

The background is a complex fractal design. It features a central horizontal band of glowing, multi-colored fractal patterns in shades of blue, cyan, and yellow. This band is flanked by two large, solid black circles. The overall composition is set against a dark, almost black background with intricate, white and grey fractal structures that resemble natural forms like snowflakes or biological cells. The lighting is dramatic, with bright highlights on the fractal patterns and deep shadows in the surrounding space.

Treball de Recerca 2012

**Geometria
Fractal:**

**Jugant amb el
Caos i la Natura**

Pseudònim: "Markov"

*"La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas.
Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente
la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias,
hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas.
Jamás volverá a recuperar las interpretaciones
de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares."*

Fractals Everywhere (1988)

- Michael Barnsley -

Agraïments:

A Dolors Ametller, la meva tutora i professora de matemàtiques de l'Institut Poeta Maragall, pels seus consells i correccions de la meva feina amb cura i atenció sempre que ho he necessitat.

A Núria Fagella, doctora i professora titular del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona, per oferir-me una molt profitosa entrevista, i sobretot, per compartir amb mi els seus grans coneixements en fractals i dinàmica complexa.

A Gemma Viñals, estudiant de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, que m'ha introduït als fractals geomètrics d'una manera senzilla i entenedora.

I en memòria de Benoît Mandelbrot, pare de la geometria fractal.

ÍNDEX

0. Presentació, objectius i organització.....	1
1. El Món Fractal.....	3
1.1. Mandelbrot i la Geometria Fractal.....	3
1.2. Definició de fractal.....	5
1.3. Propietats fonamentals.....	6
1.4. Classificació dels fractals.....	7
1.5. Fractals a la natura.....	7
1.6. Aplicacions.....	9
2. Fractals geomètrics i dimensió fractal.....	11
2.1. Iteracions.....	11
2.2. Dimensió fractal.....	12
2.3. Fractals geomètrics més "clàssics".....	15
2.3.1. Conjunt de Cantor.....	15
2.3.2. Corba de Peano.....	18
2.3.3. Corba de Koch.....	19
2.3.4. Floc de neu de Koch.....	21
2.3.5. Triangle de Sierpinski.....	24
2.3.6. Tetraedre de Sierpinski.....	27
2.3.7. Catifa de Sierpinski.....	30
2.3.8. Esponja de Menger.....	33
2.3.9. Taula comparativa.....	37
3. Fractals al pla complex. Mandelbrot, Julia i Newton.....	39
3.1. Complexos.....	40
3.2. Conjunts de Julia.....	43
3.3. Conjunt de Mandelbrot.....	47
3.4. Fractal del Mètode de Newton.....	50
4. Els IFS i el "Joc del Caos".....	55
4.1. Introducció a la MRCM (<i>Multiple Reduction Copy Machine</i>).....	55
4.2. Transformacions afins.....	58
4.3. IFS (<i>Iterated Function System</i>): Sistema de Funciones Iterades.....	62
4.3.1. MRCM = IFS.....	62
4.3.2. IFS Determinista.....	62
4.3.3. Teorema del Collage.....	63
4.4. Fractals IFS.....	64

4.4.1.	Fractals Geomètrics "2D".....	64
4.4.2.	Fractals Geomètrics "3D".....	73
4.4.3.	Fractals "Complexos".....	77
4.4.3.1.	Pseudo-Mandelbrot.....	77
4.4.3.2.	Conjunt de Julia - IIM (<i>Inverse Iteration Method</i>).....	80
4.4.4.	Fractals Naturals.....	82
4.4.4.1.	Falguera de Barnsley.....	82
4.4.4.2.	Fulla d'Auró.....	85
4.4.4.3.	Arbre de Nadal.....	88
4.4.4.4.	Arbre comú.....	90
4.4.5.	Fractal RFL.....	93
4.5.	El "Joc del Caos".....	95
4.5.1.	Joc de taula pel Triangle de Sierpinski.....	95
4.5.2.	FRCM (<i>Fortune Wheel Reduction Copy Machine</i>).....	101
4.5.3.	IFS Aleatori.....	102
4.5.4.	Fractals IFS "Aleatoris".....	103
5.	Conclusions i Valoració.....	108
6.	Annexos.....	110
6.1.	Programes en C amb l'ajuda del GNUPLOT.....	110
6.2.	Entrevista a la Dra. Núria Fagella.....	118
7.	Bibliografia i Webgrafia.....	121

0. PRESENTACIÓ, OBJECTIUS I ORGANITZACIÓ

La geometria fractal és un punt de trobada entre les matemàtiques i la natura que estudia la irregularitat i complexitat del món físic que ens envolta amb molta més precisió que la geometria euclidiana, mitjançant un conjunt de formes que Benoît Mandelbrot va anomenar fractals a finals de la dècada del 1980.

He escollit aquest tema perquè el seu estudi es basa en les matemàtiques més formals i exactes per entendre i explicar el comportament i estructura de la naturalesa. També em va motivar el fet que aquesta geometria, tot i ser bastant recent, és de gran utilitat en molts àmbits de la ciència, tant en aplicacions industrials com en la creació de tot un catàleg de figures de gran bellesa plàstica que cap de nosaltres ens podríem imaginar fa uns pocs anys.

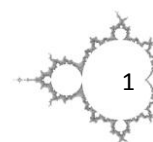
Tanmateix, m'he adonat de la poca divulgació científica sobre el tema i que només unes poques persones (a excepció de la comunitat especialitzada en matemàtiques) n'han sentit a parlar alguna vegada. Per tant, m'agradaria fer un treball comprensible per les persones interessades en el tema, per tal de tenir un primer contacte amb la geometria fractal i satisfer la meua curiositat matemàtica i científica per aquesta nova manera de veure el món, i en un futur poder buscar-los en tota mena d'indrets de la naturalesa que en aquests temps s'estan començant a explorar.

Per posar algun exemple de l'omnipresència dels fractals a la naturalesa, podem parlar de l'esponjositat d'un núvol, la ramificació d'un arbre, la irregularitat d'un llampec, la fragmentació de les costes, el moviment d'un gra de pol·len en l'aigua d'un riu o la complexitat del nostre propi sistema nerviós. Tots aquests fenòmens poden ser descrits per la geometria fractal de la mateixa manera que el planeta Terra pot ser descrit per la geometria euclidiana com a una esfera, i tant una com l'altra ens donen una aproximació molt propera a la realitat que ens ajuda a l'hora de portar a terme càlculs de les seves característiques i ens permet fer-ne una predicció amb força precisió.

La geometria fractal no tan sols representa un gran avenç en la descripció i comprensió de l'Univers, sinó que aquestes noves matemàtiques han estat la base de multitud d'aplicacions innovadores en moltes branques de la ciència: biologia, geologia, medicina, física, química, tecnologia, informàtica, economia, i fins i tot també en l'àmbit de l'art, la literatura o la música.

Els objectius principals que em vaig plantejar a l'inici del meu treball de recerca sobre la geometria fractal es poden resumir en els següents:

- Aprendre a realitzar un treball de recerca amb cert rigor científic i matemàtic, així com saber exposar el treball final davant d'un tribunal amb claredat i confiança.
- Divulgar amb claredat, ordre i precisió el tema dels fractals als meus companys i a tot lector interessat.
- Introduir-me en la complexa relació entre les matemàtiques i la natura a través de la geometria fractal i les seves aplicacions al món real.
- Estudiar i aprofundir en conceptes matemàtics com la iteració, els nombres complexos o les matrius.
- Aprendre nocions bàsiques de programació en llenguatge C i trobar un bon mètode senzill de representació de fractals propis.
- Conèixer experts matemàtics també fora de l'institut per compartir les seves inquietuds.



En quant a l'organització de la memòria, el cos del treball s'estructura bàsicament en quatre capítols independents però necessaris per explicar el concepte global de geometria fractal i poder experimentar amb la construcció senzilla de figures fractals.

El primer capítol està destinat a presentar una introducció als fractals en un àmbit general i bàsic. Tractarem el seu origen, la cerca d'una definició, així com les principals propietats i tipus fonamentals. D'altra banda, exposarem una visió de la geometria fractal en la naturalesa i alguns dels seus camps d'aplicació per veure la intrínseca relació entre el món matemàtic i la natura.

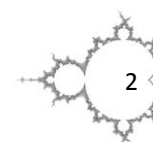
El segon capítol es basa en un estudi dels fractals geomètrics més importants. A partir de l'aplicació del concepte d'iteració i un aprofundiment en les propietats fractals, determinarem la seva longitud, àrea, volum o dimensió fractal segons la seva importància en cada cas per tal de poder-los comparar.

El tercer capítol es centra en els fractals construïts en el pla complex. Basant-nos en el concepte d'iteració complexa, exposarem els fractals més impressionants com el Conjunt de Mandelbrot, els Conjunt de Julia o el fractal del Mètode de Newton, fruit de l'avenç de les matemàtiques lligades a la computació.

En el quart capítol exposem una forma de generar els fractals estudiats amb l'ajuda de la Màquina Copiadora de Reducció Múltiple (MRCM) i el procés aleatori del "Joc del Caos", basant-nos en un Sistema de Funcions Iterades (IFS) que simplifiquen el seu procés de construcció. També aprofitarem aquest eficient mètode per representar els fractals naturals i crear un fractal "propi", el RFL.

En annexos, adjunto la guia detallada dels programes creats en C i representats amb l'ajuda del GNUPLOT, i una interessant entrevista amb una gran experta en el món de la dinàmica complexa i els fractals com és la Dra. Núria Fagella.

Les meves conclusions i valoracions així com la bibliografia utilitzada, posaran el punt final a aquest treball.



