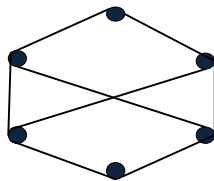
Els estudis d'Euler van iniciar una nova branca de les matemàtiques anomenada **TEORIA DE GRAFS**, que avui en dia té nombroses aplicacions que, tal com deia a la introducció, que van des de l'enginyeria a les ciències socials.

2.1. Definició

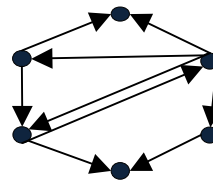
Un graf (G) és un conjunt de nodes ($V_1...V_N$) on les parelles de nodes interactuen de manera ordenada. Cada parell de nodes (V_i, V_j) rep el nom d'aresta. El nombre de nodes, vèrtexs, s'anomena ordre del graf i el conjunt d'arestes, parells ordenats, es denomina mida del graf. Matemàticament, un graf (G) és un conjunt de nodes (V) i parells ordenats (A).

$$G = (V, A)$$

Es consideren dos tipus de grafs, depenent de si la interacció entre els nodes és o no és recíproca. Quan la interacció és recíproca estarem parlant d'un **graf no dirigit**. En els grafs no dirigits la interacció succeeix ambdós sentits, si A interacciona amb B, B ho fa amb A, com seria el cas de les xarxes sexuals o socials. En canvi, en els **grafs dirigits** la interacció no és recíproca. Aquest seria el cas de la xarxa de contagis d'una malaltia com la grip, si el pacient A contagia al pacient B llavors B no contagia a A.



Graf no dirigit



Graf dirigit

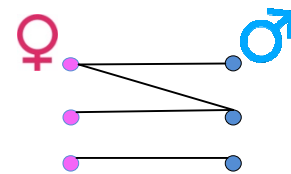
2.2. Tipus de grafs

Un **graf simple** és un graf que ni compta amb bucles, arestes que connectin un vèrtex amb si mateix, ni és un multigraf, és a dir no té múltiples arestes connectant dos mateixos nodes.

Un **graf regular** és un graf en el qual tots els vèrtex tenen el mateix grau k , és a dir, tots els nodes estan connectats als mateix nombre de nodes.

Un **graf complet** és un graf simple el qual compta amb arestes unint tots els vèrtex de la xarxa, és a dir, tots els nodes estan connectats entre ells. Això també implicarà que tots els nodes tindran el mateix grau ($K = N - 1$, on 1 serà ell mateix).

Un **graf bipartit** es un graf en el qual els seus vèrtex es poden separar en dos conjunts. Els vèrtex d'un conjunt no poden connectar amb els del seu mateix grup, sinó únicament amb els de l'altre conjunt. Matemàticament parlariem de $G = (V_1 \cup V_2, A)$. Un exemple d'aquest tipus de graf seria una xarxa sexual heterosexual, en la qual V_1 designaria un sexe i V_2 el contrari, com se'ns mostra al gràfic adjunt.



Graf bipartit

Un **graf connex** és un graf en el qual cada parell de vèrtexs està connectat per un camí.

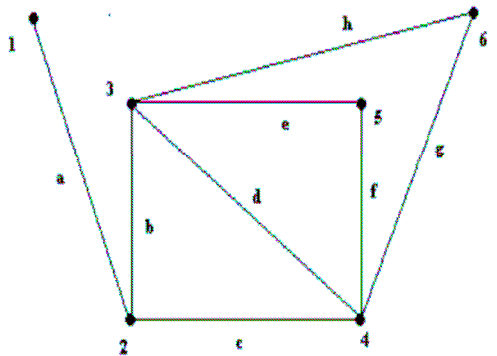
Un **graf no connex** és un graf que no té almenys un camí que uneixi cada parell de nodes. En aquest cas es formaran illes, grups de nodes connectats entre si però no amb la resta de la xarxa.

2.3. Representació matemàtica d'un graf

Hi ha dues formes de representar matemàticament un graf:

2.3.1. Matriu d'adjacència

El conjunt d'arestes es representa mitjançant una matriu de manera que $M(i,j)=1$ si existeix una arista que connecta el node "i" amb el node "j". Si el graf és no dirigit, la matriu d'adjacència serà simètrica, atès que $M(i,j)=M(j,i)$ per a i,j qualsevol.



En el graf de l'exemple la matriu d'adjacència és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Llista d'adjacència

Per a cada node del graf es construeix una llista de les arestes que parteixen del node. Si el graf és no dirigit, llavors cada arista (v,w) es trobarà representada dues vegades, a la llista del node "v" i a la llista del node "w".

Per al graf anterior, la llista d'adjacència és:

```

1 -> 2
2 -> 1 -> 3 -> 4
3 -> 2 -> 4 -> 5 -> 6
4 -> 2 -> 3 -> 5 -> 6
5 -> 3 -> 4
6 -> 3 -> 4

```

La utilització d'una o altra forma de representació depèn del context, ara bé, les llistes d'adjacència faciliten els càlculs en els algorismes informàtics.

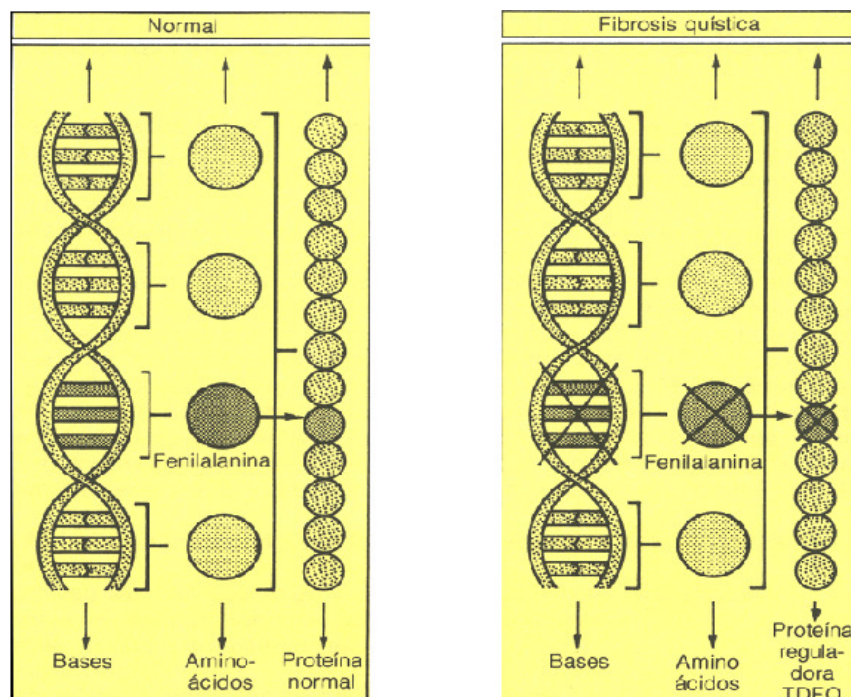
3. XARXES COMPLEXES

3.1. Sistemes complexos

Un sistema complex és un sistema que té les següents característiques:

- Està compost per moltes parts que interactuen entre si.
- Cada part del sistema té la seva pròpia estructura interna i està encarregada d'efectuar una funció específica definida.
- El que passi en una part del sistema pot afectar de manera **altament no lineal** a tot el sistema. Això vol dir que el que passi en una part del sistema no es pot expressar com una suma dels comportaments de les altres parts.
- Presenten comportament emergents, de manera que el tot no és la simple suma de les seves parts.

Un exemple molt clar és el genoma humà. La seva seqüenciació ha posat de manifest que el codi base de la vida humana consta només d'uns 3000 gens. Llavors, com és possible la complexitat de la biologia humana? Certament, no procedeix de la complexitat dels elements individuals ja que les característiques genètiques expressades per un sol gen són molt escasses. La realitat és que els gens, interactuant entre si, generen una complexitat gairebé il·limitada. Així, per exemple, les cèl·lules tenen parts que responen de forma no lineal a perturbacions externes, de manera que, en ocasions, la mutació d'un sol gen pot tenir efectes fatals, generant una malaltia que sorgeix com a conseqüència del comportament col·lectiu de tots els components de la cèl·lula.



La mutació d'un sol aminoàcid, el mostrat a la imatge, és la causant de la fibrosi quística.

<http://www.fqandalucia.org/>

3.2. Caracterització de les xarxes complexes

Quan estudiem una xarxa complexa ho hem de fer des de dos punts de vista: estructural i dinàmicament. L'estudi dinàmic es refereix al comportament de la xarxa a mesura que s'afegeixen nous nodes que es connecten amb els ja existents i l'estudi estructural calcula determinats paràmetres de la xarxa en un instant concret per estudiar les seves característiques de connectivitat.

Per tal de caracteritzar una xarxa complexa **des d'un punt de vista estructural** hem d'estudiar els següents paràmetres:

3.2.1. Coeficient d'agrupament o clustering (C)

Definim el coeficient de clustering com la probabilitat que dos nodes connectats directament a un tercer node estiguin connectats entre si.

$$C_i = \frac{2|\{\hat{e}_{j,k}\}|}{k_i(k_i-1)}$$

- $|\{\hat{e}_{j,k}\}|$ és el nombre d'arestes que connecten entre si nodes amb els que v_i està connectat.
- k_i és el grau de v_i , és a dir el nombre de vèrtex amb que interactua.

Equació del coeficient de clustering per nodes en grafs no dirigits.

El **coeficient de clustering de la xarxa** es calcula realitzant la mitjana entre els coeficients d'agrupament de tots els vèrtexs de la xarxa.

$$C = \frac{1}{N} \sum C_i$$

- N és el sumatori del valor dels coeficients d'agrupament de tots els nodes.

Equació del coeficient de clustering de la xarxa.

El coeficient de clustering és una **mesura local** per a cadascun dels nodes de la xarxa. Per a un node concret, el valor del coeficient de clustering oscil·la entre 0 (no es formen triangles) i 1 (graf complet). Quan el valor és 0 no es formen triangles, això significa que en cap triplet de nodes de la xarxa succeeix que dos nodes connectats a un tercer no es connecten entre ells. Quan més proper a 1 sigui el coeficient de clustering major serà la connectivitat del node dins la xarxa. Quan el valor és 1 trobem un graf complet, en què tots els nodes enllaçats a un node concret estan connectats, dos a dos, entre si.

3.2.2. Diàmetre (L)

El diàmetre és el promig de les longituds mínimes (L_{AB}) entre totes les possibles parelles de nodes de la xarxa.

3.2.3. Distribució de grau [P(k)]

La distribució de grau és la probabilitat que un node escollit a l'atzar tingui k connexions. Podríem definir-la doncs, matemàticament, com el nombre de nodes de grau k dividit entre el nombre total de nodes de la xarxa.

$$P(k) = \frac{n_k}{n}$$

Segons la forma en què variï n_k es poden classificar les xarxes complexes en diverses topologies. Són les següents:

Topologia de Poisson	$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
Topologia Exponencial	$P(k) = C e^{-\alpha k}$
Topologia Lliure d'Escala	$P(k) = C k^{-\gamma}$

3.2.4. Altres mesures

Una xarxa pot contenir grups de nodes connectats entre si però no amb la resta de la xarxa. Aquests grups es denominen "illes". En la caracterització estructural de les xarxes complexes també es tenen en compte:

- **Distribució de mida de les illes [P(s)]:** És la probabilitat de que una illa estigui formada per un nombre determinat de nodes (s).
- **Mida de l'illa més gran [S⁰⁰]**

3.3. Tipus de xarxes complexes

L'estudi conjunt d'aquests paràmetres permet classificar les xarxes complexes com s'indica a continuació:

CARACTERÍSTIQUES	XARXA ALEATÒRIA	XARXA LLIURE D'ESCALA	XARXA DE MÓN PETIT
Diàmetre	Petit	Petit-Mitjà	Petit
Coefficient de clustering	Petit	Gran	Gran
Distribució de grau	Binomial (Poisson)	Llei de potència (Lliure d'Escala)	Binomial aprx.
Presència de hubs	No	Si	No

3.4. Estudi de xarxes socials: Mesures de centralitat

Hi ha un altre conjunt de mesures, relacionades amb les xarxes socials, anomenades **mesures de centralitat** que determinen la importància d'un vèrtex dins d'una xarxa. Així, cal tenir en compte la rellevància d'una persona dins d'una xarxa social, atès que pot ser d'importància en els fluxos d'informació, la propagació de rumors, difusió de correus electrònics o, també, en la propagació d'una determinada malaltia.

En el cas de les malalties, un exemple paradigmàtic és l'anomenat "pacient zero" en la difusió de la SIDA. El "pacient zero" era en auxiliar de vol homosexual de Air Canada, anomenat Gaetan Dugas, que va tenir més de dues mil parelles sexuals i que va contribuir notablement a la difusió de la malaltia, tal i com es va demostrar a partir del VIH aïllat de la seva sang, la soca del qual es va trobar en quaranta malalts més distribuïts per tot el món i que havien tingut relacions sexuals amb ell.

Hi ha diverses mesures de centralitat. Les més importants són les següents:

3.4.1. Centralitat de grau (Degree centrality)

El grau és el nombre de veïns que té un determinat node de la xarxa. La centralitat de grau de cada node és igual al seu nombre de veïns i la centralitat de grau serà el promig de les centralitats de grau dels nodes de la xarxa.

3.4.2. Centralitat de proximitat (Closeness centrality)

És la distància promig d'un node respecte dels altres nodes de la xarxa. En termes matemàtics és l'invers de la suma de distàncies mínimes als altres nodes o diàmetre. Aquest paràmetre ens pot aportar una idea del que costaria difondre una informació des d'un node a qualsevol altre.

$$C = \frac{1}{L}$$

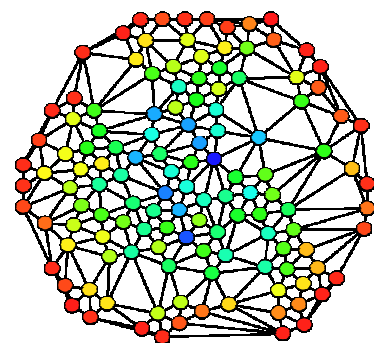
3.4.3 Centralitat d'intermediació (Betweenness centrality)

És una mesura que ens indica la freqüència amb la que un node apareix en el camí més curt que connecta altres dos nodes. Aquest paràmetre és important perquè un node amb elevada centralitat d'intermediació pot controlar el flux de la informació que es difon a través d'una xarxa.

En termes matemàtics, el valor de la centralitat d'intermediació d'un node n és el nombre de distàncies mínimes que uneixen dos nodes passant pel nodes n entre el nombre de distàncies mínimes que uneixen dos nodes.

$$C_B = \frac{L_{s,t}(n)}{L_{s,t}}$$

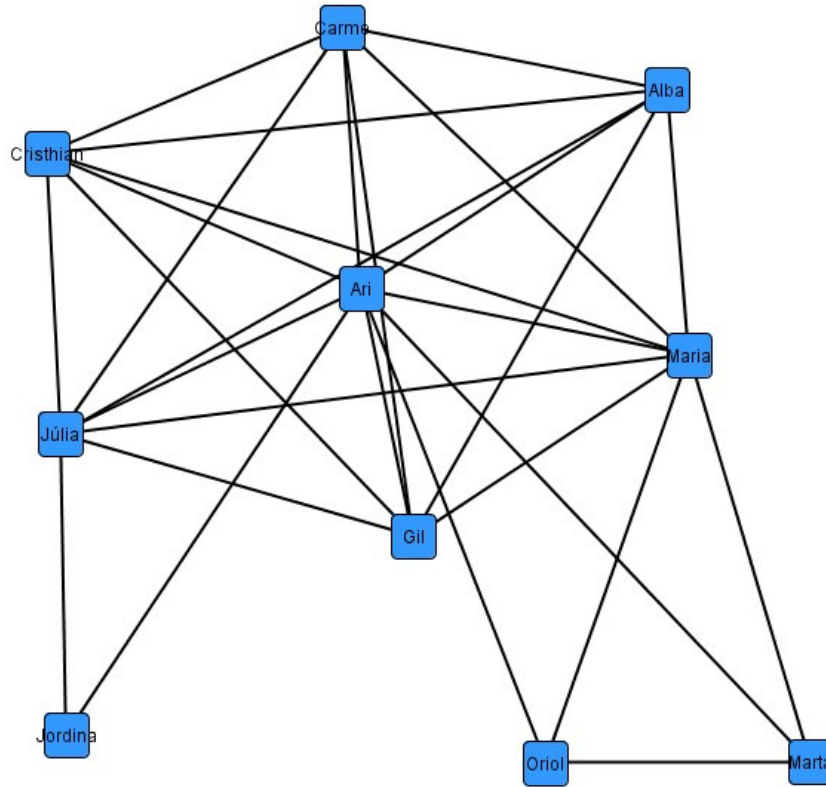
Un exemple de centralitat es pot observar en aquesta xarxa. La intermediació es gradua amb colors que van des del vermell, amb un grau baix d'intermediació, fins al blau amb un valor màxim.



<http://en.wikipedia.org/wiki/Centrality>

3.5. Facebook: Xarxa social Orquestra Jove de La Selva

La xarxa següent és una part del meu Facebook personal, en concret el que mostra els contactes que tinc amb components de la Orquestra Jove de la Selva¹, a la qual pertanyo. Sobre aquesta xarxa, he calculat els paràmetres que determinen les seves característiques matemàtiques, a fi i efectes d'exemplificar el seu càlcul.



Longitud mínima entre dos nodes (L_{AB})

$V_A \backslash V_B$	Cristian	Alba	Júlia	Ariadna	Maria	Gil	Jordina	Oriol	Marta	Carme
Cristian										
Alba	1									
Júlia	1	1								
Ariadna	1	1	1							
Maria	1	1	1	1						
Gil	1	1	1	1	1					
Jordina	2	2	1	1	2	2				
Oriol	2	2	2	1	1	2	2			
Marta	2	2	2	1	1	2	2	1		
Carme	1	1	1	1	1	1	2	2	2	

Longitud	Freqüència
1	28
2	17

¹ Aquest graf ha estat elaborat amb el programa Grafos v1.3.3 d'Alejandro Rodríguez Villalobos.

Longitud promig de la xarxa o diàmetre (L)

$$L = \frac{\text{Longitud} \cdot \text{Freqüència}}{\text{Suma de freqüències}} \quad L = \frac{1 \cdot 28 + 2 \cdot 34}{45} = 1,378$$

Densitat (d)

La densitat és la proporció entre les interaccions que s'estableixen entre els nodes i el màxim d'interaccions possibles a la xarxa. El nombre màxim d'interaccions s'aconsegueix realitzant un nombre combinatori.

$$d = \frac{n^{\circ} \text{ d'arestes}}{\binom{N}{2}} \quad d = \frac{28}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45} = 0,662$$

Coefficient d'agrupació o coeficient de clustering d'un node (C)

$$C_i = \frac{2|\{\hat{e}_{j,k}\}|}{k_i(k_i - 1)} \quad C_{\text{Carme}} = \frac{2 \cdot 15}{6(6 - 1)} = 1$$

$k_{\text{Carme}} = \{\text{Cristian, Júlia, Gil, Ariadna, Alba, Maria}\} \quad k_i = 6$

$\{\hat{e}_{j,k}\} = \{(\text{Cristian, Júlia}), (\text{Cristian, Gil}), (\text{Cristian, Ariadna}), (\text{Cristian, Alba}), (\text{Cristian, Maria})\}$
 $+ \{(\text{Júlia, Gil}), (\text{Júlia, Ariadna}), (\text{Júlia, Alba}), (\text{Júlia, Maria})\}$
 $+ \{(\text{Gil, Ariadna}), (\text{Gil, Alba}), (\text{Gil, Maria})\}$
 $+ \{(\text{Ariadna, Alba}), (\text{Ariadna, Maria})\}$
 $+ \{(\text{Alba, Maria})\} = 15 \text{ arestes}$

Procedint de forma anàloga per a la resta dels nodes, es pot demostrar:

Node	Carme	Cristian	Alba	Ari	Júlia	Gil	Maria	Jordina	Oriol	Marta
C_i	1	1	1	0.528	0.762	1	0.643	1	1	1

Coefficient d'agrupació o coeficient de clustering de la xarxa

$$C = \frac{1}{N} \sum C_i \quad C = \frac{1}{10} (1 + 1 + 1 + 0.528 + 0.762 + 1 + 0.645 + 1 + 1 + 1) = 0,894$$

Conclusions

Aquesta xarxa presenta un coeficient de clustering elevat i un diàmetre baix, per la qual cosa es pot classificar com una xarxa de món petit. Tanmateix, cal tenir en compte que el nombre de nodes de la xarxa és petit.

Centralitat de grau

El nombre de veïns o grau de cadascuna de les persones de la xarxa és el següent:

	Carme	Cristian	Alba	Ariadna	Júlia	Gil	Maria	Jordina	Oriol	Marta
Grau	6	6	6	9	7	6	8	2	3	3

La centralitat de grau promig de la xarxa serà igual al promig dels valors anteriors, és a dir 5,6. En aquesta xarxa el node més “popular” és el meu propi (Ariadna), cosa que no deixa de ser una qüestió òbvia, atès que es tracta de la meva xarxa personal. Tanmateix, la Maria té, també, un paper important com a element de connexió en el conjunt de la xarxa.

Centralitat de proximitat

El càlcul de la distància mínima entre dos vèrtexs qualssevol d’una xarxa pot resultar ser molt complex en xarxes amb un elevat nombre de nodes i arestes. En el cas de l’exemple es pot realitzar per simple observació. Tot i així, existeixen algorismes informàtics que ens permeten realitzar aquests càlculs amb relativa facilitat. En el nostre cas, els resultats obtinguts són els següents:

Matriu de distàncies mínimes (Càlculs realitzats amb UCINET)

N1\N2	Cristian	Alba	Júlia	Ariadna	Maria	Gil	Jordina	Oriol	Marta	Carme	SUMA	Centralitat de proximitat del node (%)
Cristian	0	1	1	1	1	1	2	2	2	1	12	8,33
Alba	1	0	1	1	1	1	2	2	2	1	12	8,33
Júlia	1	1	0	1	1	1	1	2	2	1	11	9,09
Ariadna	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	9	11,11
Maria	1	1	1	1	0	1	2	1	1	1	10	10,00
Gil	1	1	1	1	1	0	2	2	2	1	12	8,33
Jordina	2	2	1	1	2	2	0	2	2	2	16	6,25
Oriol	2	2	2	1	1	2	2	0	1	2	15	6,67
Marta	2	2	2	1	1	2	2	1	0	2	15	6,67
Carme	1	1	1	1	1	1	2	2	2	0	12	8,33
SUMA	12	12	11	9	10	12	16	15	15	12	Promig=	8,31

Aquesta matriu ens informa que l’Ariadna és el node més central a la xarxa, seguit de la Maria i la Júlia. Efectivament, jo estic connectada amb tots els meus companys de l’orquestra i tres persones, l’Oriol, la Jordina i la Marta que no són components de l’orquestra però que tenen coneguts dins d’ella. En el cas de la Jordina el nexa d’unió alternatiu a mi mateixa és la Júlia i en el cas de l’Oriol i la Marta és la Maria. Aquest fet explica els valors alts de la centralitat de proximitat per a la Júlia i la Maria.

Centralitat d’intermediació

A partir de la matriu anterior es pot calcular, també, el valors de la centralitat d’intermediació de cada node. En aquest cas és senzill, atès que només cal veure els camins d’ordre 2 entre dos nodes qualssevol i, tenint en compte que estic connectada amb tothom, participaré en qualsevol camí d’ordre 2.