1. EL MÓN FRACTAL

1.1. MANDELBROT I LA GEOMETRIA FRACTAL

Els elements de la geometria euclidiana o tradicional són punts, línies, corbes, esferes, és a dir, figures perfectes ideades per l'home per mesurar longituds, àrees o volums, i modelitzar la realitat. Per tant, la geometria euclidiana ha simplificat les irregularitats amb una aproximació de lleis reals i una regularització de les formes geomètriques, suposant que totes les superfícies i perifèries són suaus i llises.

Però actualment, sabem que això no és cert perquè la naturalesa és caòtica i irregular, ja que petits canvis de temperatura a un lloc de la Terra poden tenir conseqüències previsibles però indeterminables, i no cal dir que les formes de les muntanyes o rius no es corresponen amb cap de les figures euclidianes degut a la seva irregularitat i complexitat. Precisament, la geometria fractal ha nascut per resoldre aquests problemes i aconseguir formes i lleis naturals més precises i semblants, gràcies al treball de Benoît Mandelbrot com a fruit dels estudis de molts altres matemàtics.

Els objectes fractals van ser desenvolupats molt abans que la geometria fractal, de fet, es poden trobar i reconèixer figures amb característiques



fractals com la del triangle de Sierpinski (que explicarem més endavant), en gravats de tela molt antics, fins i tot es van trobar gravats

japonesos del segle XIV amb aquestes estructures. Però potser el més conegut i mencionat per Mandelbrot, previ a la idea dels fractals, va ser "la gran ona de Kanagawa" del 1830, on el pintor Katsushika Hokusai mostrava, probablement sense saber-ho, la disposició fractal dels remolins en una ona de mar al trencar-se.

Abans de que Newton, Leibniz i altres companys creessin en el segle XVII el Càlcul Infinitesimal, es coneixien funcions amb enormes irregularitats i discontinuïtats, però els científics d'aquella època



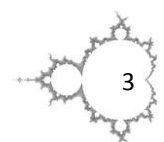
Benoît Mandelbrot (Varsòvia, Polònia, 1924 - Cambridge, Massachussets, 2010)

Mandelbrot va morir el passat 14 d'octubre del 2010 als 85 anys.

Mandelbrot sempre va ser un matemàtic heterodox. La geometria fractal és una teoria de l'aspror en totes les seves manifestacions. En l'època en què començava a treballar en el tema, els matemàtics estaven interessats en superfícies suaus que eren derivables i no interessaven els treballs de Mandelbrot. Així que ell es sentia una mica desplaçat entre matemàtics, motiu pel qual també es definia com un físic, economista, una espècie d'artista...

Mandelbrot va néixer a Varsòvia el 20 de novembre del 1924. Era fill de família jueva, i es van traslladar durant els anys 30 a París per fugir de l'amenaça dels nazis. No va anar molt al col·legi perquè la seva mare tenia por a les epidèmies, llavors el mantenia apartat. Per això un dels seus oncles va adoptar el paper de tutor, es va ocupar de l'educació i li va ensenyar moltes coses però, entre elles, tres coses que li van interessar especialment: les matemàtiques, els mapes i els escacs. S'explica que el jove Mandelbrot era un escaquista excel·lent i visualitzava les estratègies en termes de relacions geomètriques. Com que passava molt temps fora de l'escola es va convertir en un estudiant autodidacta, i va desenvolupar una intuïció geomètrica extraordinària que li va permetre resoldre problemes molt complexos de maneres molt originals. Quan va ser a la Universitat va estudiar sota la tutela d'un matemàtic molt important anomenat Gaston Julia. L'oncle de Mandelbrot li va recomanar que estudiés en concret un article de Julia considerat com una obra mestra amb multitud de problemes interessants. Mandelbrot va intentar observar alguna cosa interessant sobre aquest article però no en va aconseguir dir absolutament res de res. Llavors una mica disgustat amb les matemàtiques pures, va tornar els seus interessos per les matemàtiques aplicades i es va dedicar a resoldre problemes d'interferències en transmissions, turbulències en aeronàutica, problemes de matemàtica financera i sempre intentant buscar algun tipus d'ordre on els altres veien solament caos. Molts anys després quan treballava a IBM va tornar a recórrer a l'article de Julia i va utilitzar un ordinador per a dibuixar aquest conjunt tan estrany i de sobte en la pantalla de l'ordinador li van aparèixer els fractals.

Mandelbrot al final va veure el seu somni complert. Les estructures fractals que al principi semblaven abstraccions completament anti-intuïtives van resultar ser matemàtiques de formes tan quotidianes com un arbre, formes a les que tots estem acostumats. A Mandelbrot li van acabar atorgant un lloc de professor a Yale i va ser reconegut com a pare de la geometria fractal.



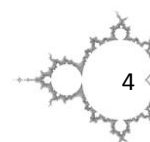
suposaven que aquestes eren molt escasses i rarament sorgirien en sistemes naturals, per tant, les consideraven excepcions a la matemàtica tradicional i simplement les deixaven a un costat o les ignoraven, fins i tot la comunitat científica les marcava de meres "monstruositats geomètriques" i inaplicables "divertiments matemàtics".

Afortunadament, un grup de matemàtics amb ments curioses es va adonar que en la naturalesa es donaven molt freqüentment aquest tipus d'irregularitats i que no eren excepcions com es suposava. Els primers que van començar a demostrar teòricament aquesta problemàtica, encara que sense parlar de fractals pròpiament, van ser els coneguts Cantor, Peano, Hausdorff i von Koch, a més de Hilbert i Sierpinski. Hi ha també altres noms no directament involucrats però que van establir les bases de la teoria de la mesura, fonamental al realitzar una descripció matemàticament correcta dels objectes que després van passar a dir-se fractals, com per exemple la concepció dels fractals per Henri Poincaré al 1890, i aquestes idees van ser esteses per dos altres matemàtics francesos, Gaston Julia i Pierre Fatou cap al 1918. Els treballs sobre aquesta temàtica van quedar aparcats en els anys posteriors, fins que l'estudi dels fractals va ser renovat a partir de 1974 als laboratoris d'IBM (International Business Machines) i fortament impulsat pel desenvolupament de la computadora digital. Això va ser possible, sobretot, per la interdisciplinarietat i rebuig als límits demarcats entre disciplines científiques de Benoît Mandelbrot que ja havia observat un fenomen semblant en la jerarquització de fluctuacions a totes escales a l'analitzar el soroll i les perturbacions elèctriques. Aquesta investigació el va portar a pensar en altres sistemes amb patrons similars que no poguessin ser descrits amb exactitud per la matemàtica existent i es comportessin de la mateixa manera, fins que després d'investigar certes preguntes trivials però profundes com "*Quant mesura realment la costa de Gran Bretanya?*", va topat definitivament amb una nova manera de veure el món: la geometria fractal.

Si bé molts autors van aportar i preparar el camí pel sorgiment d'una geometria nova, la comunitat científica reconeix que el pare de la geometria fractal és Benoît Mandelbrot. És completament cert que les creacions de molts matemàtics van jugar un rol primordial en el concepte d'aquesta geometria, però cal reconèixer que cap d'ells no va pensar en les seves creacions com un pas conceptual cap a una nova percepció o una nova geometria de la naturalesa, on hi ha una estreta relació entre forma i contingut plasmat en l'esperit de la geometria fractal, que precisament fa de pont entre les matemàtiques i la naturalesa.

En resum, aquesta evolució de centenars d'anys de la geometria es podria sintetitzar en un quadre amb les diferències fonamentals entre la geometria euclidiana, la més antiga, i la geometria fractal, la més nova, que alhora servirà d'introducció als capítols següents:

Geometria Euclidiana	Geometria fractal
Tradicional (més de 2.000 anys)	Moderna (50 anys aproximadament)
Dimensió entera	Dimensió fractal
Tracta objectes ideals per l'home	Apropiada per a formes naturals
Descrita per fórmules	Descrita per algoritmes recursius (iteració)



1.2. DEFINICIÓ DE FRACTAL

Benoît Mandelbrot, matemàtic polonès del Centre d'Investigació Thomas J. Watson dels laboratoris IBM a Nova York i pare de la geometria fractal, va veure la necessitat de crear una paraula per englobar un conjunt d'objectes geomètrics d'estructura irregular i fragmentada, que li van cridar l'atenció en el seu intent de trobar una geometria més apropiada que la clàssica per descriure les formes de la naturalesa.

Per aquest motiu, Mandelbrot va encunyar el neologisme *fractal* a partir de l'adjectiu llatí *fractus*, derivat del verb *frangere* («trençar») com a paraula que encaixa perfectament amb el que denota, ja que a més de «fragmentat» (com *fracció*), *fractus* significa «irregular», confluint ambdós significats en el terme fragment. D'altra banda, la ressonància dels principals vocables anglesos afins *-fracture* («fractura»), *fraction* («fracció»)- era idònia, ja que va crear la paraula fractal amb la doble funció de substantiu i adjectiu. Malgrat que Mandelbrot va definir el substantiu fractal amb gènere femení, són poques les referències en castellà i català a "les fractals" i gran majoria a "els fractals" (en aquest treball continuarem la tendència i usarem el gènere masculí).

Mandelbrot no va inventar els fractals, sinó que va saber agrupar certes propietats i aspectes en comú entre els anomenats "monstres matemàtics" fins aleshores (el mateix matemàtic Charles Hermite titllava de "plaga lamentable" la fascinació d'alguns matemàtics per determinades corbes que desafiaven els fonaments de la geometria de l'època, com el conjunt de Cantor, el triangle de Sierpinski, la corba de Peano o el floc de neu de Koch del segle XIX), ja que sempre havien estat a la natura i als límits de l'infinit a l'espera que algú topés amb ells i donés a conèixer aquesta meravella matemàtica i artística dels llocs més recòndits i fascinants de l'univers.

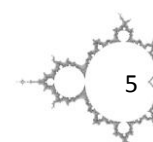
La definició de fractal ha anat evolucionant amb el temps segons les característiques i propietats dels que s'anaven descobrint. El mateix Mandelbrot afirma que sols disposem d'una definició empírica, donat que cap definició teòrica resulta totalment satisfactòria.

En termes generals, un fractal ve a ser el producte final que sorgeix a partir de la iteració infinita d'un procés geomètric ben definit.

Però probablement, la millor manera de definir-lo és a través dels seus atributs: un fractal és rugós, autosimilar (les parts s'assemblen al tot), es construeix amb un procés iteratiu, és dependent de les condicions inicials i és complex, tot i que es descriu amb un algorisme senzill.

El britànic Kenneth Falconer en la seva obra *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, va definir formalment fractal com un conjunt "F" que satisfà alguna de les característiques o propietats següents:

- a) "F" té una estructura fina, és a dir, detall a escales arbitràriament petites.
- b) "F" és massa irregular per ser descrit en llenguatge geomètric tradicional, tant localment com globalment.
- c) "F" té alguna forma d'autosimilitud, potser aproximada o estadística.
- d) La dimensió fractal de "F" (definida d'alguna manera) és major que la seva dimensió topològica.
- e) "F" es defineix d'una manera molt simple, potser de manera recursiva.



D'altra banda, l'any 1975 Mandelbrot va afirmar que els fractals són formes generades normalment per processos matemàtics repetitius i caracteritzats per no ser diferenciables, per tenir un aspecte semblant a qualsevol escala i una dimensió fraccionària.

No convençut del tot amb aquesta caracterització, el 1982 Mandelbrot va definir fractal com a un conjunt la dimensió del qual és estrictament major que la seva dimensió topològica, però ell mateix va reconèixer que aquesta última consideració no era suficientment general i exclouia alguns objectes matemàtics que realment són fractals com la corba de Peano que veurem més endavant. Tot i que continuava sent la definició més acceptada pels sectors matemàtics, al ser la més adequada per englobar figures fractals.

També es poden entendre els fractals com a atractors d'un IFS (*Sistemes de Funcions Iterades*, els quals estudiarem a fons més endavant), tal com diu Barnsley, o com a un conjunt de punts autosimilars en sentit determinista o bé estocàstic (depenent de l'atzar). Tot i que cap de les dues tindria en compte el conjunt de Mandelbrot, per tant, haurien de considerar el conjunt M com a fractal límit, és a dir, un fractal que conté molts fractals, tal com proposa Cederberg.

L'essència del missatge de Mandelbrot és que moltes estructures naturals que aparenten tenir una complexitat extraordinària, en realitat presenten una mateixa regularitat geomètrica: la seva invariància a diferents escales, i que el procés responsable d'aquest enrevessat i complex fenomen pot ser sorprenentment senzill, per tant, es poden definir perfectament com a conjunts fractals o bé fractals naturals.

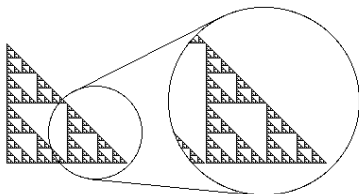
1.3. PROPIETATS FONAMENTALS

Un cop introduït el concepte de geometria fractal i definicions dels fractals des de diferents punts de vista, seria interessant fer un repàs general de les seves propietats fonamentals per consolidar-ho.

Primer de tot, cal recordar que Mandelbrot no va donar una definició precisa de fractal però de forma general va caracteritzar les noves estructures irregulars com figures autosimilars, de complexitat infinita, de dimensió fraccionària i recursives.

A partir d'aquestes característiques generals de les figures fractals, podem destacar les propietats més importants dels fractals:

- **Autosemblança o autosimilitud:** les parts del conjunt presenten la mateixa forma o estructura que el tot, és a dir, els subconjunts de la figura contenen còpies exactes d'aquesta a menor escala o lleugerament deformats. Per exemple, si observem alguna d'aquestes parts amb un microscopi i lents adequades, veurem exactament la figura completa, tant en un fractal geomètric com en un natural. Aquesta propietat és fàcil de comprendre i observar, i és present en la majoria dels fractals que veurem, i per això són figures d'estructura complexa a totes les escales.



- **Complexitat infinita:** conjunts que mostren estructures molt complexes independentment de l'escala d'observació. Aquesta idea es refereix a l'absoluta identitat entre escales produïda per l'autosemblança i recurrència, és a dir, podem anar ampliant la imatge una i altra vegada fins a l'infinit sense que aparegui una forma totalment definida, observant un entramat cada vegada més complex i aparentment inexplicable. Aquesta qualitat és la principal causa de la bellesa dels fractals, i tot i ser complexa, és fàcil d'imaginar ja que si ens fixem en una porció del fractal i fem un zoom determinat, tornarem a recuperar la imatge inicial, i així una i altra vegada...

- **Dimensió fractal o fraccionària:** mesura més sensible de la densitat o complexitat aparent del conjunt fractal, i ens proporciona una bona eina per comparar fractals entre ells, ja que són figures massa complexes per tractar-se només d'un punt, una línia, un pla o un volum, per tant, superen els nivells de la seva dimensió física o topològica. Aquest concepte és més difícil d'entendre, per això en el següent capítol hi ha un estudi matemàtic més profund amb alguns exemples.

- **Recursivitat:** conjunts definits per un algoritme recursiu amb processos iteratius infinits, és a dir, donada una informació inicial i la regla per portar a terme la iteració, s'aplica aquesta a una figura i es repeteix el mateix procés usant cada cop la nova informació fins a l'infinít per aconseguir l'autosimilitud. Aquesta qualitat ens permet representar els fractals amb un programa d'ordinador, mitjançant l'aplicació d'un senzill algoritme recursiu un nombre molt gran de vegades per generar figures sorprenentment complexes.

1.4. CLASSIFICACIÓ DELS FRACTALS

La classificació dels fractals, com tot conjunt d'objectes, és una divisió difícil perquè al agrupar-los per un punt comú es poden ometre altres característiques que els diferencien encara més. Tot i així, crec que és interessant presentar alguna forma de classificar els fractals d'acord amb les propietats que els descriuen per tal d'observar que figures molt complexes i aparentment diferents entre elles, comparteixen algunes característiques comunes que ens permeten agrupar-los qualitativament per poder estudiar-los millor.

En un àmbit general, hi ha dos grups ben definits segons si s'iteren en reals o complexos, com veurem més endavant:

- **Fractals lineals:** són aquells que es construeixen amb un simple canvi en la variació de les seves escales. Això comporta que els fractals lineals són exactament idèntics en totes les seves escales fins a l'infinít, com per exemple el triangle de Sierpinski o la corba de Koch.

- **Fractals no lineals:** són aquells que es generen a partir de distorsions complexes o no lineals. La majoria dels objectes fractals purament matemàtics i naturals no són lineals, com el conjunt de Mandelbrot o el conjunt de Julia.

1.5. FRACTALS A LA NATURA

Un cop feta una introducció al món dels fractals i abans d'entrar en un aprofundiment matemàtic de les propietats i formes de generar diferents figures fractals, seria una bona pràctica exposar algun dels "fractals naturals" que trobem en tot tipus de paisatges, per tal d'adonar-nos com aquests compleixen una sèrie de característiques de la geometria fractal i no han nascuts de laboratoris matemàtics, sinó que sempre hi han estat presents. De fet, la geometria fractal, en paraules de Benoît Mandelbrot, és la geometria de la naturalesa.

Com ja hem comentat, la geometria euclidiana ha simplificat les irregularitats de la natura per començar a entendre el món que ens envolta, ja que per exemple considerem la Terra com una esfera, i els primers dibuixos de tot infant presenten el sol com un cercle, les muntanyes com triangles, o les gavines com dos arcs circulars. Però sabem que la realitat és ben diferent, ja que tal com diu Benoît Mandelbrot en la introducció del seu gran llibre *La*



Geometria Fractal de la Naturalesa: "Ni els núvols són esfèrics, ni les muntanyes còniques, ni les costes circulars, ni l'escorça suau, ni tampoc el raig és rectilini", i aquest interès per la complexitat de la natura ha estat plasmat en la geometria fractal.

Aquesta nova eina ha evolucionat amb molta velocitat en la comunitat científica per tal d'estudiar innovadors models de formació i creixement de fenòmens i objectes naturals, ja que sembla que la naturalesa, a més de ser sàvia, té una gran predilecció per l'estètica fractal, només cal fixar-nos en l'abundància de paisatges fractals al nostre voltant.



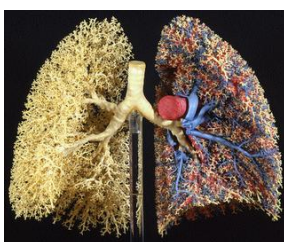
Un exemple clar de la geometria fractal a la natura podria ser una muntanya, originada per l'erosió de la pluja, el vent, la fractura de les roques per canvis de temperatura, pressió i moviments sísmics que creen la serralada rocosa en la que es troba la muntanya. Per tant, la muntanya es modifica a tota escala de la mateixa manera, i aquesta complexitat presentarà similituds entre el perfil de la serralada, el de la muntanya i el d'una petita pedra del

seu cim, vessant o peu. També en l'àmbit geogràfic, podem observar com les ramificacions dels diferents cabals i afluents des del naixement fins a la desembocadura d'alguns rius o la multitud d'entrants i sortints de les línees costaneres, formen en conjunt corbes amb propietats fractals.