En el cas per exemple de la Maria, per qualsevol camí d’ordre 2 en que intervingui ens trobarem amb que l’aportació al sumatori serà sempre 0,5.

$$C_B = \frac{L_{s,t}(n)}{L_{s,t}} \quad L_{s,t}(n) = 1 \quad L_{s,t} = 2 \quad C_B = \frac{1}{2}$$

Aquests camins d'ordre 2, en què intervé la Maria, són:

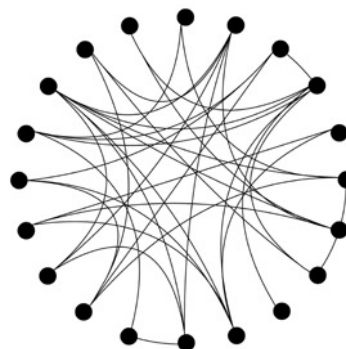
Cristian --(2)--> Oriol	=	Cristian, Ariadna, Oriol
	=	Cristina, Maria, Oriol
Cristian --(2)--> Marta	=	Cristian, Ariadna, Marta
	=	Cristian, Maria, Marta
Alba --(2)--> Oriol	=	Alba, Ariadna, Oriol
	=	Alba, Maria, Oriol
Alba --(2)--> Marta	=	Alba, Ariadna, Marta
	=	Alba, Maria, Marta
Júlia --(2)--> Oriol	=	Júlia, Ariadna, Oriol
	=	Júlia, Maria, Oriol
Júlia --(2)--> Marta	=	Júlia, Ariadna, Marta
	=	Júlia, Maria, Marta
Gil --(2)--> Oriol	=	Gil, Ariadna, Oriol
	=	Gil, Maria, Oriol
Gil --(2)--> Marta	=	Gil, Ariadna, Marta
	=	Gil, Maria, Marta
Oriol --(2)--> Carme	=	Oriol, Ariadna, Carme
	=	Oriol, Maria, Carme
Marta --(2)--> Carme	=	Marta, Ariadna, Carme
	=	Marta, Maria, Carme

La centralitat d'intermediació de la Maria serà $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

De forma anàloga es podria calcular que aquest valor és 2,5 en el cas de la Júlia i 8,5 en el cas de l'Ariadna. Per a la resta dels nodes de la xarxa aquest valor és zero. Novament, s'evidencia el paper central de l'Ariadna i la importància de la Júlia i la Maria com a connectors amb membres externs a l'orquestra. La desaparició d'un d'aquests nodes influiria molt en la connectivitat global de la xarxa.

4. XARXES ALEATORIES

Una xarxa aleatòria és una xarxa formada per nodes connectats per arestes no dirigides que són seleccionades aleatòriament d'entre totes les arestes no dirigides possibles. La teoria dels grafs aleatoris és un punt entremig entre la teoria de grafs i la teoria de la probabilitat.



4.1. Erdős i Rényi

La teoria de xarxes aleatòries va ser desenvolupada pels matemàtics hongaresos Paul Erdős i Alfréd Rényi durant la dècada dels 50. El model Erdős-Rényi, anomenat així en referència als científics anteriors, és el model més utilitzat en la generació de grafs aleatoris. Segons aquest model un nou node s'enllaçarà amb igual probabilitat a qualsevol node de la xarxa, és a dir a l'atzar. Erdős i Rényi també van ser els primers en descriure el fenomen de percolació i la transició de fase.

Malgrat la seva importància històrica les xarxes aleatòries no són una representació realista de les xarxes observades a la natura. Això significa que tenen una aplicació molt limitada a l'àmbit teòric.

4.2. Propietats de les xarxes aleatòries

4.2.1. Coeficient de Clustering i diàmetre

Les xarxes aleatòries es caracteritzen per tenir **baix coeficient d'agrupació** o coeficient de clustering. No es formen triangles, això significa que dos nodes connectats a un tercer node no estaran connectats entre ells, com a conseqüència de l'elevada aleatorietat de la xarxa.

Aquests tipus de xarxes presenten un **baix diàmetre** o longitud mitjana entre els nodes. Això és conseqüència de l'alta aleatorietat de la xarxa, la qual cosa comporta que es formin camins curts entre els nodes.

4.2.2. Distribució de grau

Per calcular la distribució de grau d'una xarxa aleatòria considerarem un conjunt de nodes. Si els enllacéssim tots ells de dos a dos, com en el cas del graf complet, el nombre total d'arestes resultants (N_p) seria:

$$N_p = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Si en un cas real hi ha un nombre M d'arestes, la probabilitat (p_e) que una parella de nodes seleccionada a l'atzar estigui enllaçada és:

$$p_e = \frac{M}{N_p} = \frac{2M}{N(N-1)}$$

Considerem ara un node qualsevol (V_1). Seguint la finalitat del càlcul de la distribució de grau, ens interessa calcular la probabilitat del fet que aquest node tingui k connexions.

Aquest problema verifica les condicions de la distribució binomial de probabilitat:

1. El node v_1 es pot connectar o no amb els altres $N-1$ nodes de la xarxa \rightarrow Només hi ha dos resultats possibles.
2. El fet que v_1 estigui connectat amb un determinat node no influeix amb la connexió de v_1 amb qualsevol dels altres nodes \rightarrow Condió d'independència.

Si es verifiquen les condicions de la distribució binomial, la probabilitat que v_1 estigui connectat amb exactament "k" nodes és:

$$p(k) = \binom{N-1}{k} (p_s)^k (1-p_s)^{N-1-k}$$

L'anterior seria l'expressió de la distribució de grau d'una xarxa aleatòria per a un nombre finit de nodes i arestes. En el cas de les xarxes complexes parlem de un nombre molt elevat de nodes i arestes, de manera que podríem dir que el seu nombre tendeix a infinit.

$$Z = \frac{2M}{N} \quad Z = \text{Connectivitat promig de la xarxa}$$

La connectivitat promig de la xarxa (Z) també és el producte del nombre de nodes de la xarxa per la probabilitat d'enllaç.

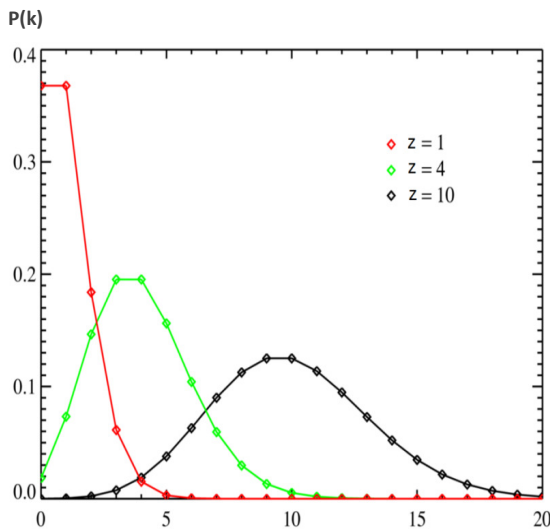
$$Z = N \cdot p$$

Si el nombre de nodes i arestes tendeix a infinit, de forma que la connectivitat promig de la xarxa (Z) es manté finita, es pot demostrar que la distribució de $p(k)$ es transforma en la distribució de Poisson de paràmetre "z".

$$p(k) = e^{-z} \frac{z^k}{k!}$$

Distribució de Poisson

- Z és la connectivitat promig de la xarxa i es tracta d'un nombre finit producte de la divisió de dos paràmetres infinits.



Distribució de Poisson
http://ca.wikipedia.org/wiki/Distribució_de_Poisson

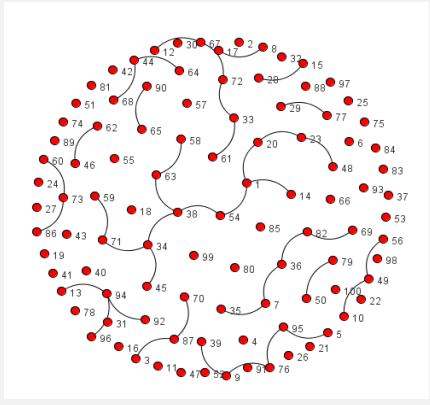
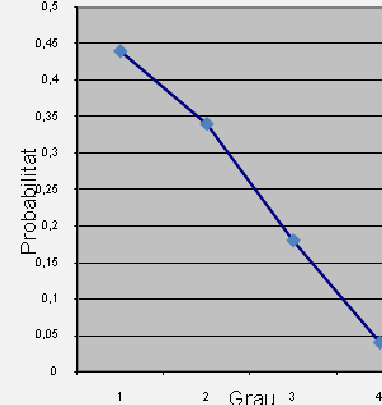
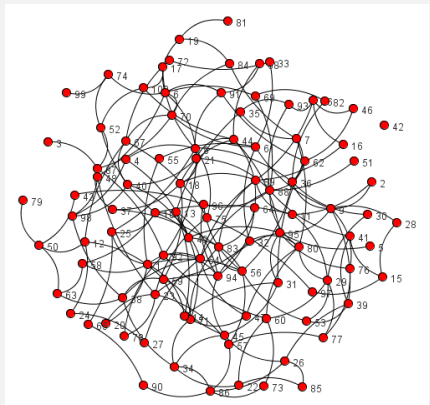
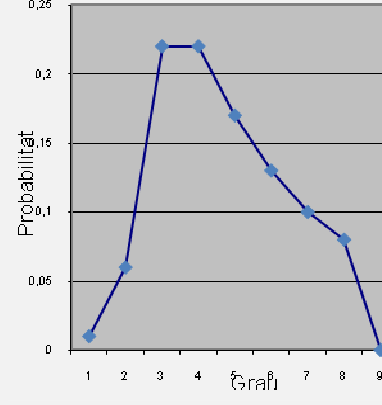
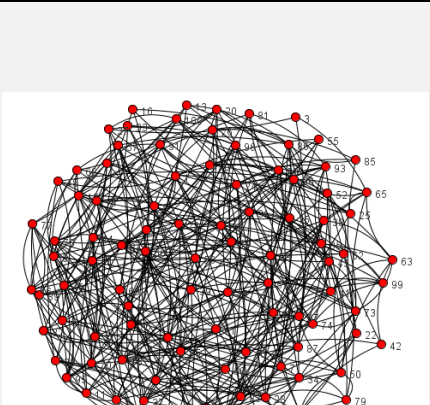
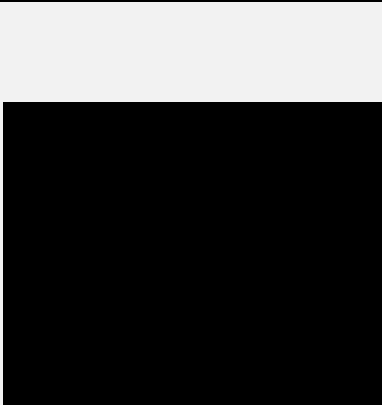
Distribució de Poisson

La distribució de Poisson és una distribució de probabilitat que aplicada a les xarxes aleatòries ens permet calcular la probabilitat que un node tingui un determinat grau (k).

Aquest gràfic ens mostra les variacions en la probabilitat que un node presenti un grau K en relació amb la connectivitat promig de la xarxa (Z). El grau mig, que coincideix amb els màxims de la recta, i la desviació típica coincideixen amb el valor del paràmetre "z".

4.2.3. Evolució de la distribució de grau en funció de la probabilitat de connexió

El programa NetWork WorkBench permet generar xarxes aleatòries definint a voluntat els paràmetres del nombre de nodes i la probabilitat de connexió entre dos nodes qualssevol. A continuació es simula, emprant aquest programa, xarxes aleatòries de 100 nodes i amb una connectivitat mitjana $z=1$, $z=4$ i $z=10$, per comparar-les amb els resultats de la gràfica anterior.

Prob.	Graf de la xarxa	Distribució de grau	Gràfic de la distribució de grau	Paràmetres de la xarxa
$p=0,01$		Grau Prob. 0 0.44 1 0.34 2 0.18 3 0.04		Diàmetre 8 Coeficient de clustering 0,00 Grau mig 0,82 N aïllats 44 Illa més gran 13 nodes.
$P=0,04$		Grau Prob. 0 0,01 1 0,06 2 0,22 3 0,22 4 0,17 5 0,13 6 0,10 7 0,08 8 0,00 9 0,01		Diàmetre 7 Coeficient de clustering 0,0203 Grau mig 3,74 N aïllat 1 Illa més gran 99 nodes.
$P=0,1$		Grau Prob. 3 0,01 4 0,03 5 0,01 6 0,06 7 0,10 8 0,17 9 0,15 10 0,12 11 0,12 12 0,14 13 0,03 14 0,03 15 0,00 16 0,01 17 0,02		Diàmetre 4 Coeficient de clustering 0,0923 Grau mig 9,48 N aïllat 0 Illa més gran 100 nodes Graf complet

Els resultats obtinguts amb la simulació són molt similars als de la gràfica de la distribució de Poisson per als mateixos valors del paràmetre z (connectivitat mitjana). Les variacions observades són conseqüència del fet que en la distribució de Poisson parlem d'un nombre molt alt de nodes, en canvi en aquesta pràctica hem treballat amb un nombre relativament petit de nodes (100). En la següent taula (obtinguda amb el programa NetWork WorkBench) es mostra com a mesura que el nombre de nodes augmenta més s'aproxima el grau mig a la connectivitat promig de la xarxa (Z).

N	P	Z = N·p	Grau mig
10	0.4	4	3.199
100	0.04	4	3,739
1000	0.004	4	3,931
10000	0.0004	4	3.993

També cal destacar en l'anàlisi d'aquests grafs que en tots els casos trobem coeficients de clustering petits, tal i com correspon amb les característiques de les xarxes aleatòries. Sorprenentment sobretot en l'últim cas on, a simple vista, podríem pensar que la xarxa està molt connectada quan en realitat l'anàlisi detallat dels paràmetres de la xarxa ens revela que no és així.

4.3. Percolació

4.3.1. Concepte de percolació

Malgrat la seva importància històrica, les xarxes aleatòries no són representatives de les xarxes reals observades a la natura. Aquestes, però, presenten un fenomen important anomenat percolació.

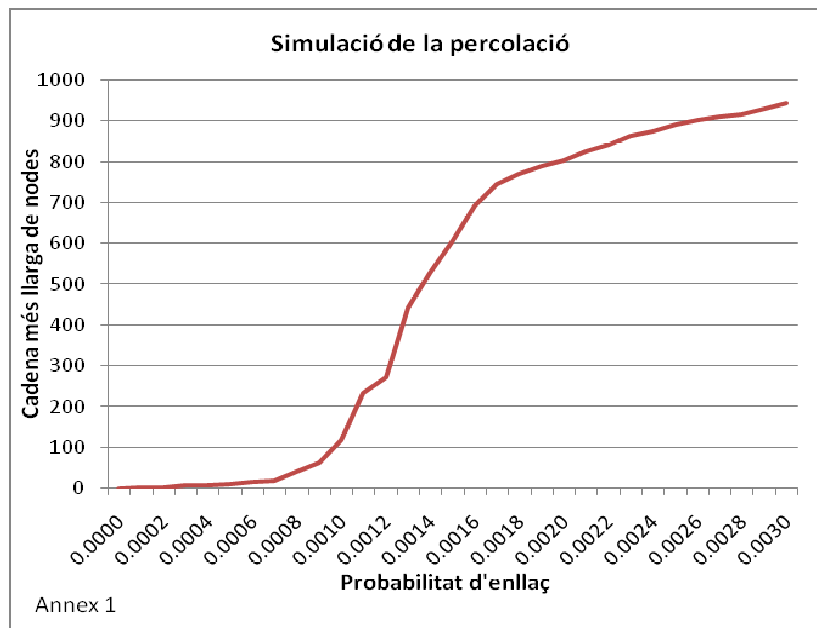
En la teoria de xarxes complexes, la percolació és un fenomen que consisteix en el pas molt ràpid de la fase inconnexa a la fase connexa en la xarxa, és a dir en la formació de l'illa gegant. L'origen de la teoria de percolació es remunta a la Segona Guerra Mundial quan Paul Flory i el seu col·laborador Walter Stockmayer van utilitzar la percolació per descriure el procés de gelificació dels polímers. Un exemple de gelificació de polímers és la cocció d'un ou. A mesura que s'escalfen, els polímers que formen la clara s'enllacen de dos en dos. S'arriba a un punt crític, la gelificació, en el qual l'ou passa de líquid a sòlid. La teoria de percolació respon a la pregunta de perquè aquesta transició, el canvi d'estat, es produeix de manera sobtada i no de manera incremental com cabria esperar.

En una xarxa, quan la probabilitat d'enllaç és baixa, els nodes que la conformen, als quals abans hem anomenat polímers, estan desconnectats. A mesura que la probabilitat augmenta també ho fa la connectivitat de la xarxa, fins que es forma l'illa gegant en la qual la majoria de nodes estan relacionats entre ells. L'illa gegant es forma de manera sobtada. Es demostra que existeix un punt crític en el qual s'inicia el canvi d'un estat amb nombrosos nodes aïllats o illes de nodes relativament petites a un altre on la majoria dels components estan connectats. El punt crític coincideix amb el moment en què la connectivitat promig de la xarxa és igual a 1 ($Z=N \cdot p= 1$). Aquest canvi rep el nom de transició de fase perquè es realitza una transició entre la fase inconnexa i la fase connexa.

El fenomen de la percolació és important en la difusió d'epidèmies. La possibilitat que es produeixi una epidèmia depèn de l'existència d'una agrupació percolant. En absència d'aquesta agrupació observariem brots de la malaltia, però aquests serien petits i localitzats. Tanmateix, si una malaltia s'inicia en algun lloc d'una agrupació percolant, en lloc d'extingir-se, s'estendria per tota la xarxa, encara que aquesta fóra molt gran. Com veurem més endavant quan s'estudia el model SIR de difusió epidèmica l'agrupació percolant apareixerà quan l'anomenada taxa de reproducció bàsica R_0 (equivalent a la connectivitat promig en una xarxa aleatòria), és major que 1. Més clarament, quan la probabilitat de contagi és suficientment alta, la malaltia "s'obre camí" o "percola" en una població d'individus susceptibles.

4.3.2. Simulació del fenomen de percolació

A continuació es realitza una simulació del fenomen de percolació. Per fer aquesta simulació s'ha utilitzat el programa NetWork Work Bench. La pràctica ha consistit en generar diverses xarxes aleatòries, totes elles amb el mateix nombre de nodes ($N=1000$), però amb diferents probabilitats d'enllaç (la probabilitat d'enllaç ha anat augmentat en 0.0001). El programa m'ha permès calcular la longitud de la cadena més llarga de nodes en relació amb les diverses probabilitats d'enllaç. El gràfic resultant és el següent (veure annex 1.1):



Podríem delimitar una primera part del gràfic entre $p=(0,0.0010)$. Aquí es pot observar que quan la connectivitat promig de la xarxa ($Z=N \cdot p$) és inferior a 1 el creixement de la cadena més llarga es produeix molt lentament.

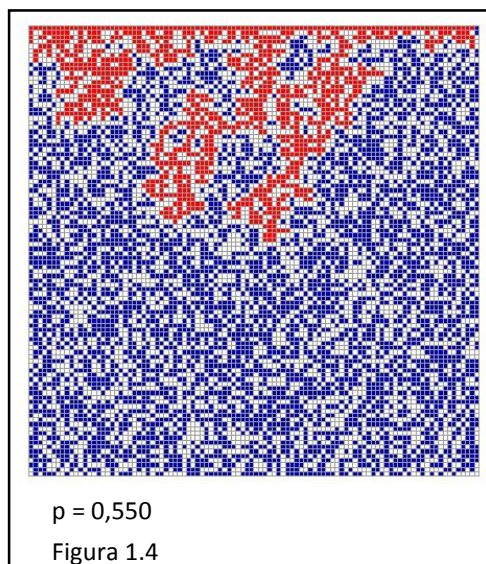
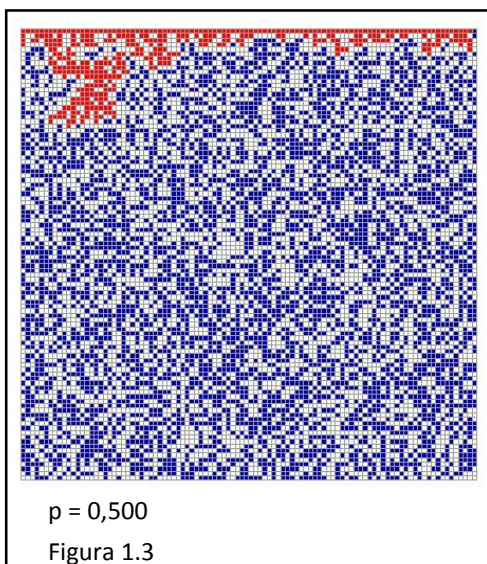
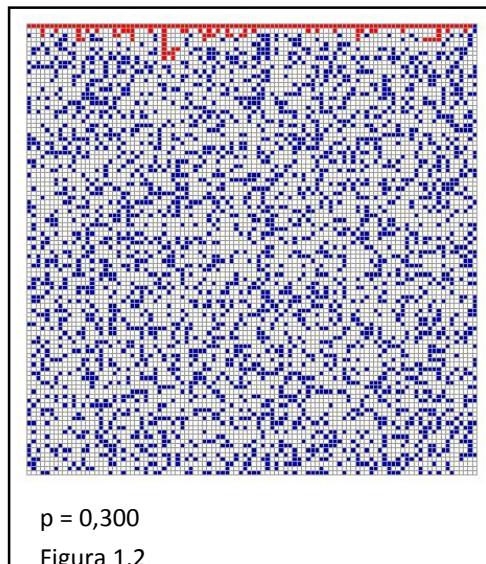
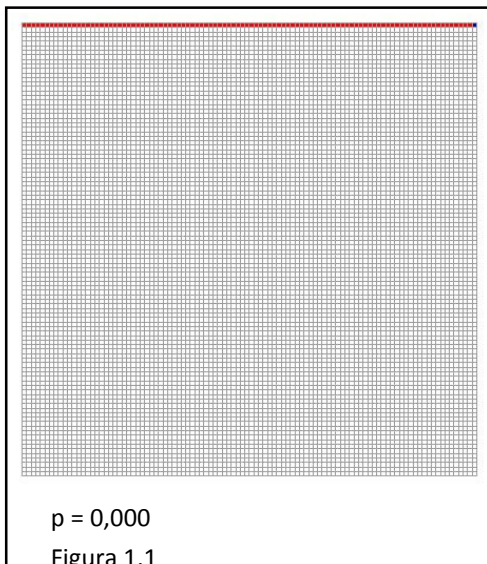
A continuació, podem observar que quan la probabilitat d'enllaç es situa entre els valors de 0.0010-0.0018 es produeix un creixement sobtat en la longitud de la cadena, que equivaldria en un increment en la connectivitat de la xarxa. Aquest increment ve seguit per la formació de l'illa gegant. Com hem dit anteriorment, el punt crític, previ a la formació de l'illa gegant, es situa a 0.0010 quan $Z=N \cdot p=1$.

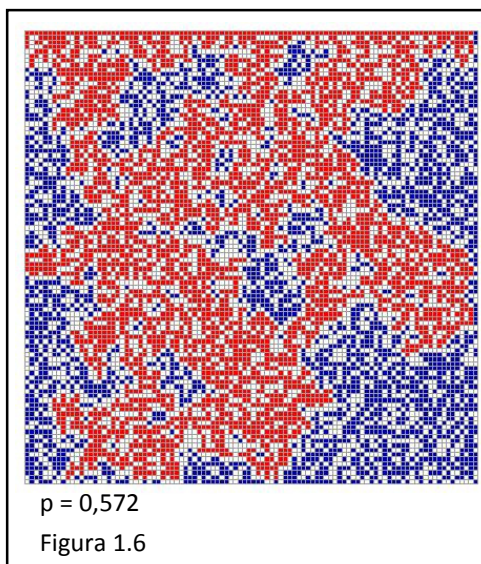
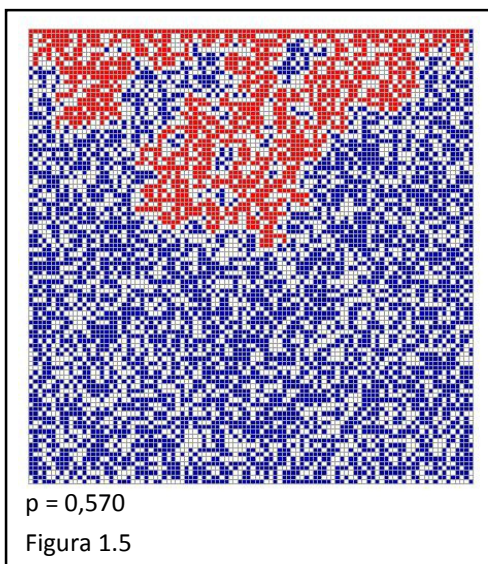
Finalment, en la tercera part del gràfic el creixement s'alenteix. Això és conseqüència del fet que el nombre de nodes no connectats va disminuint.