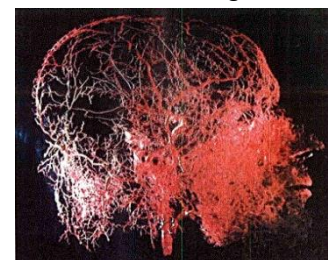
També podem trobar exemples sorprenents de la geometria fractal en els éssers vius. Un dels casos més meravellosos és el *Brocoli Romanesco*, que presenta una autosimilitud pràcticament exacta. Un altre exemple clàssic seria una de les primeres plantes del nostre planeta, la falguera, que mostra una autosimilitud quasi perfecta entre les seves ramificacions. Aquestes bifurcacions són els dissenys biològics més abundants degut a la seva senzillesa i eficàcia a l'hora de cobrir una superfície o volum, una de

les qualitats que comparteixen les ramificacions amb la resta de fractals que podríem definir com un "fractal natural" d'iteracions limitades, ja que el codi genètic de la planta ordena a les branques principals i secundàries amb la mateixa regla d'iteració: "Creix i bifurca't creant una rèplica teva en cada ramificació". Aquesta propietat, tant de falgueres o arbres, permet maximitzar la superfície i captar el màxim de llum, CO₂ i oxigen possible en el cas de les plantes.



De la mateixa manera, fins i tot podem trobar ramificacions amb formes fractals, auguri de bona salut, en el nostre propi organisme amb diferents avantatges: ens permet cobrir i alimentar el màxim de cèl·lules i assegurar la pressió sanguínia, en el cas del sistema nerviós o les venes i arteries; ens possibilita maximitzar l'intercanvi d'oxigen i diòxid de carboni en cada inspiració, en el cas del bronquis i alvèols pulmonars; o fins i tot, garanteix el bon funcionament dels sistemes

fisiològics, tant de distribució (sistema sanguini, limfàtic), com de recol·lecció (digestiu, pulmonar) i de processament d'informació (neurones i sistema nerviós) amb resistència a lesions o fallades parcials, degut altra vegada a la seva autosimilitud i la redundància d'estructura, segons científics i metges especialitzats en la fractalitat dins de l'ésser humà.



Si continuem explorant el nostre entorn trobarem fractals i matemàtiques a tots costats, una llista interminable d'objectes fractals fruit de la dèria de la natura, que cada dia s'amplia més i més. Podem trobar aquestes formes fractals en camps inimaginables com en onades, flocs de neu, agregats electroquímics, imants, vidres, l'electròlisi, la distribució d'arbres en boscos, la trajectòria de partícules de pol·len en suspensió, el creixement poblacional de colònies de bacteris, tot flux turbulent, ones cerebrals, cràters de la lluna, o fins i tot, en la distribució d'estrelles en les galàxies com la de galàxies en l'Univers.



Per primera vegada, els fractals ens han permès descriure i estudiar formes geomètriques naturals tan complexes i variades com les anteriors, i ahora representen una eina o mètode de gran simplicitat i efectivitat per generar elements naturals (com paisatges muntanyosos) de forma virtual amb programes informàtics d'imatge digital, utilitzant algorismes recursius per aconseguir l'autosimilitud, ja que comparteixen el mateix procés de formació (anomenat *agregació limitada per difusió -DLA-* o *creixement fractal*).

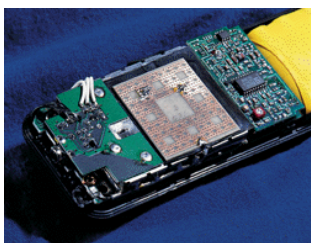
Hem dit que a la naturalesa hi ha incomptables fractals però també que una propietat fonamental d'aquests és la seva forma recursiva infinita, és a dir, autosemblança amb detall a tota escala. Això fa que ens plantejem una qüestió, hi ha realment fractals naturals si la precisió de la natura no arriba als nivells de la definició de fractal? Si responem que no, llavors no n'hi ha de fractals a la natura, però això seria el mateix que dir que en la naturalesa no existeixen esferes ja que la Terra o altres planetes no s'ajusten al model del que seria una esfera perfecte. Els fractals no s'ajusten completament al que és la natura i òbviament no existeixen en el món natural com tampoc no existeixen rectes ni circumferències, simplement són models matemàtics que aproximen la realitat per poder entendre i descriure formes naturals fins ara indescriptibles ja que els fractals, com la natura, són massa complexos i irregulars per ser explicats en el llenguatge geomètric tradicional.

1.6. APLICACIONS

En aquest punt del treball, la pregunta que sol venir al cap és: a part de ser bons models per aproximar la natura, els fractals serveixen per alguna altra cosa? La resposta és un sí rotund. De fet citarem algunes aplicacions de la geometria fractal en diversos àmbits, relacionats amb diferents disciplines que podrien correspondre als nostres futurs estudis segons el tipus de batxillerat escollit per captar l'interès dels més escèptics en el tema.

En l'àmbit purament científic, òbviament destaquen les matemàtiques aplicades amb interessants figures geomètriques, noves teories del caos per descriure processos aleatoris i mètodes com el de Newton per aproximar arrels, entre d'altres més teòrics. També s'han estès a la física, amb interessants observacions fenomenològiques en la meteorologia com útils aplicacions militars en l'estudi del comportament de les naus davant ràfegues de vent com en el trajecte d'un submarí. I per descomptat, s'ha avançat molt en els laboratoris químics amb nous experiments que donen lloc a figures fractals amb propietats molt curioses i útils que estan intrínsecament relacionades amb les propietats fractals, com l'electròlisi o el zincat.

En un camp més biològic o sanitari, han permès avançar molt la medicina pels factors fractals dels sistemes del nostre organisme, per tal de detectar malalties en els pulmons, ossos o el propi cervell, en funció de la seva dimensió fractal. També han tingut molta importància en la biologia i geologia perquè els models de la geometria fractal han fet possible estudis més curiosos, tant en els paisatges i animals de la naturalesa, com en l'erosió de les muntanyes, terratrèmols o la incidència de certs fenòmens naturals en el sòl terrestre.



En un entorn tecnològic, els enginyers no han parat de treure bon profit als fractals, tant en la codificació de senyals d'àudio, vídeo o digital, així com la compressió d'imatges. Es tracta de buscar algorismes recursius similars als de construcció dels fractals per tal de guardar la fórmula que genera una part de la imatge en lloc d'una porció d'imatges d'ella mateixa, reduint la memòria necessària. Però l'aplicació més exitosa i enginyosa són les antenes fractals perquè han permès disminuir la seva grandària, la funcionalitat multibanda i el seu rendiment gràcies a aplicar les propietats fractals en dispositius mòbils de telecomunicació i infraestructura, com l'empresa catalana "Fractus S.A." amb gran influència internacional per aquesta brillant idea patentada. També no paren de sorgir idees innovadores com l'estudi de models de tràfics de xarxes.

D'altra banda, els fractals també tenen lloc en les ciències socials, sobretot en l'anàlisi borsari i de mercat que segons estudis del mateix Mandelbrot presenta un comportament fractal amb el que es pot arriscar i jugar amb cert raonament. O també podríem pensar en estudiar la història com períodes fractals, ja que sempre es repeteixen i arribar-ne a una conclusió.

Els fractals també han creuat la frontera entre la ciència i l'art. Avui dia, molts artistes que han escollit aquest mitjà per a les seves expressions produeixen magnífiques representacions hàbilment elaborades



d'aquests objectes matemàtiques. D'altra banda, la música fractal consisteix en la projecció del comportament dinàmic o l'estructura d'un fractal sobre un espai musical per generar composicions intrigants i refrescants. Els fractals s'han usat comercialment en la indústria cinematogràfica, en pel·lícules com Star Wars, Star Trek o Avatar, ja que les imatges fractals són usades com una alternativa davant dels costosos escenaris elaborats per produir insospitats paisatges.

Un cop despertada la curiositat de cadascú per conèixer l'enigma darrere d'aquests fractals amb tantes aplicacions en àmbits inversemblants, podem fer un estudi matemàtic i anar descobrint els secrets de la geometria fractal des d'un punt de vista científic.

2. FRACTALS GEOMÈTRICS I DIMENSIÓ FRACTAL

En la introducció al món de la geometria fractal, hem adquirit una idea intuïtiva del què és un fractal, les seves principals característiques i propietats, així com una presentació d'alguns tipus de fractals, tant naturals com no. Però per consolidar aquests conceptes inicials, farem una anàlisi dels fractals geomètrics més importants. Aquests són els primers tipus de fractals que es van idear com a resultat d'aplicar infinites vegades un procés de construcció a un objecte geomètric inicial, per tant, són fractals lineals perquè no sortim de la iteració en reals.

Primer exposarem els conceptes d'iteració per poder entendre tots els raonaments posteriors. A continuació, recordarem la nostra idea intuïtiva de dimensió per poder arribar a una generalització que ens permeti calcular la dimensió fractal, cosa que ens ajudarà a entendre algunes de les seves propietats així com tenir una eina per poder comparar-los entre ells.

Lavors iniciarem una anàlisi en profunditat dels fractals geomètrics més "clàssics" amb les eines al nostre abast, fruit del treball dels primers grans matemàtics en aquesta temàtica als qui s'atribueix el nom del fractal en el seu honor.

En cada apartat, aplicarem unes normes de procediment similars per tal d'ordenar els conceptes i tenir una guia que ens ajudi a entendre tot el relacionat amb aquest tipus de fractals, tant de forma intuïtiva com matemàtica. Primer presentarem els científics a qui s'atribueix el nom del fractal en honor al seu treball en aquets àmbit, per tal de conèixer el motiu de la creació d'aquestes figures matemàtiques fruit de les seves preocupacions principals, així com les propietats que volien aconseguir plasmar (tot i que en aquella època no hi havia ordinadors prou potents per representar-los). Després explicarem el seu procés de construcció a partir del concepte d'iteració, per tal de veure que instruccions molt senzilles poden donar figures extraordinàriament complexes. Un cop introduït el fractal, analitzarem detalladament les propietats més sorprenents que el caracteritzen plasmades en paradoxes d'aquest tipus: "una corba de longitud infinita que delimita una àrea finita" o "un volum nul amb àrea infinita", entre d'altres. Per tant, calcularem pas a pas la longitud, l'àrea o el volum segons convingui, per tal d'arribar a fórmules generals que portades al límit ens donin el seu valor per a cada fractal, ja sigui concret o tendeixi a infinit. Ho acompanyarem d'unes taules que ho exemplifiquin clarament en cada iteració, i hem preferit fer-ho per a un cas concret, és a dir, considerant que la figura inicial té un segment, costat o aresta de longitud la unitat per tal de veure més clar com evolucionen aquests valors fins a convergir en un de característic, tot i que també es podria trobar en funció de la longitud, àrea o volum inicial. I finalment, calcularem la dimensió fractal de cada un amb els comentaris adients per tal de veure com omplen el pla o l'espai, i poder-los comparar més endavant.