4.3.3. Simulació de la propagació d'un incendi forestal (veure annex 1.2)

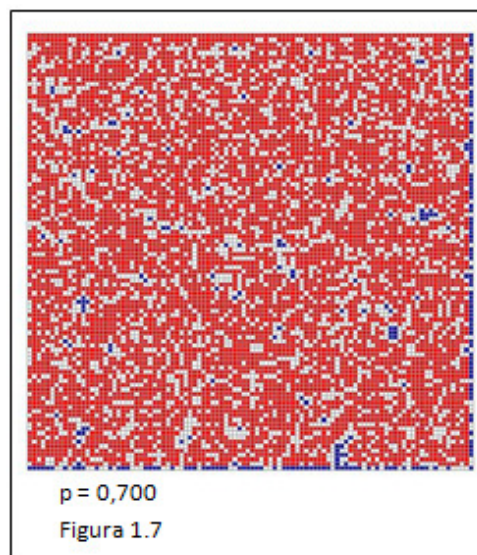
Un bosc és un exemple xarxa complexa, un conjunt de molts nodes, els arbres, que interactuen entre si. Per aquest motiu, podem observar en els boscos fenòmens propis d'aquests sistemes, en aquest cas la percolació. La percolació, recordant el que hem dit anteriorment, consisteix en la transició entre la fase inconnexa i la connexa. Que s'hagi produït aquesta transició fase, aplicat a la propagació d'un incendi forestal, és el que marca la diferència entre un incident anecdòtic o una catàstrofe mediambiental.

La següent pràctica ha consistit en realitzar una simulació de la propagació d'un incendi forestal a través de la funció "Percolation" del programa Wolfram Mathematica Demonstración. El programa representa el bosc mitjançant una quadrícula on cada cel·la pot estar ocupada per un arbre amb una probabilitat p . Una altra manera de representar el bosc seria a través d'una matriu ($n \times n$) on tindrem un 1 si hi ha un arbre i un 0 si no n'hi ha. La simulació consisteix en encendre els arbres de la primera fila. Un arbre prendrà a qualsevol arbre que l'envolti (exceptuant els que es trobin en diagonal). D'aquesta manera a mesura que la probabilitat augmenti també ho farà el nombre d'arbres i a més arbres més es pondrà estendre l'incendi.





Observem com a mesura que la probabilitat augmenta també ho fa el nombre d'arbres, malgrat això el foc no es propaga. Aquesta situació es manté invariable fins que, com s'observa a la Figura 1.3, l'incendi es comença a propagar. Cal recordar ara la gràfica del fenomen de percolació, inicialment augmenta lentament però arribat un punt crític determinat la cadena més llarga de nodes, que en aquest cas faria referència al nombre d'arbres incendiats, es dispara, com podem observar en les següents imatges.



Arribats a la Figura 1.6 podem observar clarament la transició de fase, l'alteració mínima en la connectivitat del sistema té unes repercussions que a la vida real tindria conseqüències devastadores. A continuació, observem que l'incendi es continua propagant però la velocitat amb la que augmenta el nombre d'arbres incendiats disminueix deixant enrere la transició de fase. La Figura 1.7 ens mostra ja un incendi quasi totalment propagat, a partir d'aquí, com en l'inici, l'incendi s'anirà propagant cada cop molt lentament a causa de la falta d'arbres no afectats. Finalment s'assolirà el graf connex.

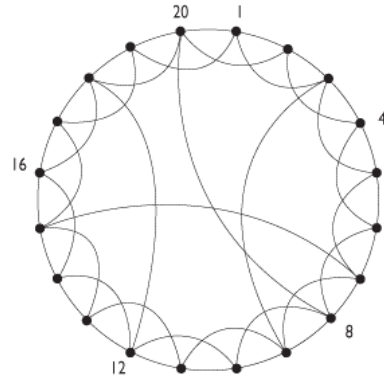
Si considerem la probabilitat com un equivalent de la densitat del bosc, podríem estar parlant d'una densitat crítica en el bosc per la qual l'incendi es propagaria. Evidentment, existeixen moltes altres variants a l'hora d'estudiar la propagació d'un incendi forestal apart de la densitat, però aquesta simulació no s'allunya tant de la realitat. En el món real la probabilitat de transmissió del foc es veuria alterada per factors com la climatologia, el terreny, la biodiversitat,...

5. XARXES DE MÓN PETIT

5.1. Introducció

Paul Erdős i Alfréd Rényi van centrar els seus estudis en les xarxes de comunicacions i, principalment, en el fenomen de percolació. Malgrat els grans avenços que van realitzar en l'estudi de les xarxes complexes, el seu camp, les xarxes aleatòries, no són un model realista d'estudi en molts àmbits.

Així, en l'àmbit social, les persones no interactuen de manera aleatòria sinó en dependència de relacions socials prèvies. Aquest fet va ser estudiat pel sociòleg Stanley Milgram, el qual va demostrar que tothom està connectat per un nombre relativament petit de salts. L'error en el plantejament de les xarxes aleatòries es troba en què una persona tindrà més possibilitats de connectar-se amb una altra propera a la seva xarxa social (algú amb qui comparteixi amistsats, aficions,...). L'estudi realitzat per Milgram, anomenat "problema del món petit", també dona nom a aquest tipus de xarxa. Els encarregats de transportar la hipòtesis de Milgram a un model matemàtic van ser Duncan J. Watts i Steven Strogatz. Aquests dos matemàtics van estudiar les xarxes de món petit i, en concret, les seves propietats de coeficient de clustering i diàmetre.



Trobem exemples d'aquest tipus de xarxes en les xarxes socials, com la topologia d'Internet, físiques, químiques, epidemiològiques,...

5.2. Sis graus de separació

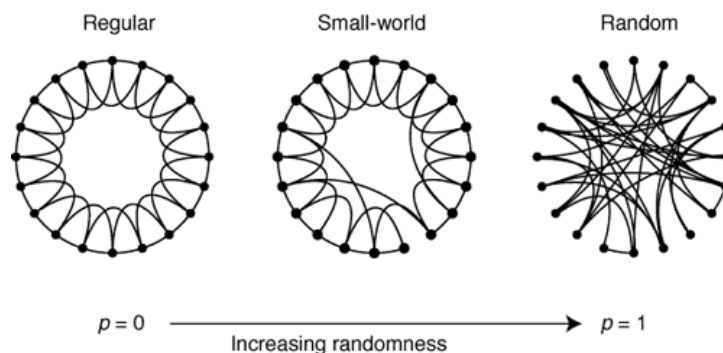
La teoria dels sis graus de separació intenta demostrar la creença popular què "el món és un mocador", a través de la hipòtesi del creixement exponencial en el nombre de coneguts d'un individu, segons la qual un nombre molt petit de connexions serien necessàries per arribar a qualsevol persona.

L'any 1967, el psicòleg nord-americà Stanley Milgram va intentar provar aquesta teoria a través del "problema del món petit". L'experiment consistia en seleccionar diverses persones a l'atzar perquè enviessin targetes postals a un estrany situat a Massachusetts. Els remitents coneixien el nom del destinatari, la seva ocupació i la localització aproximada. Se'ls va indicar que enviessin el paquet a una persona que ells coneguessin directament. Aquesta persona hauria de fer el mateix i així successivament fins que el paquet fos lliurat personalment al seu destinatari final. La conclusió de l'experiment va ser que el lliurament de la targeta postal requeria només, de mitjana, entre cinc i set intermediaris i que, per tant, vivim en un "món petit".

5.3. Model de Watts i Strogatz

L'any 1998 Duncan J. Watts i Steven Strogatz van publicar a la revista *Nature* un article titulat "Collective dynamics of 'small-world' networks". Aquest article donava una explicació al fenomen de món petit descrit per Stanley Milgram.

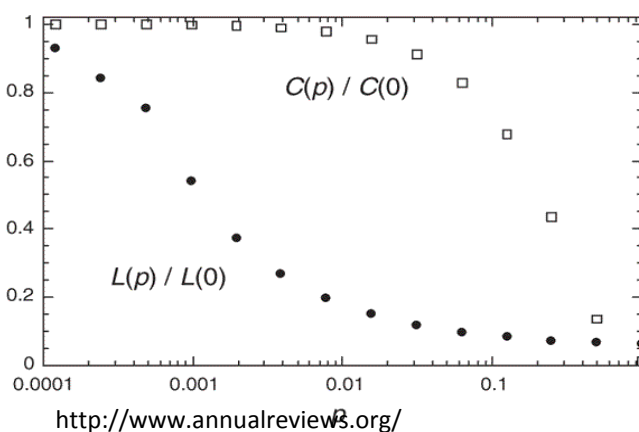
Prèviament als descobriments de Watts i Strogatz, s'havia assumit que les xarxes eren completament regulars o completament aleatòries però Watts i Strogatz van considerar que la topologia de moltes xarxes responia a un punt mitjà entre aquests dos extrems. Aquestes xarxes van ser anomenades de món petit, en referència al fenomen de món petit, popularment conegut com teoria dels sis graus de separació.



Com podem observar en la imatge anterior la xarxa de món petit (Small-world) es tracta d'un punt entremig entre la xarxa regular i la xarxa aleatòria. La formació d'una xarxa de món petit es simula a través d'un procés de recablejat aleatori d'una xarxa regular, sense alterar el nombre de nodes o connexions.

La imatge anterior ens mostra tres grafs circulars on $N=20$. El primer graf correspon a un graf regular, és a dir, tots els nodes tenen el mateix grau ($k=4$). En tractar-se d'un graf regular la probabilitat de reconexió és igual a zero ($p=0$). L'últim graf correspon a un graf aleatori, això significa que tots els nodes s'han recablejat aleatòriament ($p=1$). El segon graf, que correspon a una xarxa de món petit, presenta una probabilitat de reconexió p ($0 < p < 1$). Quan més alt sigui el valor de p més alta serà l'aleatorietat de la xarxa.

Les principals propietats estructurals a l'hora d'estudiar una xarxa són el coeficient d'agrupament o de clustering (C) i el diàmetre (L). En la següent gràfica podem observar les alteracions que pateixen els valors d'aquests paràmetres en relació amb la probabilitat de reconexió de la xarxa (p).



Quan $p=0$ ens trobem amb un graf regular en el qual observem valors alts de clustering associats a valors alts en el diàmetre (L). Això es tradueix, observant el graf regular de la imatge anterior, a nodes propers que es connecten entre ells. Però, a la vegada, aquesta proximitat provoca que siguin necessaris molts salts per arribar a l'altre extrem de la xarxa.

Quan $p=1$ es forma un graf aleatori en el qual trobem valors baixos tant de coeficient de clustering com de diàmetre. Això significa que els nodes es connectaran de manera totalment aleatòria i que aquesta aleatorietat facilitarà que el nombre de salts necessaris per arribar d'un node a un altre sigui relativament baix. Per tant, en aquest cas el coeficient de clústering és petit, la qual cosa significa que la connectivitat de la xarxa és baixa.

El graf de món petit el trobem quan la probabilitat és $0 < p < 1$. Els casos anteriors ens podrien portar a pensar que valors alts de clustering s'associen a valors alts de diàmetre i valors baixos de clustering a baixos de diàmetre. Contràriament, la gràfica demostra que mínims augments en la probabilitat de reconexió alteren notablement els valors del diàmetre. Aquesta davallada en el valor del diàmetre ve causada per la introducció de camins curts, gràcies a la reconexió, entre nodes que anteriorment estaven molt apartats. L'alteració d'uns pocs nodes de la xarxa permet que el coeficient de clustering es mantingui pràcticament invariable per valors baixos en la probabilitat de reconexió, mentre que el valor del diàmetre decau sobtadament.

5.4. Propietats de les xarxes de món petit

5.4.1. Coeficient de Clustering i diàmetre

Les xarxes de món petit compten amb un **alt coeficient d'agrupació** o coeficient de clustering, com hem explicat anteriorment, que disminueix a mesura que augmenta la probabilitat de reconexió (p).

L'altra propietat que defineix les xarxes de món petit és la **longitud mitjana entre els nodes o diàmetre**. Les xarxes de món petit presenten un diàmetre de valor relativament baix, aquest valor disminueix a la vegada que augmenta l'aleatorietat en la xarxa (p).

Com sabem, el que diferencia les xarxes de món petit de les xarxes aleatòries és el coeficient de clustering. A continuació es donen dades de diverses xarxes reals, analitzades per Watts i Strogatz, en què es comparen els seus diàmetres i coeficients de clustering respecte de xarxes aleatòries amb la mateixa connectivitat mitjana.

	L_{real}	$L_{\text{aleatòria}}$	C_{real}	$C_{\text{aleatòria}}$
Actors de cine	3,65	2,99	0,79	0,00027
Red elèctrica	18,7	12,4	0,08	0,005
C. elegans	2,65	2,25	0,28	0,05

El que podem observar és que els diàmetres de les xarxes de món petit i les corresponents xarxes aleatòries són similars, mentre que el coeficient de clustering és molt més elevat en el cas de les xarxes de món petit, per la qual cosa la seva connectivitat és major.

Les dades anteriors es refereixen a les xarxes següents:

- **Xarxa d'actors: L'oracle de Kevin Bacon**

Watts i Strogatz van estudiar un joc anomenat Kevin Bacon Game idea a l'Albright College de Harrisburg (Estats Units), ideat a partir de la base de dades Internet Movie Database que recull els actors que han participat en pel·lícules rodades entre l'any 1898 i l'any 2000.

El joc funciona així: si un actor ha participat amb l'actor Kevin Bacon conjuntament en una pel·lícula tindrà nombre de Bacon 1 (el propi Kevin Bacon és l'únic amb nombre de Bacon igual a zero). En canvi, si un actor no ha actuat mai amb ell, però si ho ha fet amb algun altre actor que si ho ha fet, tindria nombre de Bacon 2. Així, per exemple Marilyn Monroe té nombre de Bacon 2, atès que va treballar a la pel·lícula *Niàgara*(1953) amb l'actor George Ives i aquest últim havia treballat amb Kevin Bacon a la pel·lícula *El último escalón* (1999).

El que va interessar a Watts i Strogatz era confirmar si aquesta base de dades tenia característiques de xarxa de món petit. Per fer-ho van analitzar la distribució de distàncies entre els actors, obtenint el resultat següent:

Nombre de Bacon	Nombre d'actors	Nombre acumulat total d'actors
0	1	1
1	1550	1551
2	121661	123212
3	310365	433577
4	71516	504733
5	5314	510047
6	652	510699
7	90	510789
8	38	510827
9	1	510828
10	1	520829

En aquesta xarxa, la distància promig és 3.65 i Watts-Strogatz van calcular que el coeficient de clústering és 0.79. La xarxa d'actors és, sens dubte, una xarxa de món petit, atès que presenta un diàmetre baix (cada actor es podia relacionar amb qualsevol altre amb menys de quatre passos, en promig) i la xarxa presenta una connectivitat molt més elevada (coeficient de clústering = 0.79) que una xarxa aleatòria amb el mateix nombre de nodes (0.00027).

El joc de l'oracle de Kevin Bacon és accessible a la pàgina WEB <http://oracleofbacon.org/>.



En aquest exemple es veu que l'actriu catalana Ariadna Gil té nombre de Bacon 2.

- **Xarxa neuronal del C. Elegans**

Seguint amb els seus estudis, Watts i Strogatz van decidir analitzar una xarxa neuronal, la del cuc *Caenorhabditis Elegans* (C. Elegans), molt utilitzat en recerca biomèdica. D'aquest cuc es coneix el mapa genètic de cada cèl·lula del seu cos en qualsevol fase de desenvolupament, inclosa la seva xarxa neuronal.



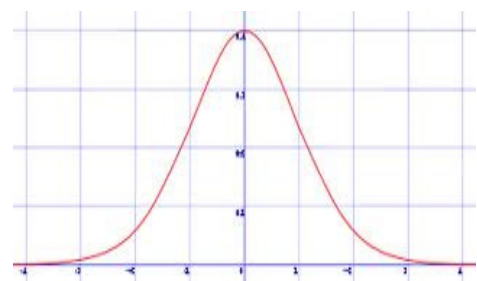
<http://caramelosblog.es/tag/caenorhabditis-elegans/>

La xarxa neuronal del C. Elegans té 302 neurones i 2148 arestes. La representació de la xarxa és pot veure al gràfic anterior i els valors que la caracteritzen són un diàmetre igual a 2.65 i un coeficient de clústering de 0.292, essent presents un total de 3241 triangles. Novament, es tracta d'una xarxa de món petit, amb diàmetre baix i connectivitat alta si es compara amb una xarxa aleatòria del mateix nombre de ndes, conseqüència de l'elevat nombre de triangles que connecten entre si les neurones del cuc.

5.4.2. Distribució de grau

Watts i Strogatz van suposar que totes les xarxes de món petit tindrien una distribució de grau similar a la mostrada en la gràfica següent: el grau mig estaria ben definit per un màxim i la distribució decauria ràpidament a ambdós extrems d'aquest màxim. Aquesta distribució comportaria que la majoria de nodes tindrien graus que no diferirien gaire de la mitjana. Són moltes les distribucions que segueixen aquesta distribució en el món real, tantes que rep el nom de distribució normal. La distribució de grau de tipus normal semblava una explicació raonable a les distribucions de grau en el món real, complia certs requisits que Watts i Strogatz s'havien plantejat aplicats a les xarxes socials, on ells centraven les seves investigacions: hi ha escassa probabilitat de què el nombre d'amistats d'una persona difereixi gaire de la mitjana, fins i tot en xarxes grans, i en una xarxa social real, com per exemple una població, una persona només està relacionada amb una petita fracció de la població total. Per Watts i Strogatz tot semblava correcte, però van cometre l'error de no comprovar quines xarxes presentaven distribució normal y quines no.

Les xarxes de món petit presenten diferents topologies depenent de la xarxa que analitzem, no és el mateix analitzar una xarxa social que la xarxa neuronal del cuc *Caenorhabditis elegans*. Cal, però, no oblidar que les topologies són models matemàtics que intenten adaptar-se i representar la realitat, això significa que de vegades són imprecises ja que el món real no és una ciència exacta com les matemàtiques.



Les xarxes de món petit presenten dos tipus de topologia, que analitzaré més a continuació. Són les següents:

Topologia Exponencial	$p(k)=Ce^{-\alpha k}$	(Poc habitual)
Topologia Lliure d'Escala	$p(k)=k^{-\gamma}$	(Molt habitual)

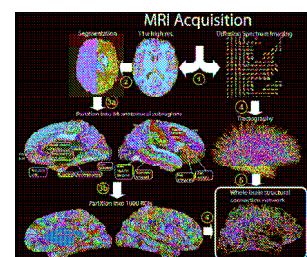
5.4.2.1. Distribució Exponencial

La distribució exponencial, en el context del creixement de xarxes, té el seu origen en l'enllaç igualitari, segons el qual un node nou que s'afegeixi a la xarxa ho farà amb la mateixa probabilitat a qualsevol altre node de la xarxa, sense discriminar.

$$p(k) = Ce^{-\alpha k}$$

Topologia Exponencial

Un exemple de distribució exponencial és l'estructura anatòmica del cervell humà (té 66 subregions i 998 regions d'interès), que té atributs de món petit i presenta múltiples mòduls connectats amb regions que presenten característiques de hub.²



² http://www.madrimasd.org/blogs/redes-complejas/files/2011/05/upm_master_redes_funcionales.pdf

5.4.2.2. Distribució Lliure d'Escala: Model de Barabasi - Albert

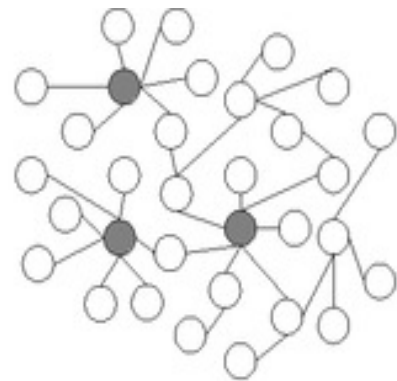
László Barabási, professor de física de la Universitat de Notre-Dame, juntament amb el seu estudiant Reka Albert, van contribuir a l'estudi de les xarxes complexes en el món real introduint conceptes com l'enllaç preferencial i les xarxes lliures d'escala.

Barabási i Albert van estudiar la distribució de grau de xarxes que prèviament ja havien estudiat Watts i Strogatz i van demostrar que moltes xarxes del món real no segueixen una distribució normal, sinó una llei potencial.

Les lleis potencials són un altre tipus de distribució, les quals tenen dues característiques que les diferencien de les distribucions normals. En primer lloc, una llei potencial no té el seu màxim en el valor promig sinó que generalment s'inicia en el seu màxim i decreix a mesura que augmenta el grau "k". En segon lloc, hi ha un canvi sobtat en la gràfica, això afavoreix la probabilitat que es produeixin fenòmens extrems.

Les xarxes lliures d'escala incorporen dues lleis:

- Llei de creixement: Significa que en cada iteració afegim un nou node a la xarxa.
- Llei d'enllaços preferents: La probabilitat de connectar-se a un node determinat és proporcional al nombre d'enllaços que el node seleccionat ja tingui. D'aquesta manera, és més probable que s'efectuï l'enllaç amb nodes altament connectats que amb altres que ho estan menys. Per exemple, una persona que tingui la intenció de contractar Internet ho farà amb una companyia telefònica de renom, que tindrà més clients perquè oferirà un millor servei. D'aquesta manera "els rics es fan més rics".



Els punts grisos assenyalen els hubs de la xarxa.

Aquests tipus de xarxa, tal i com es pot veure en el diagrama anterior, resten unides per les moltes connexions que presenten un pocs nodes, els anomenats "hubs".

La característica clau de la distribució de llei potencial recau en l'exponent. La distribució de grau $[p(k)]$ depèn del grau (k), a la vegada el grau variarà en funció de l'exponent, un valor específic propi de la xarxa estudiada.

$$p(k) = Ck^{-\lambda}$$

- λ és l'exponent, un paràmetre que variarà en funció de la xarxa estudiada.

Distribució Lliure d'Escala

Un sistema molt utilitzat a l'hora de dibuixar la gràfica de la distribució en funció del grau és la gràfica de escales logarítmiques o log-log.

Aquest sistema ens permet treballar amb facilitat l'exponent λ que caracteritza la xarxa lliure d'escala.

$$p(k) = Ck^{-\lambda} \longrightarrow \log p(k) = \log(Ck^{-\lambda}) = \log C - \lambda \log k$$

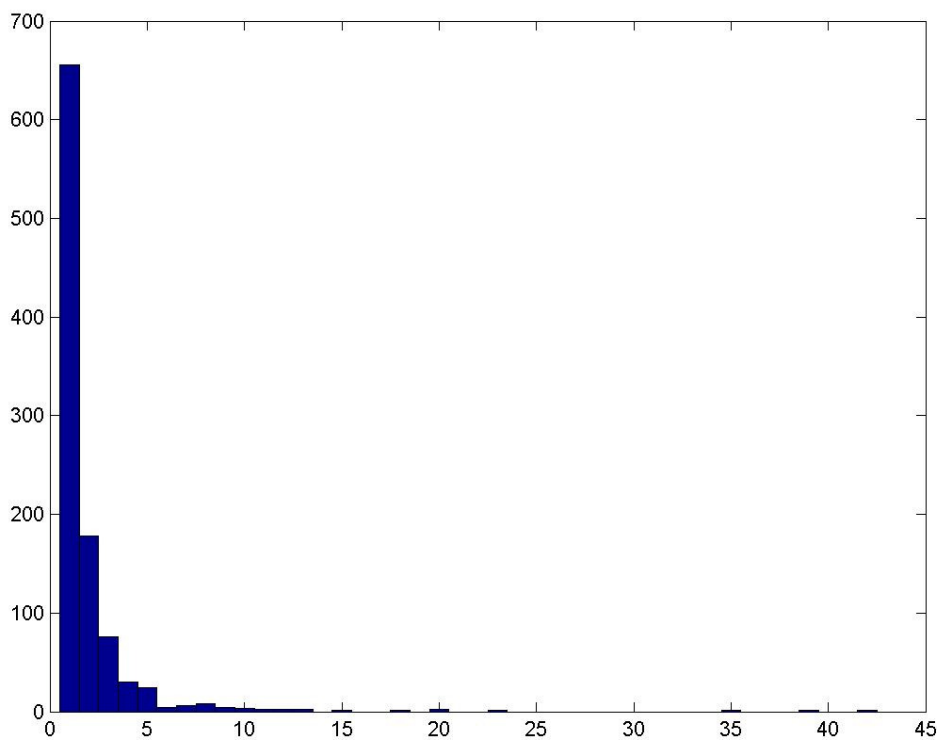
Així, la representació de $\log(p(k))$ en funció del $\log(k)$ serà una recta, atès que la dependència és de tipus lineal. El pendent de la recta obtinguda serà igual al paràmetre λ que caracteritza la xarxa.

5.4.2.2.1. Simulació d'una xarxa lliure d'escala

El programa `baralabert.m`³ (annex-2.1), desenvolupat amb Matlab, aplica les lleis anteriors per generar xarxes lliures d'escala. Els paràmetres del programa són els següents:

- m_0 = nombre de nodes inicial
- m = nombre d'arestes del nou node que es connecta
- T = nombre de nodes final

Si fem servir l'algoritme per un nombre de nodes inicial $m_0 = 3$, afegint cada cop un node amb $m = 1$ aresta, fins generar una xarxa de $T=1000$ nodes obtenim la gràfica següent:



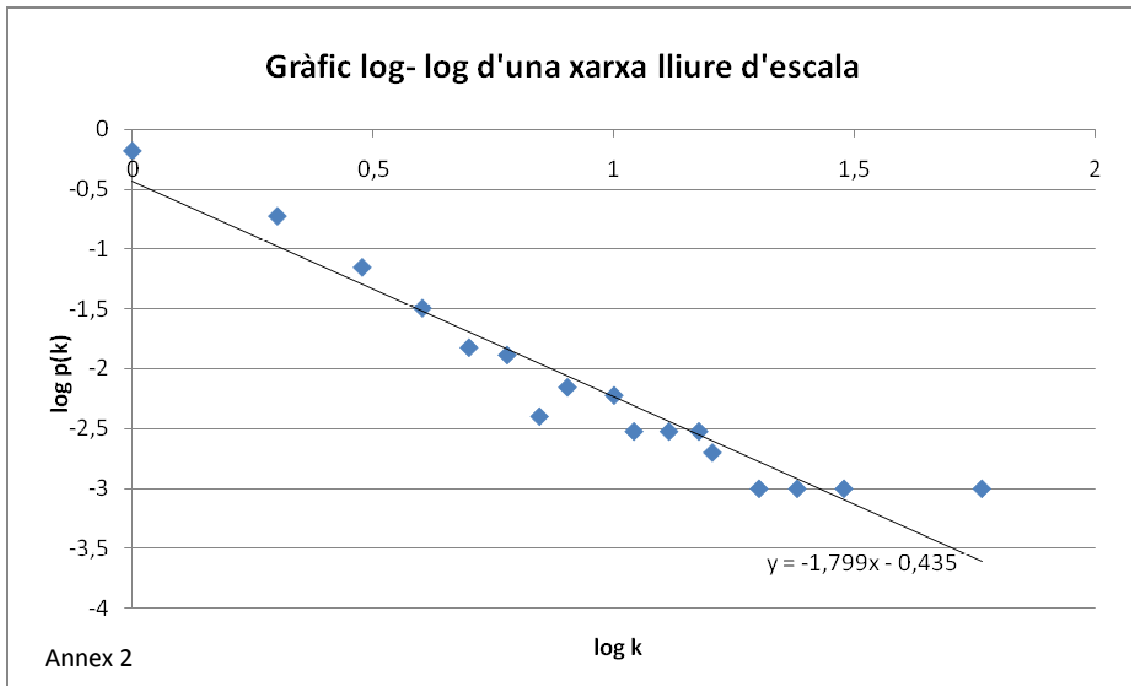
Annex 2

Aquest és l'aspecte típic de la distribució de grau d'una xarxa lliure d'escala. S'observa un gran nombre de nodes amb molt poques connexions i uns pocs nodes (hubs) molt connectats.

³ Estudio del efecto de la topología de mundo pequeño en el modelo de Ising de 1D i 2 D mediante simulación computacional. Autor: Ángel Santiago Naranjo Rubio, Escuela Politécnica Nacional de Quito (Colombia).

Es pot determinar el paràmetre λ de la llei de distribució de grau $p(k) = Ck^{-\lambda}$ de la xarxa lliure d'escala construint una gràfica log - log, on a l'eix d'abscisses es representa $\log k$ i a l'eix d'ordenades $\log p(k)$. Els càlculs necessaris per a la realització d'aquesta gràfica es troben a l'annex 2.2.

Aquesta gràfica presenta l'avantatge que el pendent de la recta que millor s'ajusta al núvol de punt format pel $(\log k, \log p(k))$ és igual al valor del paràmetre λ , com ja havíem demostrat anteriorment. En el nostre cas:



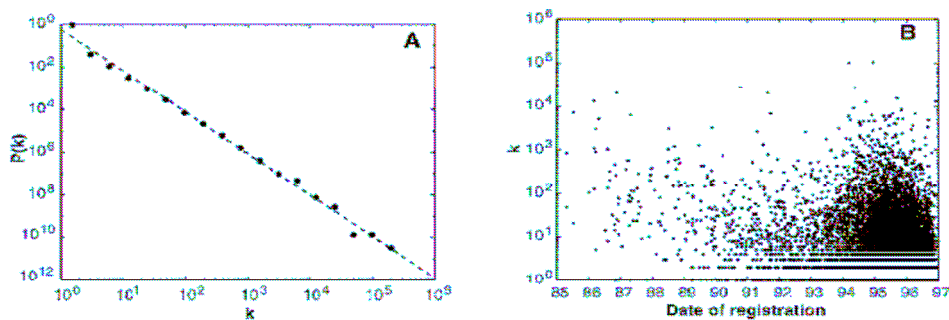
En conseqüència, la xarxa lliure d'escala generada tindria per equació de la seva distribució de grau una equació on: com que $\log C = -0,4355$, llavors $C = 10^{-0,4355} = 0,367$ i el paràmetre característic seria $\lambda = 1.799$.

$$p(k) = 0,367k^{-1,7999}$$

5.4.2.2.2. Problemes del model de Barabasi – Albert

El model de Barabasi i Albert, malgrat la seva simplicitat, presenta dos problemes:

- Els nodes que apareixen inicialment tenen, en promig, més connexions que els que apareixen posteriorment. Aquesta no és una situació que es correspongui amb moltes xarxes complexes reals. Un exemple paradigmàtic és Google, el conegut cercador de pàgines WEB, que tot i aparèixer més tard que Altavista o Yahoo és avui en dia el líder d'aquest tipus de serveis. D'altra banda, com es demostra a la gràfica B, estan més connectats els nodes de la xarxa més "joves" que no pas els més antics, tot i que, com demostra la gràfica A o gràfica log-log, la distribució és clarament lliure d'escala.



A: Gràfica LOG-LOG de distribució de connectivitats $p(k)$ en una xarxa de 260000 pàgines WEB
 B: Connectivitat dels “k” nodes en funció de la seva edat

- La resolució matemàtica del model de Barabasi i Albert, definit per les equacions:

- Equació d'evolució
$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{\sum_{j=0}^{N(t)} k_j}$$

- Distribució de grau
$$p(k) = \frac{dp(k_i(t) < k)}{dk}$$

no puc resoldre perquè els meus coneixements matemàtics són insuficients condueix a una solució del tipus $p(k) = Ck^{-3}$, és a dir, de paràmetre fix $\lambda = 3$.

Com es pot veure a la taula següent, moltes xarxes complexes naturals i artificials tenen un valor del paràmetre λ diferent de tres:

Red	Núm. de nodos	Núm. de conexiones	γ_i
dominio www.nd.edu	325,729	1,469,680	2.1
Páginas de WWW encontradas por Altavista	$2,711 \times 10^9$	$2,130 \times 10^9$	2.1
Domínios en la WWW	$2,60 \times 10^5$	—	1.9
Nivel de inter-dominio de la Internet	4,389	8,256	2.2
Sistemas autónomos en la Internet	6,374	13,641	2.2
Nivel de ruteador en la Internet	150,000	200,000	2.3
Red de colaboradores en las revistas Medline	1,388,989	$1,028 \times 10^7$	2.5
Colaboradores en las revistas de matemáticas	70,975	$1,32 \times 10^5$	2.1
Colaboradores an las revistas de neurociencias	209,293	$1,21 \times 10^6$	2.4
Red de interacciones metabólicas en (<i>E. coli</i>)	778	$\sim 1500 - 3000$	2.2
Red de interacciones protéicas en levadura	1,870	2,240	2.5
Co-ocurrencia de palabras	470,000	17,000,000	2.7
Red de palabras sinónimas	22,311	—	2.8
Circuitos digitales	2×10^4	4×10^4	3.0
Llamadas telefónicas	47×10^6	8×10^7	2.1

Per resoldre aquesta qüestió, Barabasi i d'altres matemàtics van proposar l'anomenat concepte d'**adaptabilitat**. Un node pot ser millor, i per tant opta a més connectivitat a mesura que creix la xarxa, no només tenint en compte la seva antiguitat sinó la seva capacitat d'adaptació a les necessitats i característiques de la xarxa. En termes de Google, el seu èxit va ser conseqüència d'un millor disseny, eficiència i rapidesa que els seus competidors directes, Altavista i Yahoo.

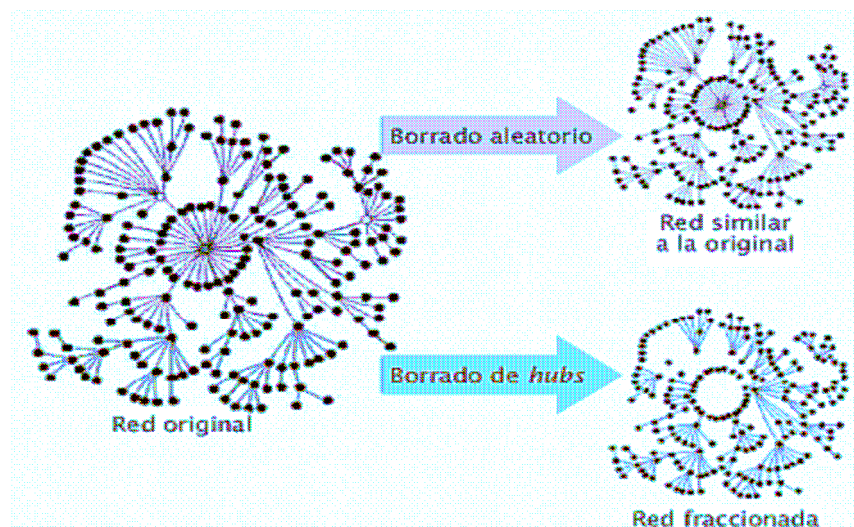
En aquest model, cada node v_n té, a més d'una connectivitat k_n , un paràmetre d'adaptabilitat w_n que indica la seva adaptabilitat a l'entorn. La probabilitat que un nou node que s'afegeix a la xarxa es connecti amb v_n vindrà donada per la llei $p(v_n, k_n, w_n) = C w_n k_n$, on C és una constant i on l'adaptabilitat w_n de cada node de la xarxa és una variable aleatòria.

Amb tot, no existeixen models de creixement que generin tots els valors que pren el paràmetre λ en els llistats anteriors.

5.4.2.2.3. Propietats de les xarxes lliures d'escala

Les xarxes lliures d'escala tenen propietats força diferents de les xarxes aleatòries.

- Són xarxes molt robustes davant la supressió aleatòria de nodes, atès que és molt més probable l'eliminació d'un node poc connectat que la d'un node molt connectat.
- Són força vulnerables davant dels atacs no aleatoris que eliminin els nodes molt connectats (hubs), atès que en aquest cas la xarxa es desintegra ràpidament, produint-se desconexions entre parts de la xarxa.
- Tenen un diàmetre curt. Es pot demostrar que, en el límit, $L = \frac{\log N}{\log(\log K)}$, essent N el nombre de nodes de la xarxa i K el seu grau mig.



Alteracions d'una xarxa en funció de l'eliminació de nodes aleatoris o seleccionats.
<http://www.iieh.com/>

5.5. Exemples

5.5.1. Mutacions genètiques

Quan es produeixen còpies de material genètic es poden produir mutacions en gens. La major part de les vegades això no té conseqüències, però si muta un gen altament connectat les conseqüències poden ser molt greus. Així, s'han observat mutacions en el gen p35, que és un element altament connectat, en certs pacients amb tumors cancerígens.

5.5.2. Xarxes tròfiques

En ecologia la pèrdua d'una espècie rellevant dins d'un ecosistema pot tenir greus conseqüències. Ens ocasions els resultats poden ser absolutament inesperats. El llibre "Xarxes complexes" de Ricard Solé, explica el cas del virus de la mixomatosi quan va ser introduït a Anglaterra i Austràlia com a element de control per reduir la plaga de conills (es van reduir de 600 a 100 milions en només dos anys). A Anglaterra la caiguda de la població de conills va tenir una conseqüència inesperada: l'extinció de l'anomenada gran papallona blava (*Maculinea Arion*). Els conills s'alimentaven d'un tipus d'herba alta que competia en desavantatge amb una altra herba més baixa que no tenia interès per als conills. Així, les praderies d'herba baixa dominaven el paisatge en el que es situava el següent element de la cadena. Es tractava d'una formiga vermella que construïa els seus nius entre les herbes baixes que permetien el pas de la llum. Aquesta formiga es relacionava de forma mutualista amb les larves de la papallona blava: les formigues tenien cura de les larves mentre que les erugues els proporcionaven substàncies en forma d'aliment líquid, a la vegada que consumien ous de formiga. La darrera part de la metamorfosi tenia lloc a l'interior del niu de les formigues, del que les papallones adultes sortien per reproduir-se.

En introduir el virus, la pèrdua de pressió sobre les herbes altes va fer que aquestes acabessin predominant i, en variar les condicions de temperatura, les formigues van deixar de construir els seus nius. Ningú se n'ocupava de les erugues i la papallona va acabar desapareixent.

En aquest cas, la disminució d'un element (els conills, que representaven en termes de xarxes un hub) en l'estructura de l'ecosistema va provocar una resposta complexa i permanent, inicialment imprevisible.

5.5.3. Difusió d'epidèmies

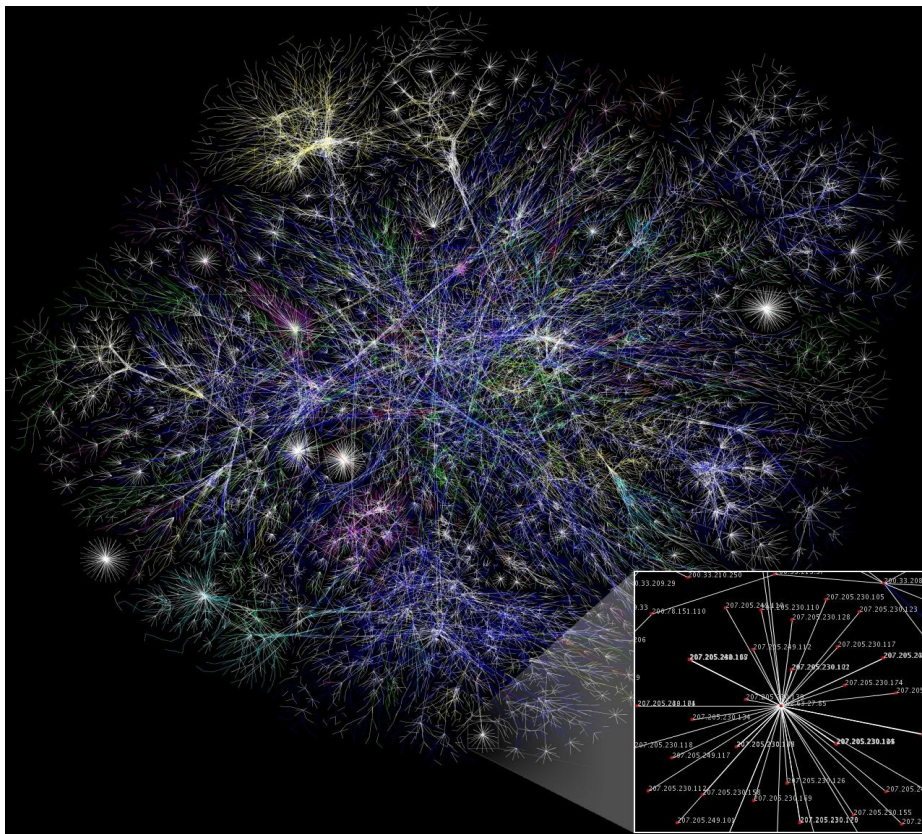
L'aparició l'any 2009 d'una nova variant de la grip (grip A – H1N1) que es temia derivés en una pandèmia va posar en alerta tots els sistemes nacionals de salut a nivell mundial. Les estratègies per a evitar-la van ésser essencialment el control del tràfic aeronàutic i la vacunació de les anomenades poblacions "diana", és a dir aquelles més susceptibles de contraure la malaltia: dones embarassades, treballadors del sistema sanitari i de serveis públics essencials i persones majors de seixanta anys d'edat que presentaven condicions clíniques especials com malalties respiratòries, malalties cardiovasculars, diabetis i immunosupressió, entre d'altres.



Curiosament, com a conseqüència d'un episodi de grip d'una soca similar a la H1N1 a mitjans del segle XX, no es recomanava la vacunació als majors de 65 anys, com és habitual en episodis de grip estacional. Les dues estratègies incidien sobre hubs, per una banda de la xarxa de transports i per una altra de la xarxa social de persones que pertanyien a les poblacions "diana" abans esmentades.

El més sorprenent de les xarxes lliures d'escala és la seva varietat: xarxes socials, xarxes de contactes sexuals, Internet, xarxes neuronals, xarxes d'interacció de proteïnes, xarxes de distribució elèctrica... la qual cosa fa suggerir que ha d'existir algun mecanisme generador d'aquests tipus de xarxa a diferents nivells organitzatius, des de les xarxes naturals com la xarxa d'interaccions proteiques o la xarxa neuronal del pematode C. Elegans a xarxes artificials com són les grans xarxes socials o informàtiques.

L'aspecte gràfic de les xarxes lliures d'escala és molt característic, atès que s'observa clarament la presència de hubs, com es pot veure a la imatge adjunta que correspon a la xarxa d'Internet.



Xarxa de les connexions d'Internet . Els punts blancs indiquen els hubs.
<http://lakis.web.elte.hu/>

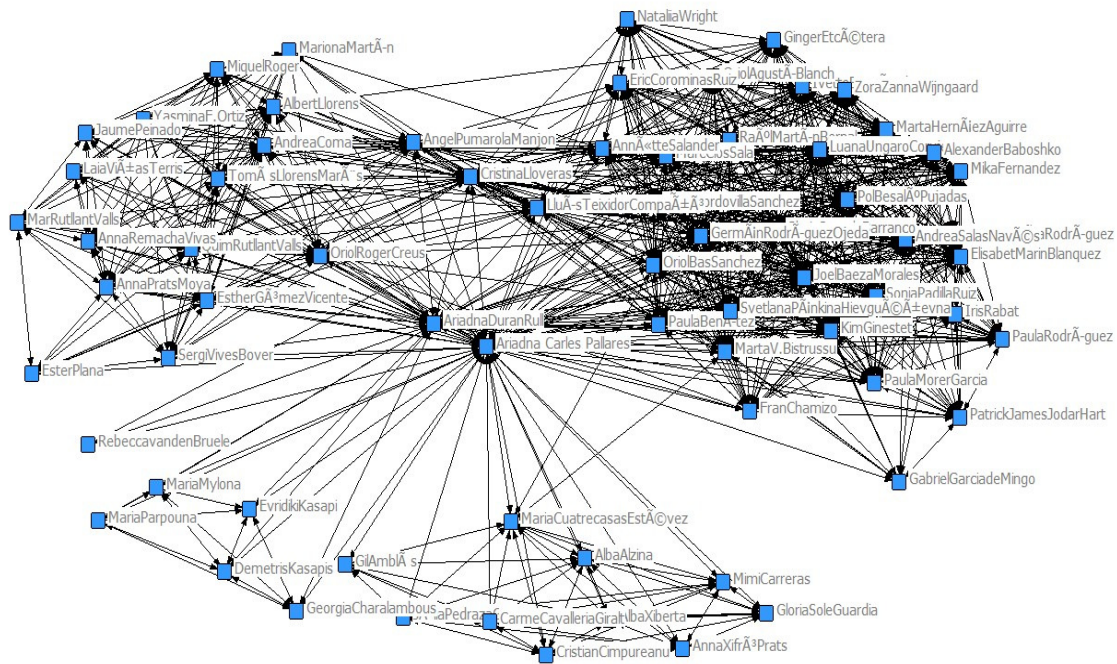
5.6. Hubs i xarxes socials: Anàlisi de la xarxa social Facebook

Un exemple del paper dels hubs a les xarxes lliures d'escala el podem veure a partir de l'anàlisi de la meua xarxa de Facebook personal, que he recuperat a efectes de càlcul i visualització amb l'aplicació de Facebook anomenada Social Graph.

Per tal de visualitzar millor el problema he tingut en compte quatre grups als quals pertanyo i que tenen components que estan relativament allunyats entre si. Són els següents (en aquesta versió per als premis Poincaré he posat pseudònims):

- OJS
- Colla sardanista
- Amistats de l'institut
- Amistats d'intercanvis Comènius

La gràfica, obtinguda amb UCINET és la següent:



Gràfic 0: Gràfic del meu facebook incorporant els grups indicats al paràgraf anterior

El programa utilitzat genera una gràfica on es poden intuir perfectament els grups que em referia anteriorment i la posició central que ocupen diverses persones (AD, CL, jo mateixa,...).