Això sí, tots els exemples fractals estaran acompanyats de les il·lustracions i taules gràfiques necessàries per ajudar-nos a comprendre millor tots els conceptes i explicacions, ja que com s'acostuma a dir: una imatge val més que mil paraules.

2.1. ITERACIONS

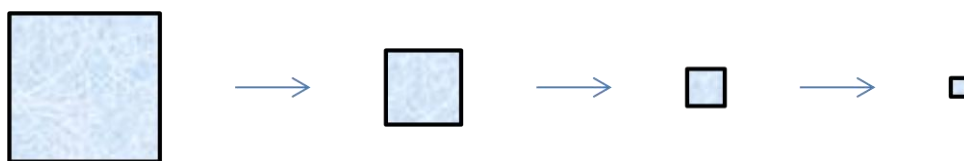
Començarem l'estudi matemàtic dels fractals amb la introducció del concepte d'iteració, el principal procés de generació dels fractals.

Iteració significa la repetició d'un procés varies vegades. En les matemàtiques, hi ha molts tipus de processos iteratius, els quals impliquen equacions algebraïques, funcions matemàtiques o algorismes de programació.

En aquest bloc, la majoria de les iteracions involucraràn regles o construccions geomètriques. Comencem amb una figura geomètrica qualsevol, anomenada *llavor*. Apliquem una operació geomètrica escollida, anomenada *regla d'iteració*, a la llavor. Aquesta regla pot suposar una reducció, ampliació, rotació, retallament o reemplaçament, de la forma inicial. Després d'executar aquesta operació obtenim una nova figura. Llavors iterem, és a dir, apliquem la mateixa operació a la nova figura per obtenir-ne la següent. Aleshores, repetim aquest procés, aplicant contínuament (una i altra vegada) la regla d'iteració per produir una seqüència de figures.

La seqüència de figures resultants s'anomena *òrbita* de la iteració geomètrica. Però la pregunta principal és: Quina és la figura resultant que finalment aconseguim després d'aplicar aquesta iteració geomètrica una i altra vegada?, és a dir, Quin és el *destí de l'òrbita*?

Per portat a la pràctica aquests conceptes, veurem un exemple molt senzill:



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració següent: "*Reduir el quadrat anterior de tal manera que cada costat sigui la meitat de llarg*".

La *llavor* és un quadrat de costat de longitud 1. A mesura que anem iterant aquesta regla, els costats del quadrat van tenint una llargada menor i menor, igual a la meitat del quadrat anterior. Els costats del quadrat es van fent més petits i per tant, també l'interior del quadrat es fa més petit. El quadrat tendeix cap a un sol punt, és a dir, el *destí de l'òrbita* és un únic punt.

Com veurem en aquest capítol, simples iteracions geomètriques aplicades infinites vegades ens poden portar a resultats o figures molt complexes: els fractals.

2.2. DIMENSIÓ FRACTAL

Hem vist que la dimensió fractal és la propietat fonamental dels fractals, la qual ens dóna una mesura més sensible de la densitat o complexitat aparent del conjunt fractal.

Per entendre el concepte i càlcul de la dimensió fractal, hem d'analitzar la noció de dimensió topològica.

La *dimensió topològica* d'un conjunt és la noció de dimensió a la que estem acostumats: un per a corbes, dos per a superfícies, tres per a volums, etc.

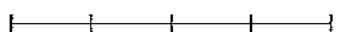
Formalment, Poincaré va formular la dimensió topològica (D_T) com: "*un espai té dimensió n si pot ser envoltat o dividit d'alguna manera per altres de dimensió $n - 1$* ". Per tant, amb aquesta idea podem pensar que:

Conjunt buit	$D_T = -1$	Indivisible
Punt	$D_T = 0$	Envoltat pel buit
Segment	$D_T = 1$ (1D)	Divisible per punts
Quadrat	$D_T = 2$ (2D)	Divisible per segments
Cub	$D_T = 3$ (3D)	Divisible per quadrats

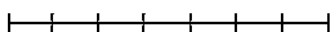
Una altra definició més recent de dimensió topològica d'un objecte geomètric, introduït per K. Devlin al 1988, es basa en el moviment: "En una corba només podem moure'ns en una direcció, cap endavant o endarrere. En una superfície podem anar endavant, endarrere, a la dreta o a l'esquerra. En un volum podem moure'ns, a més, cap a dalt o cap a baix. Per tant, la corba té una dimensió, la superfície té dues dimensions i el volum té tres dimensions".

D'altra banda, per arribar a una definició que admeti resultats enters o fraccionaris, hem de generalitzar el concepte de dimensió d'una altra manera si ens fixem en la seva autosimilitud:

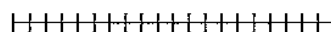
Un segment es pot dividir en peces autosimilars. Sabem que té dimensió 1.



El segment original és quatre vegades més llarg que qualsevol de les seves quatre peces.

$$4 = 4^1$$


El segment original és set vegades més llarg que qualsevol de les seves set peces.

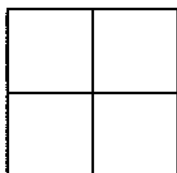
$$7 = 7^1$$


En general, es pot dividir el segment original en n peces autosimilars:

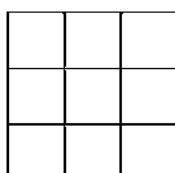
nombre de peces (n) = factor d'ampliació (m)

$$n = m^1$$

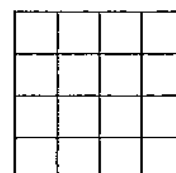
L'interior d'un quadrat també es pot dividir en peces autosimilars més petites. Sabem que té dimensió 2.



El quadrat original té costats dues vegades més llargs que els de qualsevol de les seves quatre peces.

$$4 = 2^2$$


El quadrat original té costats tres vegades més llargs que els de qualsevol de les seves nou peces.

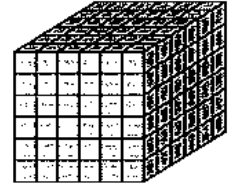
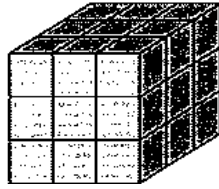
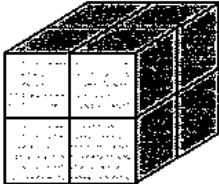
$$9 = 3^2$$


En general, el quadrat original té costats m vegades més llargs que els de qualsevol de les seves n peces:

nombre de peces = (factor d'ampliació)²

$$n = m^2$$

Finalment, l'interior d'un cub es pot descompondre en cubs autosimilars més petits. Sabem que té dimensió 3.



El cub original té costats dues vegades més llargs que els de qualsevol de les seves vuit peces.

$$8 = 2^3$$

El cub original té costats tres vegades més llargs que els de qualsevol de les seves vint-i-set peces.

$$27 = 3^3$$

En general, el cub original té costats m vegades més llargs que els de qualsevol de les seves n peces:

nombre de peces = (factor d'ampliació)³

$$n = m^3$$

Per tant, si m és el factor d'ampliació: un segment pot ser dividit en m^1 peces autosimilars l'interior d'un quadrat en m^2 peces, i l'interior d'un cub en m^3 peces. En cada cas, l'exponent de m indica la dimensió de l'objecte. Això suggereix la fórmula següent per la dimensió d'un objecte:

$$n = m^D$$

On:

n = nombre de peces autosimilars

m = factor d'ampliació

D = dimensió

I si volem aïllar la dimensió (D), només hem d'aplicar les propietats logarítmiques:

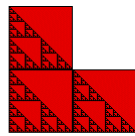
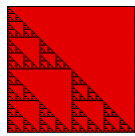
$$\log n = \log m^D$$

$$\log n = D \cdot \log m$$

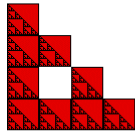
$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

Aquesta fórmula de la *dimensió fractal* (D_F) o *dimensió d'autosimilitud* ens permet calcular el valor de la dimensió de qualsevol figura, tant si és fractal com si no, és a dir, respecta el concepte de *dimensió topològica*.

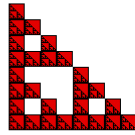
Una definició més general de dimensió fractal que la de autosimilitud ens la proporciona la *dimensió box-counting* ("comptatge de caixes") o de *Minkowski* (D_M). Per poder mesurar la dimensió



$r_1 = 1/2, N(r_1) = 3$



$r_2 = 1/4, N(r_2) = 9$



$r_3 = 1/8, N(r_3) = 27$

d'autosimilitud necessitem que l'objecte sigui perfectament autosimilar, però podem relaxar aquesta condició i utilitzar el mateix mètode de recobriment per calcular la *dimensió box-counting*. Recobrirem, independentment de la figura geomètrica d'estudi, amb caixes de costat r (o equivalentment boles de radi r , però llavors s'acostuma a parlar de dimensió de capacitat). Determinem el número de caixes de mida r necessàries per recobrir completament el conjunt de punts que formen la figura. Per tant, la *dimensió de Minkowski* és:

$$D_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log r}$$

Un quocient que ens resulta familiar, però fent el costat zero. La *dimensió box-counting* és així una generalització de la *dimensió d'autosimilitud* i ambdues coincideixen per a objectes totalment autosimilars per a tot r . Però aquesta ens facilita un bon mètode per calcular altres tipus de fractals naturals com la línia de costa de Gran Bretanya tal com proposava Mandelbrot.