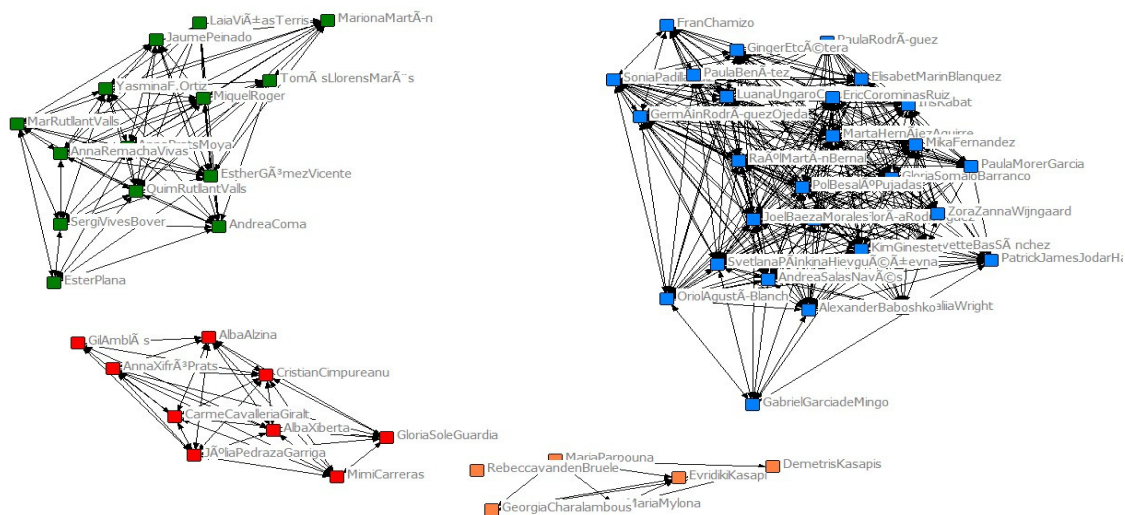
UCINET té una opció que permet determinar quin són els nodes de la xarxa que, si s'eliminassin, afectarien més a la connectivitat de la meua xarxa personal. Per fer aquest estudi es pot recórrer a UCINET i la mesura del paràmetre de centralitat d'intermediació (Betweness centrality) que permetrà saber quins són els nodes crítics a la xarxa, en el sentit que la seva desaparició influirà molt en la connectivitat global.

Per al gràfic anterior, els càlculs amb UCINET de la centralitat d'intermediació donen els següents resultats:

		Betweenness	nBetweenness
1	Jo	932.693	39.757
43	AD	172.977	7.373
30	CL	124.230	5.295
57	LT	68.116	2.904
33	AP	46.272	1.972
53	AS	24.683	1.052
56	OR	19.870	0.847
47	MB	15.632	0.666
39	OB	15.051	0.642
49	JC	10.959	0.467
69	MC	9.540	0.407

El valor nBetweenness és la centralitat d'intermediació normalitzada, és a dir, ens mostra la importància en tants per cent de les persones que integren la xarxa. Com és evident l'actor principal de la meua xarxa de Facebook sóc jo mateixa, però aquests càlculs ens permeten determinar que AD, CL, LT i AP són també importants nodes de connectivitat dins la xarxa.

Quin seria l'efecte d'eliminar-los? Observariem que el coeficient d'intermediació normalitzat personal augmentaria fins a 65.85, de forma que jo mateixa assumiria pràcticament tota la connectivitat de la xarxa. En aquestes condicions, com es reflecteix a la gràfica següent, si em donés de baixa a Facebook, el resultat seria la desconexió dels grups i, per tant, la possible pèrdua de contactes entre els seus components.



De fet, la xarxa queda separada en quatre subgrups:

- **Color verd:** OJS
- **Color vermell:** Colla sardanista
- **Color blau:** Amistats de l'institut
- **Color taronja:** Amistats d'intercanvis Comènius

... és a dir, justament els grups que, per una o altra activitat personal, formen la meua xarxa. La supressió dels nodes amb major coeficient d'intermediació permet, doncs, localitzar subgrups dins una xarxa.

6. MODELS EPIDÈMICS

6.1. Introducció

La matemàtica de les epidèmies va néixer amb la presentació del model SIR formulat pels matemàtics William Kermack i A.G. McKendrick ara fa uns seixanta anys.

El model fa referència als tres possibles estats inicials que qualsevol membre d'una població pot presentar:

S	→	Susceptible	→	Individu vulnerable a la infecció
I	→	Infecta	→	Individu infectat o infectiu (pot infectar a d'altres)
R	→	Recuperat	→	Individu recuperat o que no suposa amenaça (mort)

El procediment és el següent:

Les noves infeccions es produeixen quan un individu infectiu entra en contacte amb un individu susceptible. En aquest punt, el susceptible pot passar a ser infectat amb una probabilitat que ve determinada per les característiques infeccioses de la malaltia i per les característiques de l'individu susceptible, que depenen de factors com l'edat, la immunitat i l'estat de salut general.

La versió SIR estàndard de Kermack – McKendrick suposa que les interaccions entre els individus es produeixen d'una mode aleatori i no té en compte la xarxa d'associacions de la població. Es parla, llavors, de **MODELS DETERMINÍSTICS**, en què la probabilitat que un individu infectiu en trobi un de susceptible només la determina la mida de les dues poblacions (infectius i susceptibles).

Si, pel contrari, es considera la xarxa de contactes de la població, el problema és diferent i parlarem de **MODELS ESTOCÀSTICS**. En aquest cas, les persones susceptibles es dividiran en petits grups que interactuaran de manera estreta (famílies, grups d'alumnes,..), la qual cosa fa que, un cop s'ha infectat un individu del grup, la malaltia avançarà més ràpid dins d'ell, atès que els contactes entre individus del grup són més habituals. A més, aquests individus ja infectats interactuaran amb membres d'altres grups (a l'escola, al pavelló esportiu,..) en centres de reunió, la qual cosa possibilitarà que la malaltia avanci a un nou grup i així successivament dins la població general.

El meu objectiu és comparar les diferències entre els dos models, a partir d'una simulació, per la qual cosa exposaré, a continuació, els models matemàtics corresponents.

6.2. Models determinístics

6.2.1. Model SIR

El model determinístic més senzill és el model SIR, en què es considera la disminució del nombre de susceptibles per raó de recuperació, aïllament o mort, però no es tenen en compte factors com són el nombre de naixements i de defuncions, la política de vacunacions, viatges,... El model és el següent:

- Inicialment ($t=0$), hi ha $N+a$ individus, dels quals "N" són susceptibles i "a" estan infectats. Segons això, la condició inicial $S(0) = N$, $I(0)=a$ i $R(0)=0$.
- El grup d'individus està barrejat de forma homogènia (no es considera l'existència de grups d'individus molt connectats dins la població).
- Les equacions del model són les següents

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad \beta = \text{Taxa de contagi}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad 1/\gamma = \text{Temps promig d'infecció}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad S = \text{Susceptibles} \quad I = \text{Infectius}$$

$$N = S + I + R \quad R = \text{Recuperats} \quad N = \text{Població}$$

- **Ritme reproductiu bàsic:** En la difusió d'epidèmies, el valor de l'anomenat ritme reproductiu bàsic defineix la condició d'epidèmia. Es calcula mitjançant la fórmula:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

Si $R_0 > 1$ llavors s'entén que estem davant d'una epidèmia. Si l'epidèmia es difon a diverses àrees geogràfiques, llavors parlem de pandèmia.

6.2.2. Model SIR: Simulació a la ciutat de La Glòria.

El virus de la grip A (H1N1) a la població de La Glòria, Estat de Veracruz (Mèxic). Any 2009.

Als inicis del mes de març de 2009 es va iniciar una epidèmia de grip que va afectar al 60% dels habitants del municipi de La Glòria, situat a l'Estat de Veracruz, Mèxic. Aquest municipi es troba prop d'una gran explotació ramadera de porcs (es crien aproximadament un milió de porcs a l'any) i, per aquest motiu, es va pensar que la nova grip podria tenir a veure amb l'anomenada grip del porc, tot i que la granja vacunava els animals i els treballadors no mostraven símptomes de malaltia relacionats. A principis d'abril de 2009 es va detectar un nou cas a la capital de l'Estat, Veracruz, i poc després a altres Estats de Mèxic, als Estats Units, Canadà i a d'altres zones del món com a conseqüència dels viatges duts a terme per la població d'origen.



La Glòria va ser considerada la “zona zero” de l’epidèmia que, més tard, va fer que l’OMS (Organització Mundial de la Salut) decidís activar el nivell 5 (en una escala d’un a sis) d’alerta sanitària. L’anomenat pacient zero va ser un nen de cinc anys, anomenat Edgar Hernández, que sortosament va sobreviure a la malaltia.

La Glòria tenia, en aquells moments, 2100 habitants. Les dades de difusió de la malaltia⁴ van ser les següents:

Temps (dies)	2	3,5	5,5	8	14	18	24
Infectats	210	612	1278	1000	561	344	269

Per aplicar el model SIR necessitem dos paràmetres bàsics:

- **Taxa de contagi β** : És la probabilitat que un susceptible es contagii quan té contacte amb un infectiu (taxa d’infeccions secundàries).
- **Taxa de recuperació γ** : Taxa amb la qual els infectius es recuperen o moren, i per tant, deixen de ser infectius. En el cas de la grip – A (H1N1) aquest període és de 4 dies.

Els càlculs d’ambdós paràmetres poden ser molt complicats i, sovint, basats en dades de caràcter experimental. Per al cap de la grip – A (H1N1) aquests valors⁵, calculats per un equip d’investigadors de la Universitat Autònoma de Mèxic, són:

$$\beta = 0.0009625 \quad \gamma = \frac{1}{4} = 0.25$$

A continuació, s’aplica el model SIR per a la grip A i es comparen amb les dades reals de difusió al municipi de La Glòria. Per aconseguir-ho, i atès que no sé treballar amb equacions diferencials, he aplicat un mètode incremental per fer el seguiment de les equacions del model.

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t$$

$$I(t + \Delta t) = I(t) + (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))\Delta t$$

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t)\Delta t$$

Per tal que aquesta aproximació funcioni correctament cal un valor $\Delta t > 0$, és a dir un valor relativament proper a zero. En aquest cas he adoptat $\Delta t = 1/32$, seguint els consells d’un exemple bibliogràfic⁶, i he fet servir les fórmules anteriors amb un full de càlcul d’Excel, del qual es mostra, a continuació, una part (veure full complet a l’annex 5):

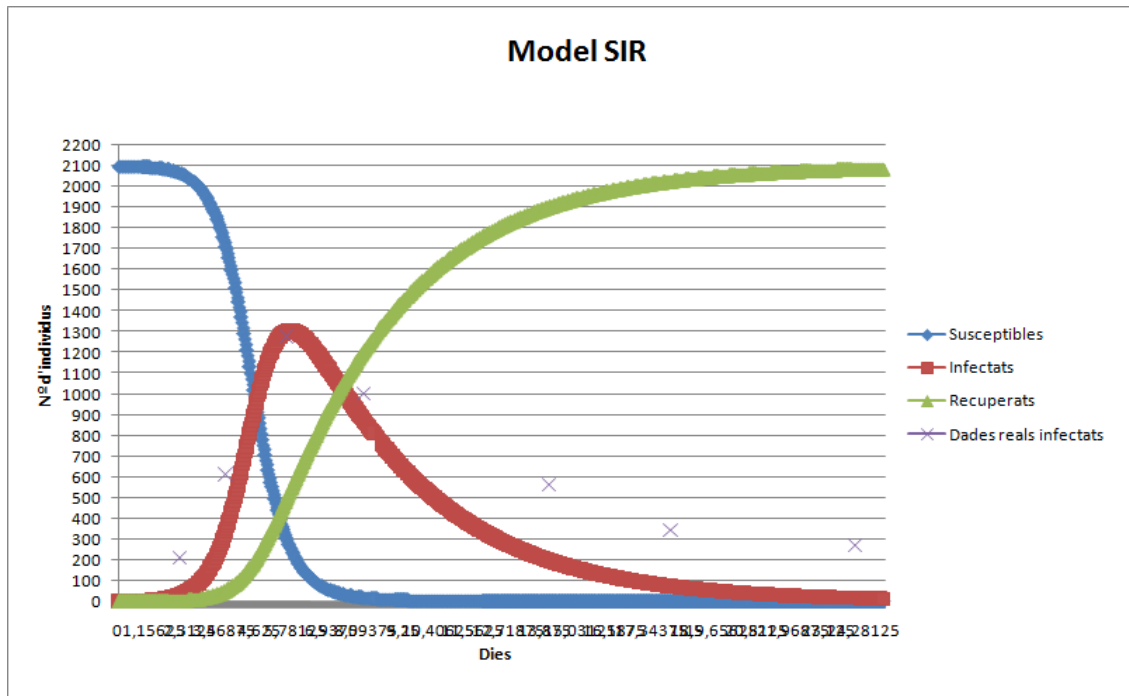
⁴ Hekademus, revista científica de la FIEE, Volum número 4, abril de 2009

⁵ MODELOS DETERMINÍSTICOS Y ESTOCÁSTICOS S-I Y S-I-R PARA DIFUSIÓN DE ENFERMEDADES CONTAGIOSAS (Julio Mauricio Fajardo Patiño – Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

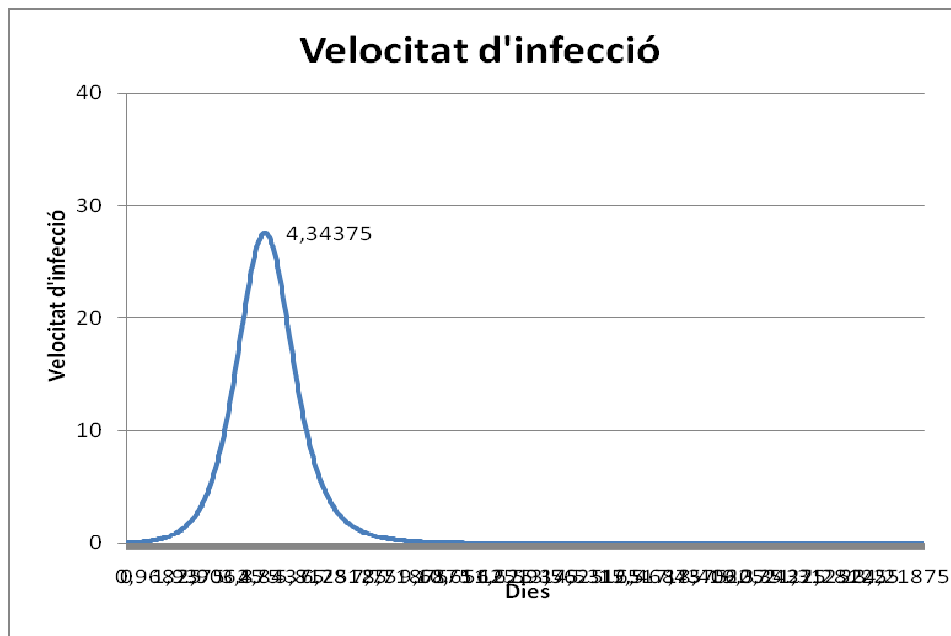
⁶ MATLAB Programs for Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences and Population Mathematics (Frank Hoppensteadt)

DIA NÚMERO	SUSCEPTIBLES	INFECTATS	RECUPERATS	POBLACIÓ TOTAL	VELOCITAT D'INFECCIÓ	VELOCITAT DE RECUPERACIÓ
0	2099	1	0	2100	0,063	0,008
0,0313	2098,937	1,055	0,008	2100	0,067	0,008
0,0626	2098,870	1,114	0,016	2100	0,070	0,009
0,0939	2098,800	1,176	0,025	2100	0,074	0,009
0,1252	2098,725	1,241	0,034	2100	0,078	0,010
1,9719	2066,497	29,451	4,053	2100	1,833	0,230
2,0032	2064,663	31,054	4,283	2100	1,932	0,243
2,0345	2062,732	32,742	4,526	2100	2,035	0,256
2,0658	2060,697	34,521	4,782	2100	2,143	0,270
3,8812	1464,089	542,748	93,164	2100	23,939	4,247
3,9125	1440,150	562,440	97,411	2100	24,402	4,401
3,9438	1415,747	582,441	101,812	2100	24,842	4,558
3,9751	1390,906	602,725	106,369	2100	25,256	4,716
5,5401	282,518	1303,919	513,564	2100	11,098	10,203
5,5714	271,420	1304,813	523,767	2100	10,669	10,210
5,6027	260,751	1305,273	533,977	2100	10,253	10,214
5,634	250,497	1305,312	544,191	2100	9,851	10,214
5,6653	240,646	1304,949	554,405	2100	9,461	10,211
5,6966	231,186	1304,198	564,616	2100	9,083	10,205
8,8892	9,386	707,157	1383,457	2100	0,200	5,534
8,9205	9,186	701,824	1388,990	2100	0,194	5,492
8,9518	8,992	696,526	1394,482	2100	0,189	5,450
16,7142	0,868	101,157	1997,975	2100	0,003	0,792
16,7455	0,866	100,368	1998,767	2100	0,003	0,785
16,7768	0,863	99,585	1999,552	2100	0,003	0,779

El gràfic SIR (Susceptibles – Infectats – Recuperats) que s'obté, és el següent:



El gràfic que es refereix a l'evolució de la velocitat d'infecció:



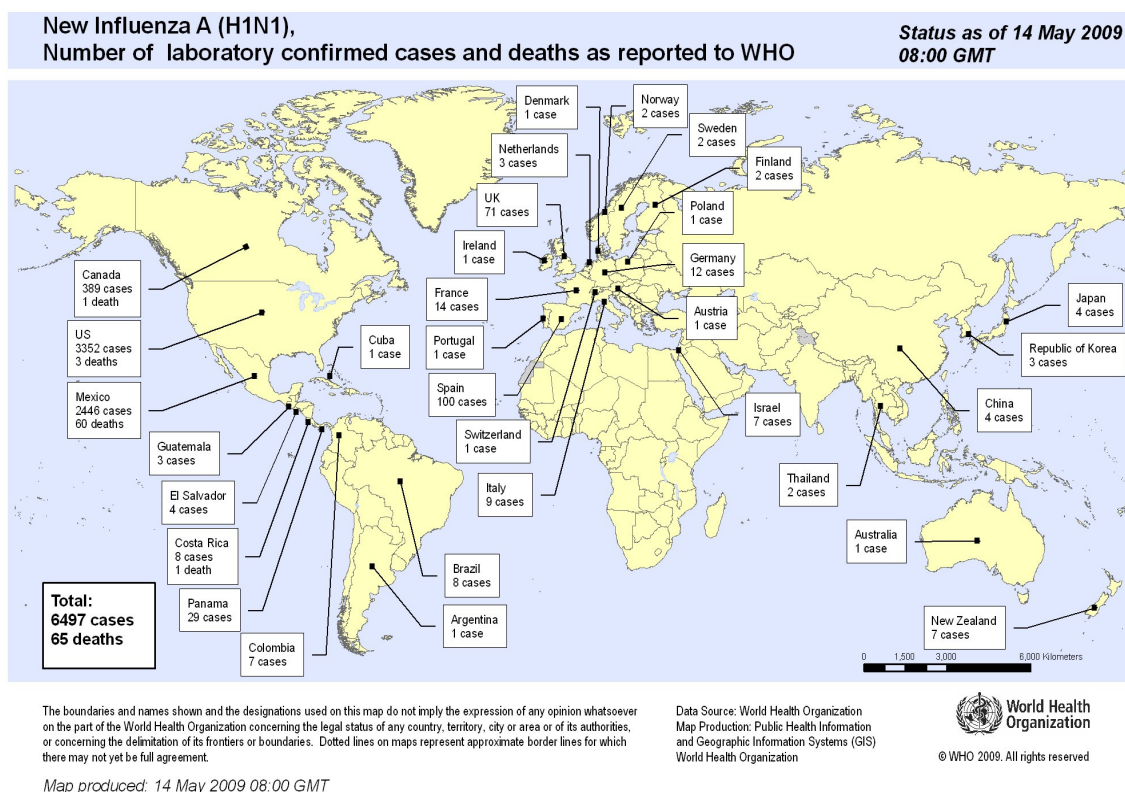
A la primera gràfica es veu que l'ajustament existent entre el nombre d'infectats reals i el pronosticat pel model no és gaire bo, en particular per als darrers valors. Tanmateix, està ben pronosticat el nombre màxim d'infectats (al voltant de 1305 individus) i el moment en què es produeix aquest pic màxim infectiu (entre el cinquè i el sisè dia).

El moment en què la malaltia avança més ràpidament, és a dir aquell en el qual s'infecten més individus per unitat de temps considerat, es troba entre el quart i el cinquè dia (4,3475), com es pot veure a la gràfica que indica l'evolució de la velocitat d'infecció al llarg del temps.

En el cas estudiat, la població infectada va arribar al 60% i el ritme de reproducció bàsic era:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma} = \frac{0.0009625 \times 2100}{0.25} = 8.085 > 1,$$

És a dir, era molt superior al valor llindar de difusió epidèmica. Segons els valor obtinguts, i atès a la ràpida difusió de la malaltia a diverses àrees geogràfiques del món, l'alarma inicial de l'OMS (Organització Mundial de la Salut) era totalment lògica. A més, s'afegien les particulars característiques de la malaltia que afectava a grups d'edat molt concrets, com el de la població jove (curiosament la població major de 69 anys no solia agafar la malaltia perquè estava immunitzada per un brot d'una grip de característiques similars als anys 50 del segle XX). Estudis posteriors van establir el valor de R_0 en 1,4 durant la fase exponencial de creixement de la malaltia, i uns índexs de mortalitat baixos. Les estratègies posteriors de vacunació de poblacions de risc i qüestions de caire estacional van fer minvar l'alarma i l'OMS va declarar l'entrada en l'anomenada fase post-pandèmica el mes d'agost de 2010. Tanmateix, en el seu comunicat⁷ l'OMS afirmava que en determinades zones geogràfiques entre el 20% i el 40% de la població estava infectada.



http://www.who.int/csr/don/h1n1_20090514_0800.jpg

⁷ http://www.who.int/mediacentre/news/statements/2010/h1n1_vpc_20100810/es/index.html

6.3 Models estocàstics o probabilístics

Com he dit a l'inici d'aquest apartat el model SIR aplicat és determinístic, és a dir, no té en compte la xarxa social existent. La pregunta és clara: Si la tinguéssim en compte, els gràfics s'ajustarien millor o pitjor a la realitat?

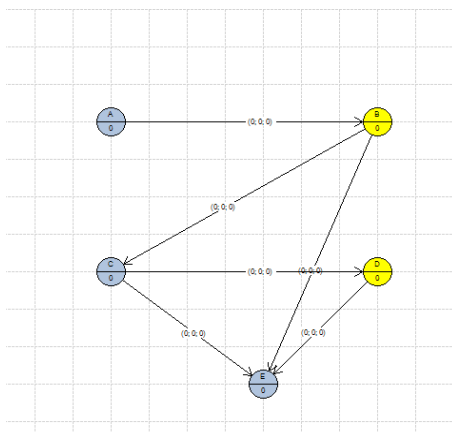
Els models determinístics són molt útils en l'estudi de la difusió epidèmica en poblacions relativament grans però no són del tot satisfactoris si la població és petita. En poblacions petites, els models estocàstics són millors, atès que permeten analitzar com els comportaments individuals afecten a la difusió de l'epidèmia, a partir dels seus contactes a la xarxa.

Hi ha diversos models probabilístics de difusió d'epidèmies. El més senzill és el model de Reed-Frost. Una versió adaptada de la progressió d'una malaltia amb aquest model es pot realitzar amb els passos següents:

- Es posa inicialment un dels nodes en estat infectat i els altres en estat susceptible.
- Per a cada temps successiu cada veí del node infectat pot ser infectat amb una taxa de contagi β i cada infectat passar a recuperat si es supera el període infectiu γ que en el cas de la grip H1N1 és de 4 dies.

Exemple

Si es considera la xarxa dibuixada al marge esquerra, la seva matriu d'adjacència és:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'evolució, generada amb EXCEL i nombres aleatoris de la infecció, seria la donada per la següent taula:

	A	B	C	D	E	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
A	0	1	0	0	0	S	S	S	S	S	S	S
B	1	0	1	0	1	I	I	I	I	R	R	R
C	0	1	0	1	1	S	I	I	I	I	R	R
D	0	0	1	0	1	S	S	I	I	I	R	R
E	0	1	1	1	0	S	S	I	I	I	I	R
Vector d'infecció -1						0,40920277	0,13315274	0,24925383	0,28052519			
Vector d'infecció -2												
Vector d'infecció -3						0,90434167						
Vector d'infecció -4							0,67206073					
Vector d'infecció -5						0,34219073	0,80929055					

Aquest model és aplicable a l'epidèmia de grip A que abans hem analitzat amb el model SIR al municipi de La Glòria. Per fer-ho, i atès que no conec la matriu de contactes existent en aquell moment al municipi, una solució consisteix en crear una xarxa, en aquest cas de món petit, mitjançant un programa informàtic i aplicar el model. La xarxa generada tindrà 2100 nodes, grau promig 4, i multitud d'arestes, per la qual cosa és inviable fer-ho reproduint els càlculs anteriors realitzats amb EXCEL.

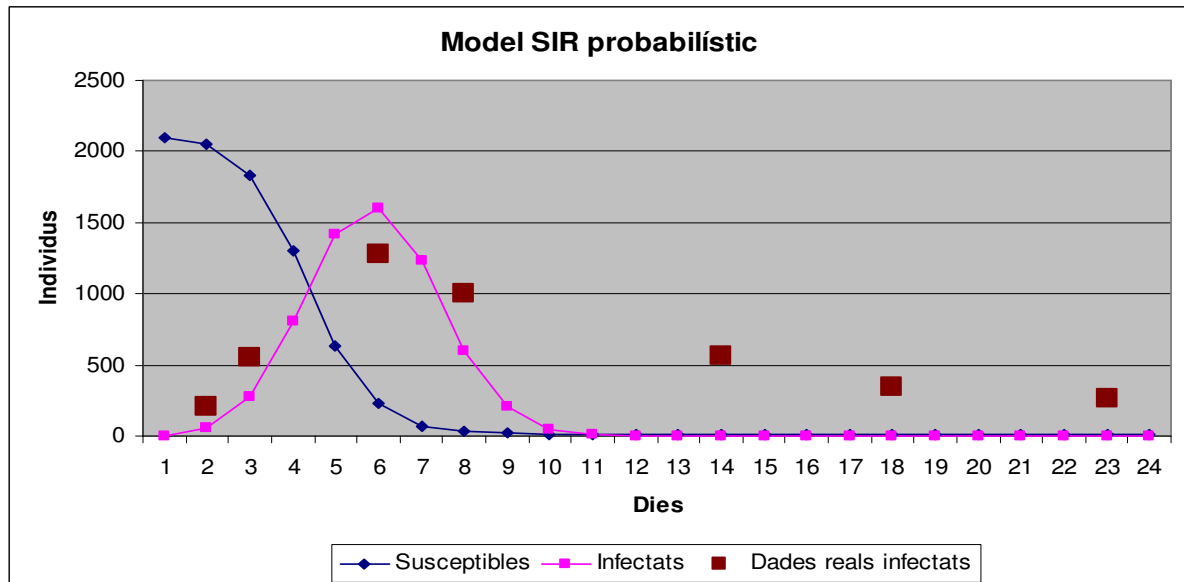
Per solucionar aquest inconvenient vaig demanar ajuda a una estudiant de matemàtiques de la Universitat de Barcelona que tenia coneixements de Matlab. Ella va escriure el programa que es pot veure als annexos (Annex 3).

Es van considerar els següents paràmetres:

- 25 períodes d'un dia.
- Cada persona infectada contagia la malaltia, de promig, a dues persones diàriament.
- Les persones es recuperen quatre dies després de l'inici del període infectiu.

Els resultats van ser els següents:

Susceptibles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	2099	2046	1828	1297	628	233	65	29	21	16	16	16
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Infectats	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	54	272	802	1418	1605	1232	599	202	48	13	5
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Recuperats	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	0	0	1	54	272	803	1472	1877	2079	2083	2084
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084	2084



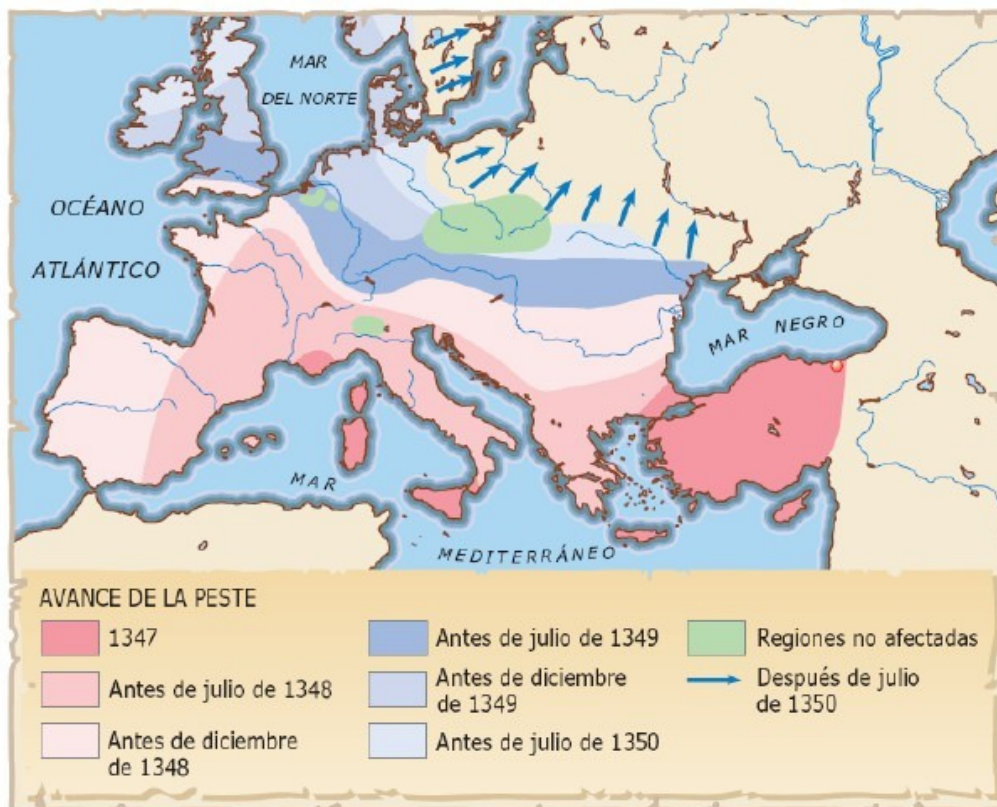
El gràfic resultant s'ajusta, en aquest cas, pitjor a la gràfica del model SIR estocàstic. Podem dir, doncs, que es basa en una xarxa construïda per programa, atès que no era coneguda la xarxa de contactes reals i s'han establert condicions inicials (grau promig) que caldria verificar.

6.4. Difusió d'epidèmies

L'estudi anterior feia referència a l'evolució local de l'epidèmia de grip H1N1 al municipi on es va originar. Com sabem, l'epidèmia es va difondre a pràcticament tot el món degut a l'evolució dels mitjans de transport i comunicació d'avui en dia. És precisament aquesta una qüestió que preocupa molt als sistemes nacionals de salut i a la Organització Mundial de la Salut. Nombroses pel·lícules han tractat aquest tema, des de *Resident Evil a 28 dies després* i, més recentment, la pel·lícula *Contagi*. En totes elles es planteja la difusió d'un virus altament contagiós entre la població mundial. Aquest és un fet important i, de fet, només les malalties més infeccioses acaben desenvolupant-se com a veritables epidèmies. Fins i tot en aquest cas, avançaran d'una forma lenta, donant temps a les autoritats sanitàries per a reaccionar i delimitar àrees o col·lectius on centrar les seves actuacions.

Un exemple és la pesta negra que va assolar Europa el segle XIV. Va començar en una ciutat italiana (es pensa que va arribar al seu port en un vaixell procedent de la Xina) i després es va propagar de la manera indicada en el mapa següent.

La expansión de la peste negra en el siglo XIV



<http://www.dipity.com/zlm/Al-ndalus/>

La malaltia era transportada per rates infestades de puces, les portadores de la pesta. Com que el mecanisme de transport, les rates, no representaven un mecanisme ràpid de difusió, el front de la malaltia va tardar tres anys, entre el 1347 i el 1350, a difondre's per tota Europa.

Malauradament, com es deia al començament, avui en dia hi ha mitjans de transport millors que les rates. En aquest context preocupen, especialment, els aeroports, atès que els viatges nacionals, continentals i intercontinentals poden facilitar la difusió ràpida d'una epidèmia a zones molt allunyades del seu focus inicial.

Intentar modelar la difusió d'una epidèmia a través d'una xarxa d'aeroports és realment una tasca molt complexa. Hi ha, però, alguns programes que resulten de gran utilitat en aquesta qüestió i que recullen bona part de les experiències acumulades al llarg de la història. A continuació, només a efectes de coneixement, es fa referència als més importants i coneguts.

6.4.1. Global epidemic model (GEM)

El model d'epidèmia mundial (GEM) utilitza les dades de les aerolínies de viatge i les dades de població de diverses fonts nacionals per crear una xarxa de transport aeri realista entre les àrees metropolitanes més importants del món. Es pot accedir a un programa que aplica GEM a la pàgina https://www.epimodels.org/midas/portal/modeling/global_equation_Applet.html, on hi podem trobar un applet que simula la difusió del virus de la grip H5N1 a través d'una xarxa de 155 aeroports.

6.4.2. TranStat

És un programa desenvolupat a la Universitat de Washington que va ser desenvolupada per permetre als investigadors de camp analitzar els brots de caràcter local. Una pàgina WEB de referència és <https://www.epimodels.org/midas/transtat.do>.

6.4.3. STEM (Spatio Temporal Epidemic Modeler)

Aquest simulador és, probablement, el millor actualment disponible. Simula la difusió d'una epidèmia a través de les xarxes de comunicació, des dels aeroports a les carreteres passant pels trajectes ferroviaris, a partir de dades pràcticament de caràcter mundial. El seu mode de funcionament té en compte les dades de difusió d'epidèmies que han ocorregut al llarg de la història i de les quals es disposa d'informació suficient. La seva operativitat és molt complexa, però ens podem fer una idea aproximada amb un vídeo disponible a l'adreça de Youtube: <http://www.youtube.com/watch?v=LfiibQX4IFE> (en anglès).

6.5 TRANSMISSIÓ D'UNA MALALTIA PER LA XARXA AÈRIA

6.5.1. Objectiu

El meu tutor de treball de recerca em va proposar, com a part final d'aquest treball, intentar modelar la difusió d'una epidèmia a través d'una xarxa d'aeroports. L'objectiu de la pràctica és calcular la probabilitat de transmissió d'una malaltia entre ciutats a través de la xarxa aèria.

La probabilitat de transmissió d'una malaltia entre dues ciutats és el resultat del producte de probabilitats entre la probabilitat de viatjar i la probabilitat estar infectat per la malaltia. En conseqüència, és necessari calcular prèviament aquestes dues probabilitats.

$$\text{Probabilitat de transmissió} = \text{Probabilitat de viatjar} \cdot \text{Probabilitat d'infecció}$$

6.5.2. Probabilitat de viatjar

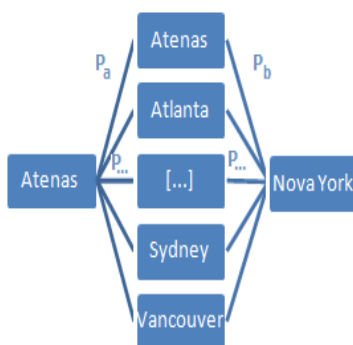
Inicialment, a la fulla "Viatgers" he dibuixat una matriu amb el nombre de viatgers que hi ha entre trenta dels principals aeroports del món en el període de temps de un dia. Al costat es troba el total de viatgers que hi ha a cada aeroport.

La fulla "Prob. Dia 1" conté la matriu que ens indica la probabilitat de viatjar d'una ciutat a una altra. Per calcular-ho s'ha utilitzat la següent fórmula:

$$\text{Probabilitat de viatjar entre ciutats} = \frac{\text{Nombre de viatgers entre ciutats}}{\text{Total de viatgers de l'aeroport}}$$

Seguidament, com es pot observar a la fulla "Prob. Dia 2", he calculat la probabilitat de viatjar entre dues ciutats en dos dies, és a dir, fent escala a una ciutat, tot i que s'ha suposat que únicament es pot fer un viatge per dia. Per calcular aquesta probabilitat he determinat, primerament, la probabilitat de viatjar de l'aeroport origen a qualsevol altre aeroport del món (en aquest cas dels trenta seleccionats) i, a continuació, la probabilitat de viatjar d'aquests aeroports escala al destí final. El producte d'aquestes dues probabilitats donarà com a resultat la probabilitat d'arribar al destí final passant per l'aeroport escala i la suma d'aquests productes la probabilitat de viatjar entre dues ciutats en dos dies.

$$\text{Probabilitat de viatjar entre ciutats en 2 dies} = P_A \cdot P_B + P_{...} \cdot P_{...} + P_X \cdot P_Z$$



Seguidament s'exemplifica el procés descrit a través de la probabilitat de viatjar d'Atenas a Nova York en dos dies:

El producte de la probabilitat $P_A \cdot P_B$ serà igual a la probabilitat de viatjar a Nova York fent escala a Atenas, o bé en aquest cas no fent-ne. Si procedim anàlogament i realitzem la suma obtenim la probabilitat de viatjar d'Atenas a Nova York en dos dies. Aquesta probabilitat és igual a 0,37873.

6.5.3. Probabilitat d'infecció

La probabilitat d'infecció és un valor propi de cada malaltia. És difícil determinar-la amb exactitud ja que depèn de molts factors com el clima, l'època de l'any, el col·lectiu al qual afecta, l'estat de salut de l'individu,...

La probabilitat d'infecció, en funció del temps, és igual al nombre d'infectats en un moment t dividit entre la població total d'un territori delimitat, en aquest cas la població global.

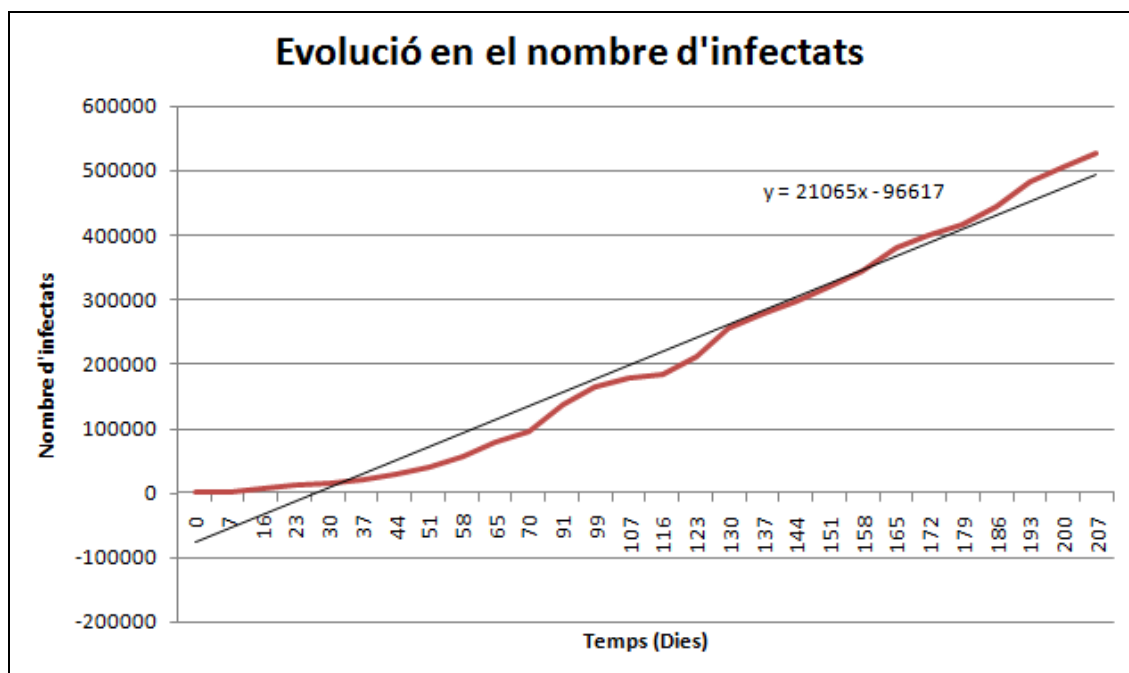
$$\text{Probabilitat d'infecció} = \frac{\text{N}^\circ \text{ d'infectats}(t)}{\text{Població global}}$$

Per calcular la probabilitat d'infecció de la grip A, primerament, vaig fer una recerca del nombre d'infeccions en funció del temps, generalment amb intervals de temps d'una setmana.

En un principi, la taula únicament incloïa les infeccions en funció de la data però, per facilitar la visualització, vaig afegir una columna que indicava el dia partint de $t=0$. Els dies es van determinar calculant l'increment entre dates.

	A	B	C	D
1				
2		Dia	Data	Infectats
3		0	27/04/2009	46
4		7	04/05/2009	1085
5		16	13/05/2009	5728

A continuació, vaig realitzar una gràfica que mostra el nombre d'infectats en funció dels dies. Mitjançant una línia de tendència es determina l'equació, en aquest cas lineal, que ens dona com evoluciona la gràfica. Aquesta equació ens permetrà pronosticar el nombre d'infectats en dies més enllà dels present al gràfic (veure annex 6).



Aquesta gràfica planteja dos problemes:

1. L'equació donada per la línia de tendència és incorrecte, els valors de la línia de tendència dibuixada no corresponen als de l'equació donada. A més a més, aquesta equació té un marge d'error massa gran. Per solucionar aquest problema vaig calcular la línia de tendència fent servir el programa SPSS, un programa d'estadística més complet, que ens va calcular l'equació polinòmica següent que si s'ajusta als valors reals i té un marge d'error relativament petit.

$$y = 9,0601x^2 + 793,792x - 12982$$

2. Les línies de tendència són representacions gràfiques de l'evolució de les dades per realitzar prediccions a llarg termini. En aquest cas, els valors inicials de la línia de tendència no s'ajusten a les dades reals però, com aquestes dades ja les tenim, no és necessari utilitzar els valors de la línia de tendència. En el nostre cas els primers valors de la línia de tendència són negatius fins al dia 15 aproximadament i, per això, serà necessari utilitzar els valors reals. Si no utilitzéssim els valors reals obtindríem una probabilitat d'infecció negativa.

La probabilitat d'infecció s'ha calculat a la fulla "Prob. d'infecció" seguint l'equació descrita a la pàgina anterior. Per tal de solucionar els problemes descrits anteriorment he realitzat dues columnes: a la primera d'elles trobem el nombre d'infectats reals fins al dia 30 i en l'altre els estimats per la línia de tendència, i s'ha utilitzat la funció SI per indicar quin valor utilitzar per calcular la probabilitat.

- SI(Prueba_lògica;valor_si_verdadera;valor_si_falso)

La funció SI comprova si es compleix una condició, en cas afirmatiu utilitza un valor i en el cas negatiu un altre. En el nostre cas per dies anteriors a 30 utilitzarà el nombre d'infectats reals i en el cas contrari els estimats.

Finalment, com havíem explicat anteriorment el nombre d'infectats es dividirà per la població global (G33= 6840507000).

	A	B	C	D	E
1					
2		Dia	Nº Inf. Reals	Nº Inf. estimats	
3		15	5212	963	
4					
5		Probabilitat d'infecció			
6				7,6E-07	

6.5.4. Probabilitat de transmissió

La fulla “Recull de dades” conté el resultat final de la pràctica, és a dir, la funció que determina la probabilitat de transmetre la grip A entre ciutats mitjançant la xarxa aèria.

Probabilitat de viatjar entre dues ciutats en 1 dia		
Barcelona	Londres	0,1667
Probabilitat de viatjar entre dues ciutats en 2 dies		
Barcelona	Londres	0,50655
Probabilitat d'infecció		
Dia		
15	7,6E-07	

Probabilitat de transmissió		
Dia	Origen	Destí
15	Barcelona	Londres
1,27048E-07		

El quadrat de la **probabilitat de transmissió** permet escollir el dia, l'aeroport origen i la destinació. Un cop seleccionats aquests tres paràmetres calcula la probabilitat de transmissió de la malaltia.

L'origen i el destí es seleccionen d'entre les possibilitats d'una llista desplegable, d'aquesta manera es facilita l'accés a aquestes dades. Les llistes s'han creat a través de la ruta:

Dades > Validació de dades > Validació de dades > Permetre: Llista > Origen: x

Els aeroports escollits també apareixeran en els requadres de la probabilitat de viatjar en un i en dos dies, ja que H7=B2=B6 i I7=C2=C6. Ambdues probabilitats variaran en funció dels aeroports escollits.

- La **probabilitat de viatjar entre dues ciutats en 1 dia** correspon als valors de la matriu de la fulla “Prob. Dia 1”. El valor desitjat de la taula es troba utilitzant BUSCARV, una funció que facilita la recerca de les dades.

- BUSCARV(Valor_buscado;Matriz_buscar_en;Indicador_columnas;Ordenado)

Partint de la matriu escollida, es buscarà a la primera columna de la matriu la fila corresponent al valor buscat i dins d'aquesta fila la columna escollida a l'indicador de columnes. El valor *ordenado* serà *falso* per poder trobar la coincidència exacta.

En el nostre cas, el valor buscat serà l'aeroport origen. Es seleccionarà la fila corresponent a aquest aeroport dins la matriu de probabilitats del dia 1. L'indicador de columnes hauria de ser un número però, per tal de poder utilitzar un aeroport, realitzarem un altre BUSCARV amb una matriu que relaciona números amb ciutats que es troba a la fulla “Prob. Dia 1”. Finalment, donarem el valor ordenat de *falso*.

- La **probabilitat de viatjar entre dues ciutats en 2 dies** correspon al valor de la casella F3:G32, on es troba el resultat del procés per calcular aquesta probabilitat descrit anteriorment.

El tercer paràmetre a determinar és el dia que, com s'ha explicat anteriorment, variarà el nombre d'infectats i , per tant, la probabilitat d'infecció.

Un cop s'han determinat tots els paràmetres (Dia, origen i destí) i , en conseqüència, tenim els valors de les diverses probabilitats és necessari relacionar-les mitjançant l'equació descrita al inici de la pràctica.

$$\text{Probabilitat de transmissió} = \text{Probabilitat de viatjar} \cdot \text{Probabilitat d'infecció}$$

A l'hora de multiplicar les dues probabilitats ens trobem amb diversos problemes relacionats amb quina probabilitat de viatjar escollir:

- És necessari indicar que el dia 1 la probabilitat serà probabilitat de viatjar entre dues ciutats en 1 dia i per el dia 2 el mateix.
- El procés per calcular la probabilitat de viatjar entre dues ciutats és torna massa llarg i laboriós a partir del dia 3. És per això que més endavant del dia 2, la probabilitat serà igual a la probabilitat el dia 1 multiplicada pel dia corresponent.
- Un problema generat per la solució donada al problema anterior és que si la probabilitat el dia 1 és igual a zero també ho serà els altres dies. Això no és del tot cert ja que el dia 2 la probabilitat serà diferent a zero i, per tant, el dia tres també ha de ser diferent a zero. La solució ha aquest problema serà especificar que quan la probabilitat el dia 1 sigui igual a zero, en dies diferents a zero la probabilitat serà igual a la probabilitat el dia 2 dividida entre dos i multiplicada per dia corresponent.