2.3. FRACTALS GEOMÈTRICS MÉS "CLÀSSICS"

2.3.1. CONJUNT DE CANTOR

HISTÒRIA



Georg Ferdinand
Ludwig Philipp
Cantor

El conjunt de Cantor, el fractal més típic, conegut i antic, rep el nom de Georg Cantor que el 1883 el va utilitzar com a eina d'investigació per a una de les seves principals preocupacions: el continu. Cantor no sabia que aquest conjunt ja havia estat descobert pel matemàtic dublinès Henry Smith, però com que va morir sense donar a conèixer el seu descobriment, va ser G. Cantor el que va quedar associat a aquest conjunt.



L'òrbita descrita en segueix la regla d'iteració: "Eliminar el terç central de qualsevol segment, deixant enrere els seus extrems."

La llavor és un segment de línia recta. A mesura que anem iterant, s'elimina el terç intermedi del segment de la iteració anterior, per tant, cada vegada els nombre de segments es duplica però la seva longitud passa a ser una tercera part de la dels anteriors.

Al ser el primer fractal que analitzem, farem una explicació més detallada del procés en les primeres iteracions. Agafem el segment $[0, 1]$ de la recta real. Dividim aquest interval en tres subconjunts iguals. D'aquesta manera obtindrem els següents intervals:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Com hem dit, el primer pas de la construcció del conjunt de Cantor consisteix en treure el subconjunt obert intermedi, és a dir, traiem $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Per tant, el conjunt C_1 és la unió dels intervals restants:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

El segon pas consisteix en repetir el mateix procés a cada un dels intervals que formen C_1 . En altres paraules, dividim cada interval que compon C_1 en tres parts iguals per generar els següents subconjunts:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \text{ i } \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Retirem els subintervals oberts intermedis com en el pas anterior, és a dir, traiem els intervals $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ i $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. D'aquesta manera ens queda el conjunt C_2 format per dos segments que componen els intervals restants:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \text{ i } \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Si continuem aquest procés, després d'infinitos passos haurem eliminat els subintervals intermedis de tots els segments. Com que eliminem una tercera part de la longitud del segment de la iteració anterior, es formen més segments però menors i la distància entre ells augmenta, el destí de l'òrbita seria un conjunt de punts quasi inapreciables constituïts pels extrems dels intervals tancats de totes les

iteracions i els punts que s'obtenen com a límit del procés. Tots aquests formen el fractal anomenat "Conjunt de Cantor" o "Pols de Cantor".

LONGITUD

Un bon exercici és analitzar la longitud del conjunt de Cantor. Per fer-ho hem de calcular-la en cada iteració, per tal de veure com la longitud dels segments que formen la construcció en cada pas va disminuint. Si considerem que comencem amb un segment d'una unitat de longitud, podem fer una taula amb el nombre de segments i la seva longitud total en cada pas.

	Nombre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total (en unitats linears)
C_0	1	1	1
C_1	2	$\frac{1}{3}$	$2 \cdot \frac{1}{3} = 0,666 \dots$
C_2	4	$\frac{1}{9}$	$4 \cdot \frac{1}{9} = 0,444 \dots$
C_3	8	$\frac{1}{27}$	$8 \cdot \frac{1}{27} = 0,296 \dots$
C_n	2^n	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Intuïtivament observem com la longitud total del conjunt va disminuint en cada pas, i per calcular la del fractal del conjunt de Cantor només hauríem de pensar en la que tindria després d'infinites iteracions:

$$l_{C_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = l_C$$

Per tant, tal com preveiem la longitud final del conjunt de Cantor és zero, i podríem pensar que està format per punts inapreciables.

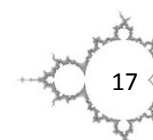
DIMENSIÓ FRACTAL

El conjunt de Cantor podria descompondre's en 2^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 3^n . Això equival a pensar que en la primera iteració tenim 2 intervals idèntics a l'original ($n = 2$) que s'han d'amplificar per un factor de 3 ($m = 3$) per reproduir el segment sencer.

Per tant, la dimensió fractal del conjunt de Cantor és:

$$D = \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{n \cdot \log 2}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots$$

Com ens esperàvem, no arriba a la dimensió 1 d'una recta però tampoc no és de dimensió 0, sinó un conjunt de punts infinitament petits, inapreciables i irrepresentables degut a la seva abstracció.



2.3.2. CORBA DE PEANO

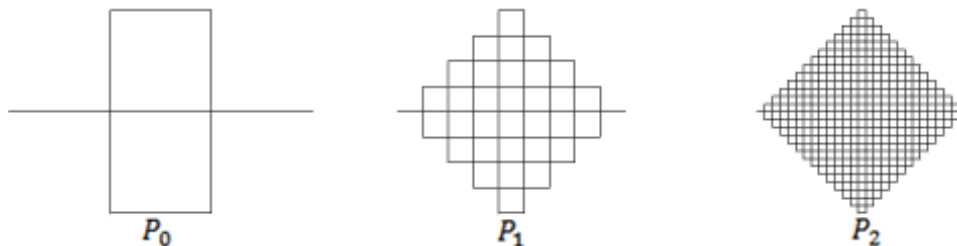
HISTÒRIA



Giuseppe Peano

El matemàtic italià Giuseppe Peano va publicar el 1890 el primer exemple d'una corba contínua que omple el pla, anomenada corba de Peano en el seu honor, fractal que apareixia com a límit d'una successió de corbes. L'aportació de Peano va ser totalment analítica i no definia cap procés iteratiu ni cap visualització gràfica. Per tant, no se sap quina corba es pot anomenar pròpiament corba de Peano, però podria ser qualsevol de les poligonals que tendeixen cap al mateix límit: el quadrat.

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Substituir cada segment per la corba generada en la iteració anterior."

La llavor és una corba de nou segments ordenats com a P_0 . A mida que anem iterant, es substitueix cada segment de la iteració anterior, per tant, cada vegada es produeixen més segments menors que van omplint el pla.

Si repetim indefinidament el procés anterior, el destí de l'òrbita seria un entremat de segments quasi inapreciables que arriben a omplir tot un quadrat unitari en el pla. Tots aquests formen el fractal anomenat "Corba de Peano", de longitud infinita.

DIMENSIÓ FRACTAL

La corba de Peano podria descompondre's en 9^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 3^n . Amb una mica d'atenció, podem pensar que en la primera iteració tenim 9 corbes idèntiques a l'original ($n = 9$) que s'han d'amplificar per un factor de 3 ($m = 3$) per reproduir la corba inicial. Per tant, la dimensió fractal de la corba de Peano és:

$$D = \frac{\log 9^n}{\log 3^n} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Com hem apreciat, la corba de Peano acaba omplint totalment el pla, per tant, la seva dimensió ha de ser 2.

2.3.3. CORBA DE KOCH

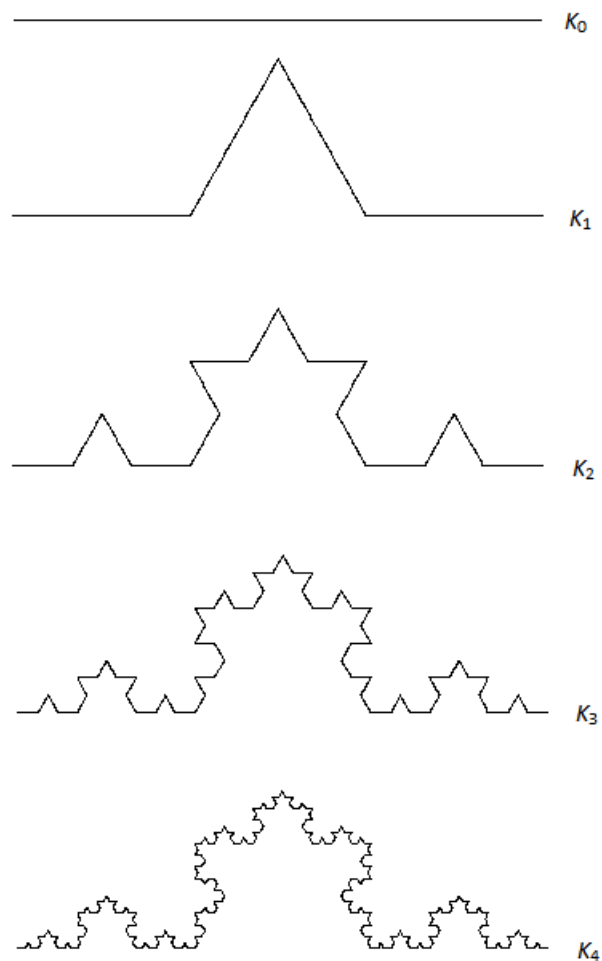
HISTÒRIA



La corba de Koch és una corba fractal contínua (i també infinita) però no derivable en cap punt (no podem traçar cap recta tangent) que va ser descrita pel matemàtic suec Helge von Koch el 1904.

Niels Fabian Helge

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Substituir la tercera part central de cada segment per dos segments de mida idèntica rotats amb un angle de 60° en sentits contraris, formant una dent."

La llavor és un segment de línia recta. A mida que anem iterant aquesta regla, s'elimina la tercera part central de cada segment de la iteració anterior, per tant, converteix cada segment en quatre, col·locats com en K_1 (dent de serra) i de longitud menor ($1/3$ de la dels segments del pas anterior).