Totes aquestes condicions s'aniran especificant mitjançant funcions SI que s'encavalcaran. La funció final que resultarà de especificar totes aquestes condicions serà:

$$y = \text{SI}(G7=2; D6C10; \text{SI}(G7=1; D2*C10; \text{SI}(D2=0; G7(D6/2); D2)*C10))$$

6.6. MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES

6.6.1. Simulació sense restriccions de viatge

A partir de la pàgina WEB de Global Epidemic Model vaig aconseguir les dades del nombre promig de viatgers entre les 155 ciutats que es tenen en compte en aquest programa i vaig seleccionar-ne vint-i-cinc. El procediment emprat per modelar la difusió epidèmica és el següent:

- Per a cadascuna de les ciutats es calcula la probabilitat de que un individu seleccionat a l'atzar viatgi des d'una ciutat A cap a una altra ciutat B. Aquesta probabilitat és:

$$P_{A \rightarrow B} = \frac{\text{Nombre promig diari de viatgers (Ciutat A} \rightarrow \text{B)}}{\text{Població de la ciutat A}}$$

- Per a cada increment de temps considerat, i per a cadascuna de les ciutats, es calcula el nombre probable de susceptibles, infectats i recuperats que viatgen des de la ciutat A cap a la ciutat B

$$N^{\circ} \text{ viatgers susceptibles}_{A \rightarrow B} = (N^{\circ} \text{ Susceptibles A}) \times P_{A \rightarrow B}$$

$$N^{\circ} \text{ viatgers infectats}_{A \rightarrow B} = (N^{\circ} \text{ Infectats A}) \times P_{A \rightarrow B}$$

$$N^{\circ} \text{ viatgers recuperats}_{A \rightarrow B} = (N^{\circ} \text{ Recuperats A}) \times P_{A \rightarrow B}$$

- Partint d'una ciutat, que es pot escollir a voluntat, com a punt de partida de la infecció, s'aplica el model epidèmic SIR a les diverses ciutats a partir del moment en què reben un viatger infectat. Es pot observar que a la ciutat on comença la infecció, l'ona epidèmica s'inicia en $t=0$, mentre que en les altres ciutats s'inicia més tard, a partir del moment en el qual comencen a rebre viatgers infectats.
- En els fulls d'EXCEL utilitzats per desenvolupar la idea anterior es considera un període epidèmic d'un any (365 dies) i càlculs dia a dia. El nombre d'habitants de cadascuna de les ciutats es dóna en milers, per tal d'aconseguir que els resultats siguin correctes (com ja s'ha explicat anteriorment, el model desenvolupat amb EXCEL treballa de forma incremental i els càlculs poden donar resultats incorrectes en funció de la relació existent entre el nombre d'habitants i el període incremental escollit).
- El model no considera cap tipus de restricció (restriccions de viatges, polítiques de vacunació...).

A la pàgina següent es mostra una part dels fulls de càlcul d'EXCEL que s'han fet servir per a la simulació de la difusió epidèmica (el nombre d'individus es dóna en centenars per garantir uns càlculs correctes). Les equacions que s'han fet servir en la seva construcció són les següents:

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(t)p_{i \rightarrow j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N S(t)p_{j \rightarrow i}$$

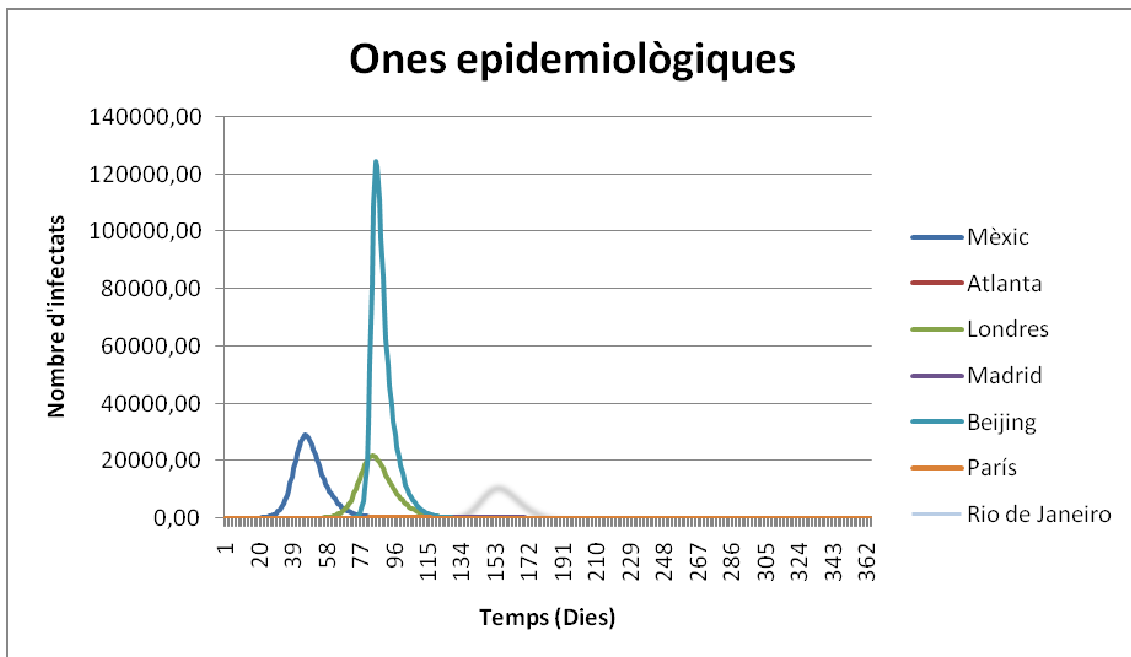
$$I(t + \Delta t) = I(t) + (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))\Delta t - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N I(t)p_{i \rightarrow j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N I(t)p_{j \rightarrow i}$$

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t)\Delta t - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(t)p_{i \rightarrow j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N S(t)p_{j \rightarrow i}$$

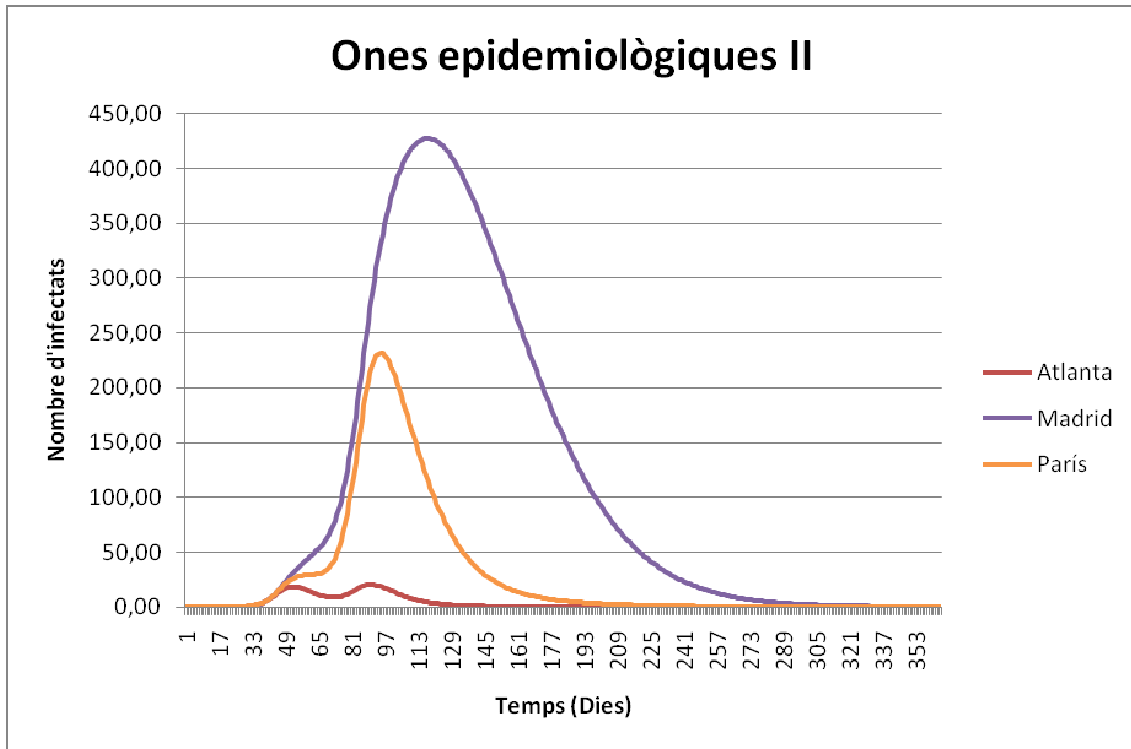
Dia	Ciutat de Mèxic			Viatgers (Mèxic a Atlanta)			Viatgers (Mèxic a Londres)		
	Susceptibles	Infectats	Recuperats	Susceptibles	Infectats	Recuperats	Susceptibles	Infectats	Recuperats
1	88509,80	1,00	0,00	8,82	0,00	0,00	1,72	0,00	0,00
2	88509,36	1,30	0,14	8,82	0,00	0,00	1,72	0,00	0,00
3	88508,78	1,69	0,33	8,82	0,00	0,00	1,72	0,00	0,00
4	88508,03	2,20	0,57	8,82	0,00	0,00	1,72	0,00	0,00
5	88507,06	2,85	0,88	8,82	0,00	0,00	1,72	0,00	0,00
19	88346,19	111,75	52,86	8,81	0,01	0,00	1,72	0,00	0,00
20	88296,84	145,14	68,82	8,81	0,01	0,00	1,72	0,00	0,00
21	88232,79	188,46	89,56	8,80	0,02	0,00	1,72	0,00	0,00
22	88149,69	244,63	116,48	8,78	0,02	0,01	1,72	0,00	0,00
23	88041,94	317,44	151,41	8,77	0,03	0,02	1,72	0,00	0,00
24	87902,31	411,76	196,73	8,76	0,04	0,02	1,72	0,00	0,00
25	87721,49	533,80	255,51	8,74	0,05	0,03	1,71	0,01	0,00
26	87487,57	691,53	331,70	8,72	0,07	0,03	1,71	0,01	0,00

Es pot veure que la infecció s'inicia a Ciutat de Mèxic, amb una població inicial de 8850980 habitants i 100 infectats. L'epidèmia es comença a difondre en aquesta ciutat i arriba un moment, el dia 19, en el qual un dels viatgers que visiten Atlanta estarà (sempre en termes de probabilitat) infectat i seran qui provoqui l'inici de la difusió epidèmica en aquesta ciutat. Així mateix, el primer infectat a Londres arriba el dia 25.

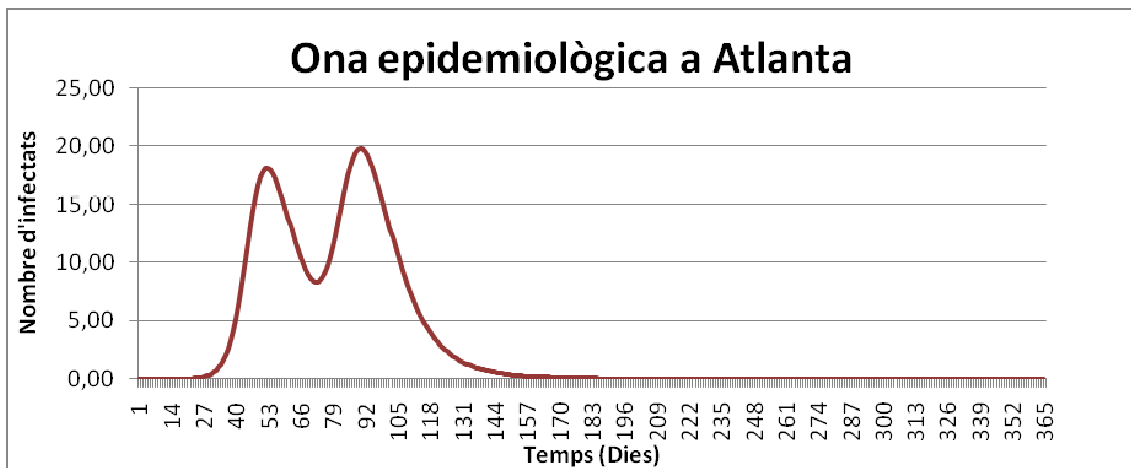
El resultat de la simulació es pot observar a la gràfica següent:



A fi i efectes de poder visualitzar millor els resultats en les ciutats amb un nombre inferior d'habitants he realitzat un gràfic per a les ciutats d'Atlanta, Madrid i París.



El gràfic per a la ciutat d'Atlanta mostra dos pics diferenciats, com es veu al gràfic següent:

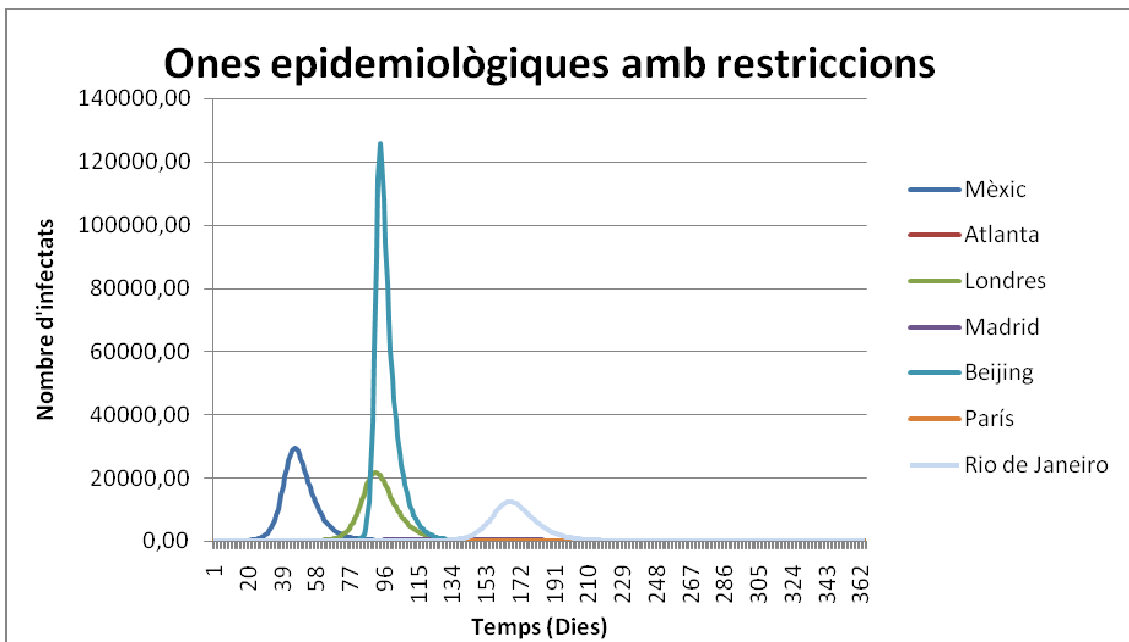


Aquest efecte és conseqüència de l'aparició de nous infectats procedents de d'altres ciutats en un moment en què la malaltia ja havia començat a declinar en aquesta ciutat.

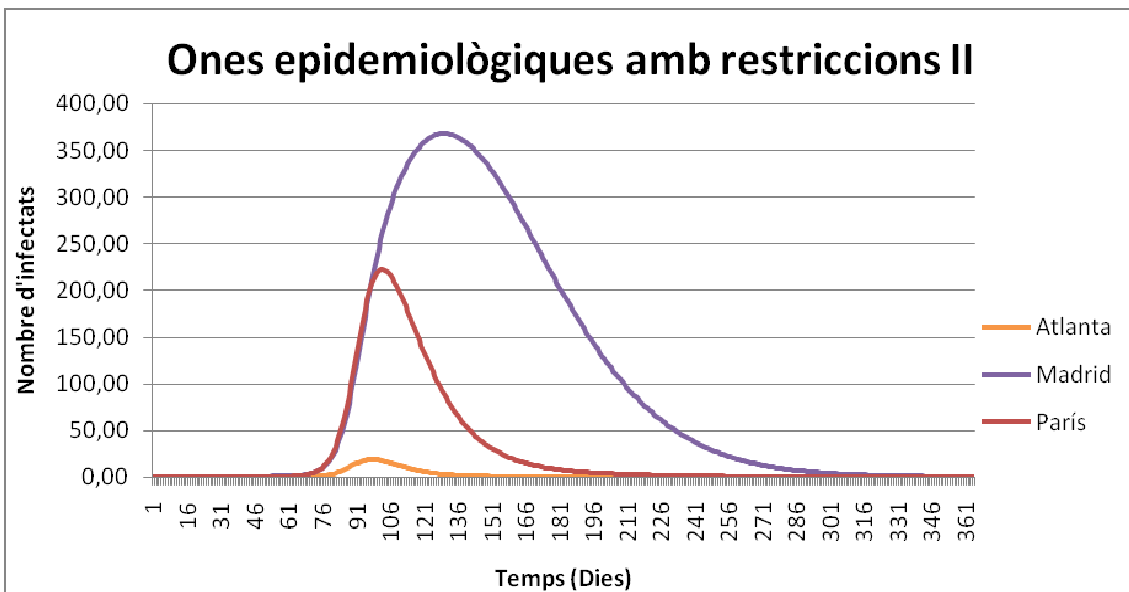
⁸ En els annexos s'adjunta l'Excel titulat *Model d'Ones Epidemiològiques* a través de Google Docs. S'adjunten, també, els Excel que corresponen a *Ones Epidemiològiques amb restriccions* i *Ones Epidemiològiques amb restriccions totals*.

6.6.2 Simulació amb restriccions de viatge

En pàgines anteriors s'indicava que, en cas d'epidèmia, els sistemes nacionals de salut i l'OMS adoptaven estratègies de contenció de la malaltia, consistents en polítiques de vacunació, que afecten a la taxa d'infecció, i restriccions de viatge, per tal d'evitar la difusió entre àrees geogràfiques. Els gràfics següents modelen quin seria l'efecte d'aplicar polítiques de restricció de viatges a Ciutat de Mèxic a partir d'un dia determinat (en aquest cas 30 dies després de l'inici de la infecció en aquesta ciutat). Els resultats obtinguts són els següents:



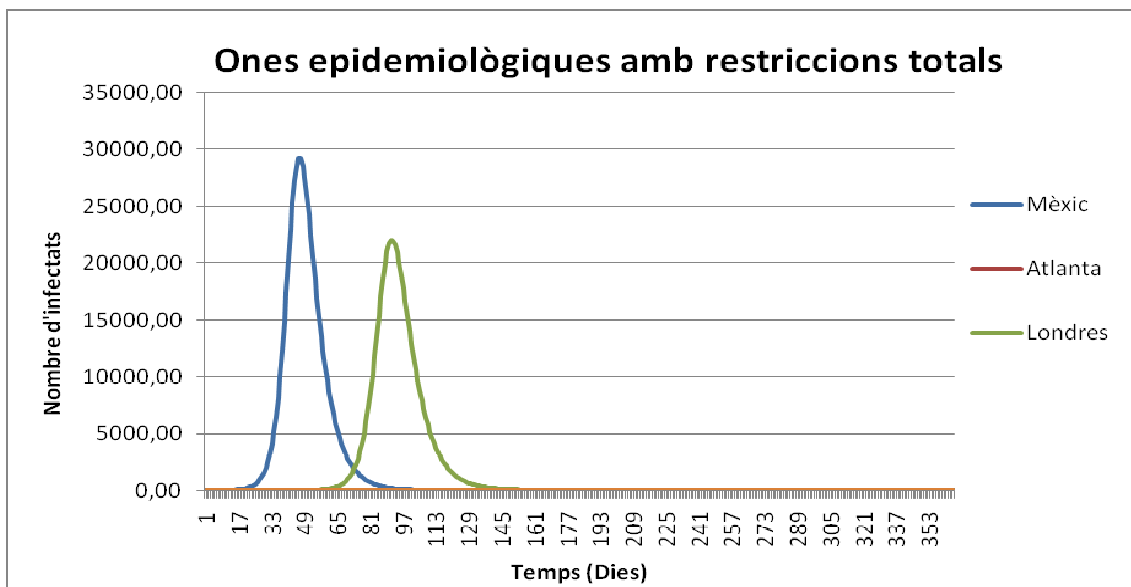
Un dels efectes que es poden observar és que la malaltia té més dificultats per transmetre's a altres zones geogràfiques. Per exemple, en el cas de Rio de Janeiro, la malaltia es comença a desenvolupar més tard (aproximadament el dia 134 si no es practiquen restriccions de viatge i, aproximadament, el dia 154 si se'n practiquen). També s'observa, al gràfic següent, que el nombre d'infectats a zones amb menys població (Atlanta, Madrid i París) ha disminuït.



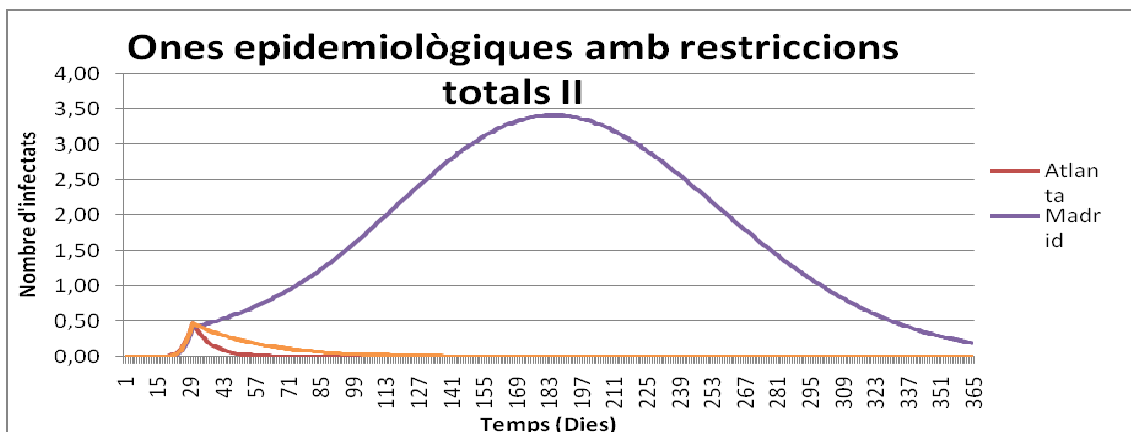
Tots els aeroports que s'han fet servir en la simulació tenen un tràfic de viatgers molt important. Però, n'hi ha altres que tenen un nombre menor de connexions aèries i un tràfic de passatgers menys nombrós. Les restriccions de viatge en aeroports de tràfic elevat, els anomenats hubs, limitarien la difusió de la malaltia a zones geogràfiques allunyades del focus inicial. Per aconseguir-ho cal aplicar-les el més aviat possible, cosa que es responsabilitat de les agències de salut.

D'altra banda, l'evolució en el nombre d'infectats, si la malaltia ja ha arribat a una ciutat, és similar. Les polítiques de vacunacions són les que minoren el nombre d'infectats i el creixement de la malaltia, quan la malaltia ja ha arribat a una zona geogràfica determinada.

Però, quin seria l'efecte d'aplicar restriccions de vol a tots els aeroports implicats a partir del dia 30 d'inici de la infecció? Els resultats són força concloents, ja que podem observar que la malaltia, simplement, no es difon a ciutats on abans si que ho feia.



La malaltia només tindria incidència a Ciutat de Mèxic, origen de la infecció, i Londres (en aquest cas com a conseqüència que és la primera ciutat on arriben viatgers infectats procedents de Ciutat de Mèxic i que aquest fet succeeix abans del dia 30, a partir del qual s'han realitzat restriccions de viatge). D'altra banda, s'observa que a Madrid, on també arriben viatgers infectats procedents de Ciutat de Mèxic abans del dia 30, la malaltia no aconsegueix evolucionar.



7. CONCLUSIONS

Aquest treball de recerca té el seu origen en la lectura d'un llibre de Ricard Solé titulat Xarxes Complexes: del genoma a Internet. Atès el meu interès per la medicina i la neurologia, em van cridar molt l'atenció diverses qüestions referides al cervell humà, la seva organització i certes aplicacions en la epidemiologia.

L'estudi de les xarxes complexes ha de tenir en compte, necessàriament, la seva estructura i dinàmica de creixement. L'objectiu de l'estudi d'aquestes xarxes és respondre a la pregunta: com s'associen les parts per donar un comportament col·lectiu? I així poder preveure les conseqüències de l'alteració de les parts. Per fer-ho, em vaig proposar els objectius següents:

1. Analitzar quins són els paràmetres matemàtics que ens permeten determinar les característiques d'una xarxa complexa des d'un punt de vista estructural i exemplificar els seu càlcul a partir de l'anàlisi d'una xarxa social, en concret el meu Facebook.
2. Determinar les característiques i propietats, en funció de paràmetres com el coeficient de clustering i diàmetre, dels tipus bàsics de xarxes complexes: les xarxes aleatòries, les xarxes de món petit i les xarxes lliures d'escala.
3. Analitzar quines són les dinàmiques de creixement que justifiquen l'aparició d'un o altre tipus de xarxa (enllaços preferencials i no preferencials).
4. Seleccionar exemples d'aplicació, amb l'objectiu de donar una visió divulgativa i, en certa manera allunyada dels formalismes de caràcter matemàtic, per als tipus de xarxa indicats anteriorment.
5. Finalment, seleccionar una àrea d'estudi, la epidemiologia i la difusió d'epidèmies, que em permetés desenvolupar una anàlisi amb més profunditat dels coneixements adquirits.

El modelatge matemàtic d'epidèmies té com a objectiu preveure l'evolució d'una epidèmia per poder aplicar mesures (vacunes, tancament d'aeroports,...) que minimitzin els danys causats per la malaltia.

Històricament els modelatge matemàtic d'epidèmies no tenia en compte la xarxa de contactes entre la població. Aquests models, anomenats determinístics, basats en equacions diferencials, són força vàlids en poblacions grans però són menys exactes si la població és petita i aïllada. Els models probabilístics, més actuals, aprofiten les possibilitats de càlcul dels ordinadors per estudiar la difusió d'epidèmies tenint en compte la xarxa de contactes establerta a la població.

La simulació que he fet de la difusió de la grip A en la localitat de La Gloria, Mèxic, ens ofereix uns resultat més adaptat a les dades reals per al model determinístic. El model determinístic, tot i no ajustar-se gaire a llarg termini en l'evolució del nombre d'infectats, és útil a l'hora de pronosticar el pic màxim d'infectats i el moment en el qual es produeix. En canvi, el model probabilístic utilitzat, que com s'ha dit anteriorment és una versió simplificada del model de Reed-Frost, s'ajusta menys, tot i que la teoria ens indica que hauria de ser al contrari. Ara bé, probablement això es conseqüència de les suposicions realitzades sobre la connectivitat de la

xarxa i el nombre d'infeccions secundàries. Possiblement, si es realitzés un estudi més detallat variant aquests supòsits ens portaria a millors conclusions.

La principal dificultat amb que m'he trobat durant el treball ha estat la realització de la pràctica. Inicialment m'havia proposat fer simulacions o aplicar models matemàtics ja existents. Crear un model propi no entrava als meus plans, tot i que considero que el resultat ha estat força positiu. Deixant de banda l'efectivitat del model proposat, que amb el meu nivell de matemàtiques actual és el que és, l'experiència ha estat molt enriquidora. Gràcies al treball de recerca he pogut posar a prova la meua imaginació a l'hora de buscar una pràctica original i la meua capacitat per raonar per tal de poder solucionar els problemes que han anat sorgint durant el transcurs del treball. Tanmateix, he après molt sobre el funcionament d'aplicacions ofimàtiques, com Excel entre d'altres.

El model d'ones epidèmiques es troba a cavall entre els models determinístics i els probabilístics. Tot i no analitzar la xarxa, aèria treballa a partir d'ella, analitzant les anades i vingudes de passatgers. A més, el model permet observar la presència de hubs, aeroports especialment connectats.

La segona part de la pràctica parla sobre els efectes que tindrien sobre la difusió de la grip A les restriccions de passatgers o el tancament de l'aeroport. Considero que el model respon, amb prou exactitud, a les necessitats dels epidemiòlegs i que, per tant, és força vàlid.

Aquest treball m'ha permès observar que, tot i les diferències abismals entre diverses xarxes, totes parteixen i s'organitzen en funció d'una mateixa base. Això fa que em planteji la següent pregunta: **Existeix alguna llei a la natura encara per descobrir que justifiqui aquest ordre?** Crec que aquesta és la pregunta a la qual els matemàtics i, fins i tot, la societat científica continua buscant respostes. Molt possiblement, el desig de respondre aquesta pregunta justifica el creixent interès en l'estudi dels sistemes complexos.

8. BIBLIOGRAFIA

- DUNCAN J. WATTS (2003). *Seis grados de separación: la ciencia de las redes en la era del acceso*. PAIDOS transacciones. Barcelona.
- SOLÉ, RICARD (2009). *Redes complejas: del genoma a Internet*. Tusquets. Barcelona.
- ALDANA, Maximino (1996). *Redes complejas*. Accessible a l'adreça www.fis.unam.mx/~max/English/notasredes.pdf
- RENDON MEDEL, ROBERTO (2007). *Identificación de los actores clave para la gestión de la innovación: el uso de redes sociales*. Accessible a l'adreça www.ute-innovacion.com.mx/GIAR/.../1%20Identificacion.pdf
- *Distribución de grado (WIKIPEDIA)(2008)* Accessible a l'adreça http://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_de_grado
- FRESAN-FIGUEROA, JULIÁN ALBERTO. *Un modelo SIR probabilístico*. Accessible a l'adreça <http://scma.cua.uam.mx/Documents/book/fresansirmodel.pdf>
- *Modelo Barabasi – Albert (WIKIPEDIA) (2008)* Accessible a l'adreça: http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Barab%C3%A1si%E2%80%93Albert
- *Modelo Watts – Strogatz. (WIKIPEDIA)(2008)* Accessible a l'adreça: http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Barab%C3%A1si%E2%80%93Albert
- *Percolación*. Accessible a l'adreça: <http://teorica.fis.ucm.es/programas/Percolacion.pdf>
- MERELO GUERVÓS, JUAN JULIÁN. *Redes sociales: una introducción*. Accessible a l'adreça: revista-redes.rediris.es/webredes/talleres/redes-sociales.pdf
- MEJIA OLIVARES, CRISTIAN PAOLO (2010). *Análisis de redes sociales a gran escala*. Accessible a l'adreça: www.cs.cinvestav.mx/TesisGraduados/2010/tesisCristianMejia.pdf
- CHAMORRO, AMPARO. *Modelación matemática de epidemias simples*. Revista de la Facultad Nacional de Salud Pública. Vol. 20. Pag 161 – 163. Universidad de Antioquía (Colombia). Accessible a l'adreça: redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=12020114
- GOEDECKE, MICHAEL (2007) . *Global Epidemic Mode: Manual*. Accessible a l'adreça: https://www.epimodels.org/midasdocs/GlobalModel/Global_Epidemic_Model_Manual.pdf
- ABRAMSON, GUILLERMO (2010). *La matemática de las epidemias*. Accessible a l'adreça: <http://fisica.cab.cnea.gov.ar/estadistica/abramson/notes/epidemias-BIOMAT.pdf>
- FAJARDO PATIÑO, JULIÁN MAURICIO (2010). *Modelos determinísticos y estocásticos SI y SIR para difusión de enfermedades contagiosas*. Accessible a l'adreça: <http://www.bdigital.unal.edu.co/4220/>
- MONSALVE MORENO, MAURICIO (2008). *Análisis de redes sociales: un tutorial*. Accessible a l'adreça : www.dcc.uchile.cl/~mnmonsal/SNA.pdf
- RODRÍGUEZ, JOSEP A (2008). *UCINET 6: Guía práctica de redes sociales*. Accessible a l'adreça : www.ub.edu/epp/redes/guia.DOC
- FONSECA, F. (2011). *Mecánica estadística de redes y propagación de enfermedades infecciosas*. Accessible a l'adreça: revcolfis.org/ojs/index.php/rcf/article/download/420316/110

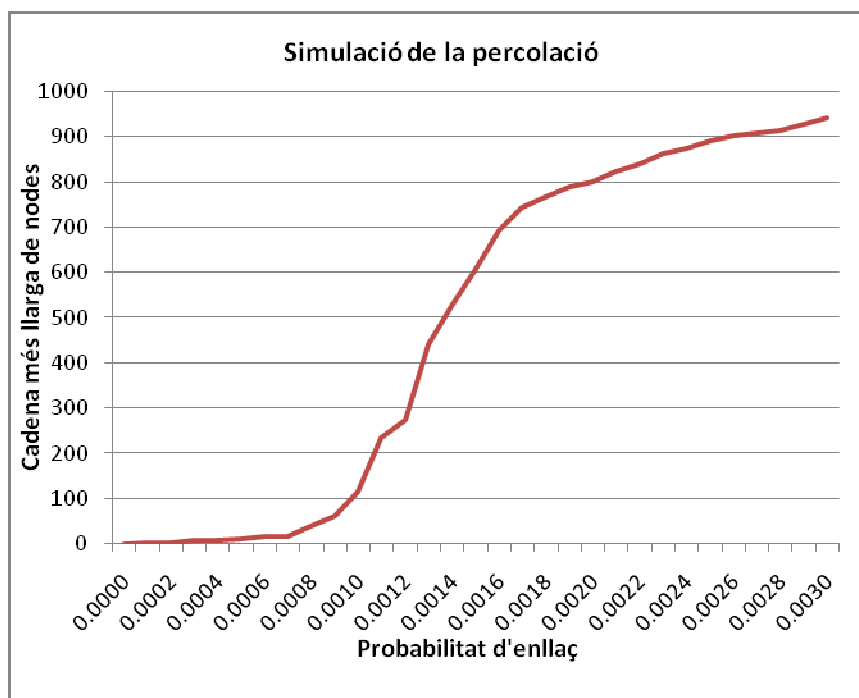
- JAQUET, VINCENT & PECHAL, MAREK (2009). *Modelado con MATLAB de difusión epidémica en redes complejas*.
Accessible a l'adreça: https://www1.ethz.ch/soms/teaching/MatlabSpring10/projects/hs2009_1440_jaquet_pechal_epidemic_spreading.pdf
- BULDÚ, JAVIER M. (2011). *Redes funcionales cerebrales: estructura i deterioro*.
Accessible a l'adreça: http://www.madrimasd.org/blogs/redes-complejas/files/2011/05/upm_master_redes_funcionales.pdf
- HOPPENSTEADT, FRANK (2008). *MATLAB Programs for Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences and Population Mathematics*.
Accessible a l'adreça: https://files.nyu.edu/fh21/public/reprints/MATLAB_Programs.pdf
- NARANJO RUBIO, ANTONIO NARANJO. *Estudio del efecto de la topología de mundo pequeño en el modelo de Ising de 1D i 2 D mediante simulación computacional*.
Accessible a l'adreça bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/2366/1/CD-3104.pdf

ANNEXOS

ANNEX 1.1: APARTAT 4.3.2. SIMULACIÓ DEL FENOMEN DE PERCOLACIÓ

La gràfica a través de la qual s'observa el fenomen de percolació s'ha realitzat utilitzant les dades de la taula següent. Les dades s'han obtingut mitjançant el programa NetWork Work Bench. El programa ha simulat diverses xarxes aleatòries de N=1000 amb una probabilitat de connexió, que seria la variable independent, que augmentava amb increments de 0,0001. La variable dependent de la simulació és el nombre de nodes de la cadena més llarga.

Prob. de connexió	Cadena més llarga		
0.0000	0	0.0015	607
0.0001	3	0.0016	693
0.0002	4	0.0017	743
0.0003	8	0.0018	768
0.0004	9	0.0019	789
0.0005	12	0.0020	801
0.0006	16	0.0021	824
0.0007	18	0.0022	840
0.0008	41	0.0023	863
0.0009	62	0.0024	874
0.0010	117	0.0025	890
0.0011	234	0.0026	902
0.0012	273	0.0027	908
0.0013	442	0.0028	914
0.0014	526	0.0029	928
		0.0030	942



Annex 1.2: Apartat 4.3.3. Simulació de la propagació d'un incendi forestal (Mathematica)

```
Manipulate[Block[{a,$RecursionLimit=25000,w=h},per[{{i_,j_}}:=If[1<=i<w&&1<=j<h&&a[[i,j]]==1,  
a[[i,j]]+2;
```

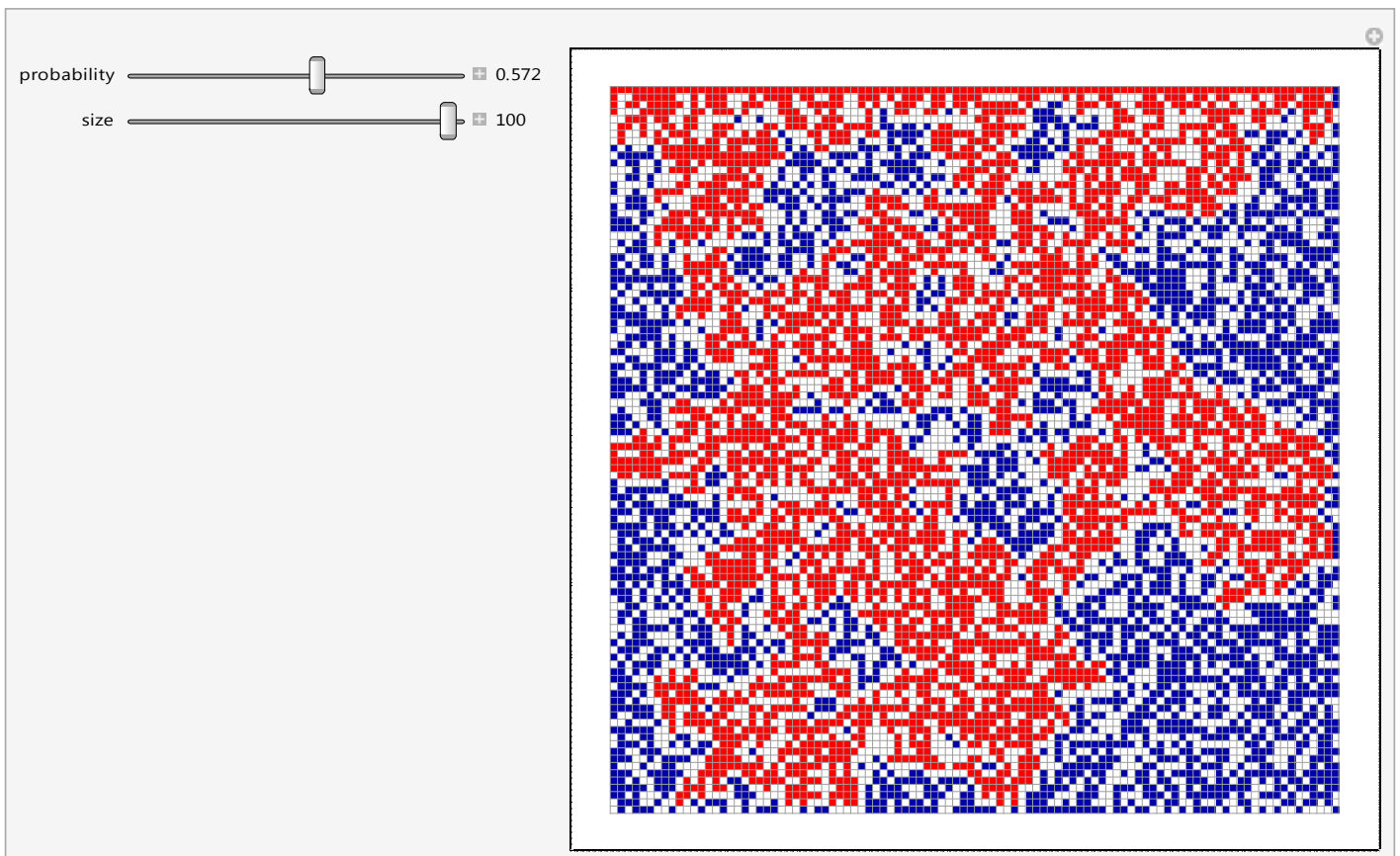
```
per[{{i,j}+#}&/@{{1,0},{0,1},{-1,0},{0,-1}}];
```

```
SeedRandom[2424];
```

```
a=Map[Boole[#<p]&,RandomReal[{0,1},{w,h}],{2}];
```

```
a[[All,1]]=1;Do[per[{{i,1}}];per[{{i,h}},{i,w}];
```

```
ArrayPlot[Transpose[a],ImageSize->450,Mesh->True,ColorRules->{0->White,1->Darker[Blue],2->  
Red}],{{p,.2,"probability"},0,1,Appearance->"Labeled"},{{h,40,"size"},5,100,1,Appearance->"La  
beled"},AutorunSequencing->{{1,30},{2,10}},TrackedSymbols->Manipulate]
```



ANNEX-2: Apartat 5.4.2.2.1. Simulació d'una xarxa lliure d'escala

Annex 2.1: PROGRAMA BARALABERT.M (Matlab)

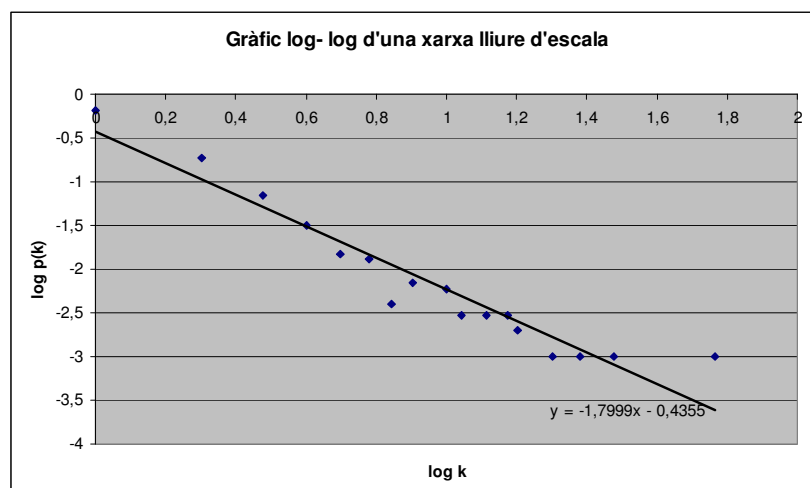
```

function[A,k]=baralabert(mo
,m,T)
k=ones(1,mo);
A=sparse([]);
for t=1:T
i=mo+t;
for w=1:m
v=[1:mo+t-1];
u=rand;
P=0;
n=0;
j=0;
p=k/sum(k);
while j==0
if u<P
j=v(n);
else
n=n+1;
P=P+p(n);
end
end
k(j)=0;
A(i,j)=1;
A(j,i)=1;
end
k=sum(A);
end
kf=(full(max(k)))/2;
x=[1:kf];
hist(k,x);

```

Annex 2.2: RESULTATS

GRAU (k)	NOMBRE	PROB (p)	log(k)	log(p)
1	654	0,654	0	-0,18442225
2	187	0,187	0,30103	-0,72815839
3	70	0,07	0,47712125	-1,15490196
4	32	0,032	0,60205999	-1,49485002
5	15	0,015	0,69897	-1,82390874
6	13	0,013	0,77815125	-1,88605665
7	4	0,004	0,84509804	-2,39794001
8	7	0,007	0,90308999	-2,15490196
10	6	0,006	1	-2,22184875
11	3	0,003	1,04139269	-2,52287875
13	3	0,003	1,11394335	-2,52287875
15	3	0,003	1,17609126	-2,52287875
16	2	0,002	1,20411998	-2,69897
20	1	0,001	1,30103	-3
24	1	0,001	1,38021124	-3
30	1	0,001	1,47712125	-3
58	1	0,001	1,76342799	-3



Annex 3: Apartat 6.3 Models estocàstics o probabilístics

```
% PROGRAMA DE SIMULACIÓ DE DIFUSIÓ EPIDÈMICA (MODEL DE REED-FROST SIMPLIFICAT)
N=2100; n_periodes=25;degree=4;p=0.5; susceptibles=0; infectats=0; recuperats=0;
latencia=4; t=1; % Nombre de nodes de la xarxa
A=create_graph_sf(N,degree); % Crea una xarxa lliure d'escala % A és la matriu d'adjacència
de la xarxa
B=zeros(1,N); % B es un vector d'infecció. Indica quins són els nodes infectats en una etapa
B(1,1)=1; % infecta el node 1
C=zeros(1,N);
C(1,1)=0;
susceptibles=zeros(1,n_periodes);
infectats=zeros(1,n_periodes);
recuperats=zeros(1,n_periodes);
estat=zeros(1,N);
estat(1,1)=1;
while t <= n_periodes
    for i=1:N % per a cada node i si el nombre de periodes es inferior al màxim
        if (B(1,i)==1 & estat(1,i)==0) % Si el node "i" està infectat llavors
            for j=1:N % repassem tots els nodes connectats amb "i" excepte ell mateix per
analitzar si estan connectats al node "i"
                if (A(i,j)==1 & (j ~= i))
                    valor=rand(1); % Generem un valor aleatori i si aquest es superior a un valor
escollit llavors el node "j" queda infectat
                    if valor>0.4947
                        if B(1,j)==0
                            B(1,j)=1;
                            estat(1,j)=1;
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
    for l=1:N
        estat(1,l)=0;
    end
    for m=1:N
        if B(1,m)==1
            C(1,m)=C(1,m)+1;
        end
    end
    if t <= n_periodes
        for k=1:N
            if (rand(1)>0.5 & B(1,k)==1)
                B(1,k)=-1; % Per a tots els nodes, si el contador de nombres de periodes d'infecció
es igual a 4 llavors posem el node a RECUPERAT
            end
        end
    end
end
```

```

end
if t<=n_periodes
  for k=1:N
    if B(1,k)==0
      susceptibles(1,t)=susceptibles(1,t)+1;
    end
    if B(1,k)==1
      infectats(1,t)=infectats(1,t)+1;
    end
    if B(1,k)==(-1)
      recuperats(1,t)=recuperats(1,t)+1;
    end
  end
end
end
t=t+1;
end
[B]
[susceptibles]
[infectats]
[recuperats]

```

```

function graph = create_graph_sf(N,d)
graph = zeros(N,N);
placed = zeros(N,1);
for i = 1:(d+1)
  for j = (i+1):(d+1)
    graph(i,j) = 1;
    graph(j,i) = 1;
  end;
  placed(i) = 1;
end;
for i = (d+2):N
  for l = 1:(d/2)
    prob = (graph*placed).*placed.*(ones(N,1)-graph(:,i));
    prob = prob/(ones(1,N)*prob);
    s = rand;
    m = 1;
    while (s>prob(m))
      s = s-prob(m);
      m = m+1;
    end;
    graph(m,i) = 1;
    graph(i,m) = 1;
  end;
  placed(i) = 1;
end;
graph=sparse(graph)

```

ANNEX – 4: LINKS ALS FULLS D'EXCEL UTILITZATS PER A LA SIMULACIÓ DEL MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES

MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES

<https://docs.google.com/open?id=0B2T5vwphC3qzUWdCek42Q29Uc0s4aWdBSkhmaEdydw>

MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES AMB RESTRICCIONS

<https://docs.google.com/open?id=0B2T5vwphC3qzdWx2SzdRNUhSemVwZGd0VVNzOHpfUQ>

MODEL D'ONES EPIDEMIOLÒGIQUES AMB RESTRICCIONS TOTALS

<https://docs.google.com/open?id=0B2T5vwphC3qzeEh0MU1xX2xUUUNVZGZwY1pUamRBQ>

ANNEX – 5: LINK AL FULL D'EXCEL UTILITZAT PER A LA SIMULACIÓ DEL MODEL SIR DETERMINÍSTIC

<https://docs.google.com/open?id=0B2T5vwphC3qzYzhEeW1YZEzTUEd3X2I5YWJMMm92QQ>

ANNEX – 6: LINK AL FULL D'EXCEL DE TRANSMISSIÓ D'UNA MALALTIA A TRAVÉS DE LA XARXA AÈRIA

<https://docs.google.com/open?id=0B2T5vwphC3qzTIIJQkpDUFISVKNuWVfQeTVtOGpRQQ>