Si continuem aquest procés, després d'infinits passos haurem eliminat les meitats de tots els segments, però afegint-ne dos per cada eliminació (de 1/3 de longitud de l'anterior). Com que els substituïm per uns altres dos de longitud menor, el *destí de l'òrbita* és una figura molt complexa amb una longitud infinita (la longitud dels segments que la formen seria inapreciable), i aquesta corba fractal s'anomena "Corba de Koch".

LONGITUD

Si considerem que comencem amb un segment d'una unitat de longitud, podem fer una taula amb el nombre de segments i la seva longitud total en cada pas.

	Nombre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total (en unitats linears)
K_0	1	1	1
K_1	4	$\frac{1}{3}$	$4 \cdot \frac{1}{3} = 1,333 \dots$
K_2	16	$\frac{1}{9}$	$16 \cdot \frac{1}{9} = 1,777 \dots$
K_3	64	$\frac{1}{27}$	$64 \cdot \frac{1}{27} = 2,370 \dots$
K_n	4^n	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Observem com la longitud total de la corba va augmentant en cada pas, i per calcular la d'aquest fractal hauríem de pensar en la que tindria després d'infinites iteracions:

$$l_{K_n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = l_K$$

Per tant, tal com imaginàvem la longitud de la corba de Koch és infinita, i podríem imaginar que està formada per una corba d'infinits segments petitíssims.

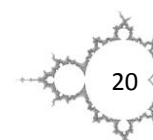
DIMENSIÓ FRACTAL

La corba de Koch podria descompondre's en 4^n peces autosimilars que es transformessin en la corba original al aplicar-los un factor d'augment de 3^n . Això equival a pensar que en la primera iteració tenim 4 segments idèntics ($n=4$) que s'han d'amplificar per un factor de 3 ($m=3$) per reproduir sencer l'original.

Per tant, la dimensió fractal de la corba de Koch és:

$$D = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618 \dots$$

Com ens esperàvem, ens ha sortit una dimensió més gran que 1 (segment), ja que és més que una corba al tenir longitud infinita.



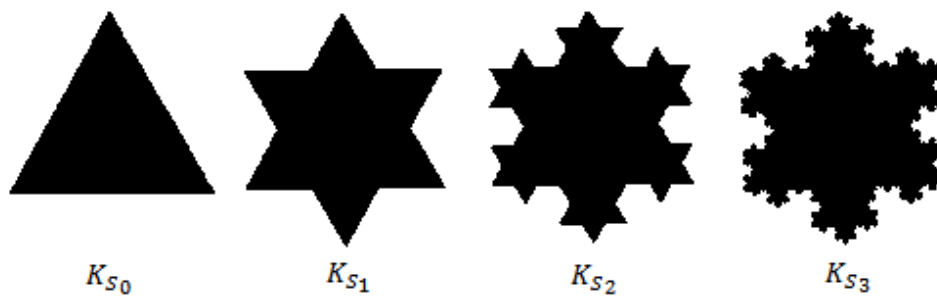
2.3.4. FLOC DE NEU DE KOCH

HISTÒRIA

Aquest fractal descrit per Koch el 1906 com a extensió de la corba de Koch, és una de les figures més conegudes degut a la seva curiosa forma, que recorda a un floc de neu, i la interessant paradoxa associada: una corba de longitud infinita que conté una àrea finita!

El floc de neu de Koch també és conegut com illa o estrella de Koch per la seva forma suggerent.

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la mateixa regla d'iteració que la corba de Koch però aplicada a una altra figura inicial que sí té superfície.

En aquest cas, la *llavor* és un triangle equilàter. A mesura que anem iterant la mateixa regla que en la corba de Koch, es substitueix cada segment per quatre de longitud menor (1/3 de la longitud dels segments de l'etapa anterior).

Si continuem aquest procés indefinidament, obtindrem tres corbes de Koch recolzades sobre cada un dels costats del triangle equilàter inicial. Per tant, el *destí de l'òrbita* és una corba amb longitud infinita que acota una regió d'àrea finita en el pla. Aquest impressionant fractal s'anomena "Floc de neu de Koch".

LONGITUD

Si considerem que comencem amb un segment d'una unitat de longitud i ens imaginem el floc de neu de Koch com la unió de tres "corbes de Koch", la seva longitud total seria el triple la longitud de la corba que hem calculat en l'apartat anterior:

$$l_{k_n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = l_k$$

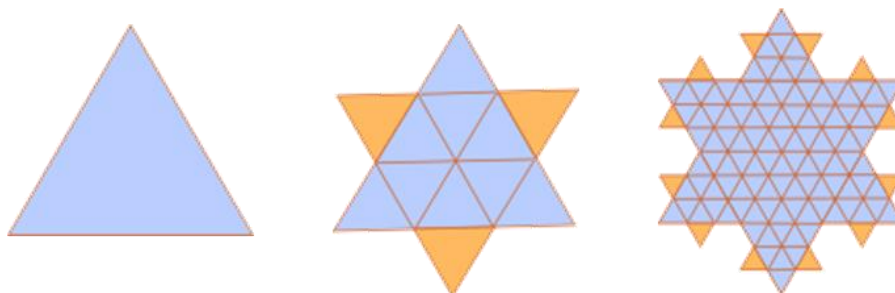
Per tant, tal com hem dit la longitud del floc de neu de Koch també és infinita.

ÀREA

Un exercici molt interessant és calcular l'àrea total del floc de neu per demostrar que és una corba de longitud infinita que delimita una àrea finita, cosa que fereix la nostra intuïció.

Una manera senzilla de veure-ho és mostrar que el floc de neu de Koch "cap" en un cercle circumscriu un triangle equilàter amb el qual comencem la construcció (de radi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ si considerem que el costat del triangle inicial és 1). Llavors si la figura sencera està continguda en aquest cercle (de $A = \pi r^2 = 1,047 \dots$), l'àrea que delimita ha de ser menor que la seva, i per tant, finita.

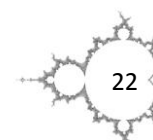
Però intentem buscar l'àrea exacta total del floc de neu de Koch amb uns càlculs matemàtics que ens requeriran més paciència, però ens serviran per demostrar realment que la seva àrea és finita. Per fer la taula, ens hem de fixar en l'àrea dels triangles nous afegida a l'àrea total del pas anterior tal com es mostra a la figura.



	Nombre de triangles nous	Longitud de la base dels nous triangles	Longitud de l'altura dels nous triangles (T.P.)	Àrea de cada triangle nou ($\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$)	Àrea total (àrea triangle inicial + àrea triangles nous anteriors + nombre de triangles nous · àrea del triangle nou)
K_{S_0}	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433 \dots$
K_{S_1}	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$	$A_{K_{S_0}} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,577 \dots$
K_{S_2}	12	$\frac{1}{9}$	$\frac{\sqrt{3}}{18}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}$	$A_{K_{S_0}} + A_{K_{S_1}} + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = 0,641 \dots$
K_{S_3}	48	$\frac{1}{27}$	$\frac{\sqrt{3}}{54}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{54}$	$A_{K_{S_0}} + A_{K_{S_1}} + A_{K_{S_2}} + 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{54} = 0,670 \dots$
K_{S_n}	$4^{n-1} \cdot 3$	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3^{2n}}$	$A_{K_{S_0}} + \dots + 4^{n-1} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3^{2n}} = A_{K_{S_0}} + \dots + 4^n \cdot 4^{-1} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{(3^2)^{n \cdot 4}} = A_{K_0} + \dots + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^n \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Llavors l'àrea total del floc de neu de Koch, quan el numero d'iteracions tendeix a infinit, ve donada per la següent sèrie:

$$A_{K_S} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$



Sabem que per calcular el resultat d'una suma de k termes consecutius d'una progressió geomètrica, hem d'utilitzar la següent expressió:

$$\sum_{n=m}^k a \cdot r^n = \frac{a \cdot (r^{k+1} - r^m)}{r - 1}$$

Si $|r| < 1$, la suma dels infinits termes decreixents de la progressió geomètrica convergeix cap a un valor finit, és a dir, $r^{\infty+1}$ tendeix cap a zero, per tant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a \cdot (r^{\infty} - r^1)}{r - 1} = \frac{a \cdot (0 - r)}{r - 1} = \frac{a \cdot r}{1 - r}$$

Si apliquem aquesta expressió a la sèrie, sabrem l'àrea total del floc de neu de Koch:

$$A_{K_S} = A_{K_{S_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{20} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} = 0,6928 \dots$$

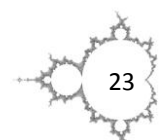
DIMENSIÓ FRACTAL

Com en el cas de la corba de Koch, cada segment del floc de neu de Koch podria descompondre's en 4^n peces autosimilars ($n=4$) que es transformessin en qualsevol de les 3 corbes de Koch que formen el fractal, al aplicar-los un factor d'augment de 3^n ($m=3$).

Per tant, la dimensió fractal del floc de neu de Koch és:

$$D = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618 \dots$$

Correspon a la dimensió fractal de la corba de Koch, ja que aquest fractal és una corba igual de complexa tot i ser tancada.



2.3.5. TRIANGLE DE SIERPINSKI

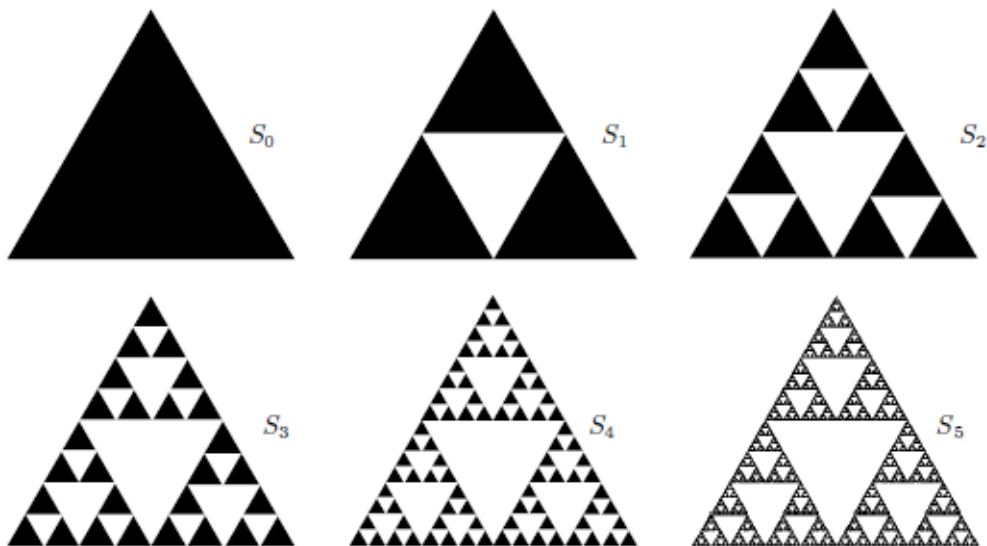
HISTÒRIA



Waclaw Sierpinski

El triangle de Sierpinski, un dels fractals més coneguts i modèlics, rep el nom del matemàtic polonès Waclaw Sierpinski que el va introduir el 1916 per demostrar que era possible construir una corba que es "creuava" amb ella mateixa en tots els punts, així com una corba de longitud infinita que "delimitava" una àrea nul·la.

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Eliminar la figura central fruit de la unió dels punts mitjans dels costats de cada triangle per tal de que en romanguin tres congruents."

La llavor és un triangle equilàter. A mesura que anem iterant aquesta regla, s'elimina el triangle interior fruit de la unió dels punts mitjans dels costats de cada triangle del pas anterior, per tant, la seva àrea es redueix $1/4$ respecte a la iteració anterior i la longitud dels costats dels triangles que el formen és la meitat que la dels anteriors.

Si continuem aquest procés, després d'infinitos passos haurem eliminat els triangles centrals de tots els triangles. Com que eliminem una quarta part de l'àrea de la iteració anterior i la longitud dels costats és menor, el destí de l'òrbita és una figura complexa amb una àrea quasi nul·la i les longituds dels costats dels triangles interns quasi inapreciables, i aquesta és el conegut fractal anomenat "Triangle de Sierpinski".

LONGITUD

Si considerem que comencem amb un triangle de costat d'una unitat de longitud, podem fer una taula amb el nombre de triangles restants i la seva longitud total en cada pas.

	Nombre de triangles restants (nombre de costats)	Longitud del costat de cada triangle	Longitud total (en unitats linears)
S_0	1 (3 · 1)	1	$3 \cdot 1 = 3$
S_1	3 (3 · 3)	$\frac{1}{2}$	$3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$
S_2	9 (3 · 9)	$\frac{1}{4}$	$3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = 6,75$
S_3	27 (3 · 27)	$\frac{1}{8}$	$3 \cdot 27 \cdot \frac{1}{8} = 10,125$
S_n	$3^n (3 \cdot 3^n)$	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3 \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Intuïtivament observem com la longitud total del conjunt va augmentant en cada pas, i per calcular la del fractal del triangle de Sierpinski només hauríem de portar aquest procés fins al límit:

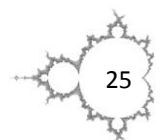
$$l_{S_n} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = l_S$$

Per tant, tal com prevèiem la longitud final del triangle de Sierpinski és infinita, i podríem pensar que està format per triangles ínfims però que conserven els seus costats.

ÀREA

Si considerem les mateixes condicions anteriors, podem fer una taula amb la longitud de l'altura i la base de cada triangle per tal de calcular l'àrea de cada un com l'àrea total en cada pas.

	Nombre de triangles restants	Longitud de la base de cada triangle	Longitud de l'altura de cada triangle (T.P.)	Àrea de cada triangle ($\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$)	Àrea total (nombre de triangle · àrea de cada triangle)
S_0	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,433 \dots$
S_1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,324 \dots$
S_2	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$	$9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = 0,243 \dots$
S_3	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$	$27 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = 0,182 \dots$
S_n	3^n	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}} = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{(2^2)^n \cdot 2^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$



Observem com l'àrea total del conjunt va disminuint en cada pas, i per calcular la del fractal del triangle de Sierpinski només hauríem de repetir aquest procés infinites vegades:

$$A_{S_n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = A_S$$

Per tant, tal com imaginàvem l'àrea final del triangle de Sierpinski és zero, i podríem pensar que està format per triangles tan petits que tenen una àrea ínfima, és a dir, nul·la.

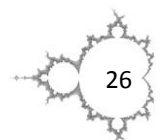
DIMENSIÓ FRACTAL

El triangle de Sierpinski podria descompondre's en 3^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 2^n . Això equival a pensar que en la primera iteració tenim 3 triangles idèntics a l'original ($n = 3$) que s'han d'amplificar per un factor de 2 ($m = 2$) per reproduir-lo sencer.

Per tant, la dimensió fractal del triangle de Sierpinski és:

$$D = \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849 \dots$$

Com ens esperàvem, ens ha sortit una dimensió més gran que 1 (segment) però més petita que 2 (pla), ja que és un objecte geomètric de longitud infinita, cosa que implica dimensió major que 1, a la vegada té àrea nul·la, cosa que indica dimensió menor que 2.

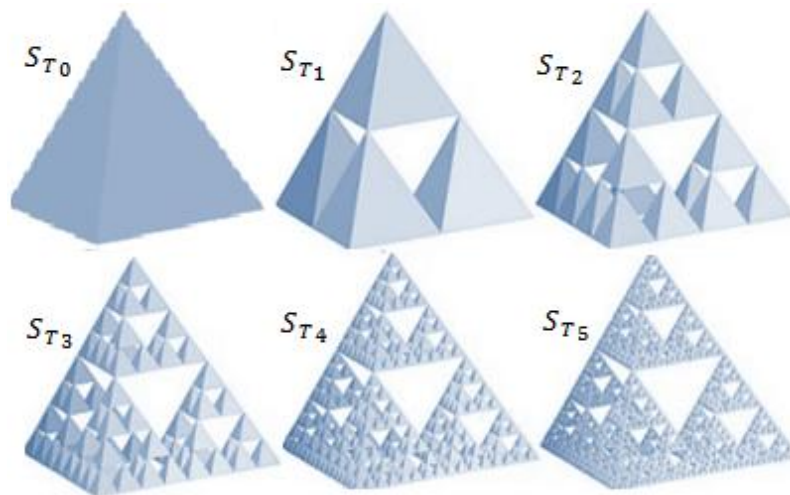


2.3.6. TETRAEDRE DE SIERPINSKI

HISTÒRIA

El tetraedre de Sierpinski és la projecció del famós triangle de Sierpinski a l'espai, on els triangles es converteixen en tetraedres, i al ser un fractal tridimensional ens amaga formes i propietats sorprenents com que la seva superfície és finita i constant, però el seu volum nul!

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Eliminar la figura central (octaedre regular) fruit de la unió dels punts mitjans de les arestes de cada tetraedre."

La llavor és un tetraedre regular. A mesura que anem aplicant la regla d'iteració, s'elimina l'octaedre regular central format per la unió dels punts mitjans de les arestes de cada tetraedre del pas anterior (la forma central eliminada, que és un octaedre regular tal com hem dit, és difícil d'apreciar i normalment es confon amb un altre tetraedre, però un bon exercici és construir quatre tetraedres iguals, col·locar-los com en S_1 , i analitzar que la peça que hi falta per obtenir el tetraedre inicial correspon a la figura esmentada). Per tant, veiem com la longitud de l'aresta de cada tetraedre és la meitat que la dels anteriors, i apreciem com el seu volum va disminuint.

Si continuem aquest procés indefinidament, haurem eliminat la figura central de cada tetraedre. Tal com observem, el volum i la longitud de les arestes són cada vegada menors, com a conseqüència, el destí de l'òrbita és una figura de volum pràcticament nul formada per tetraedres d'arestes ínfimes, i aquesta és el fractal anomenat "Tetraedre de Sierpinski".

ÀREA

A continuació analitzarem les propietats ocultes d'aquest fractal que hem citat al començament. Però abans d'analitzar per què té volum nul, hem d'entendre perquè la seva àrea és finita (i a més constant!).

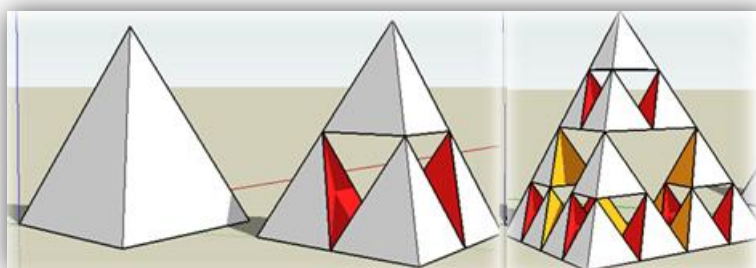
Si considerem que les arestes del tetraedre inicial són d'una unitat de longitud, el tetraedre serà regular, ja que tindrà quatre cares iguals que correspondran a triangles equilàters de costats de mateixa longitud que l'aresta. Per tant, podem fer una taula amb la seva àrea total en cada pas a partir de l'àrea dels triangles equilàters que la formen.

	Nombre de tetraedres restants (Nombre de cares triangulars)	Longitud de la base de cada cara triangular (aresta)	Longitud de l'altura de cada cara triangular (T.P.)	Àrea de cada cara triangular ($\frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$)	Àrea total (nombre de cares triangulars \cdot àrea de cada cara triangular)
S_{T_0}	1 ($4 \cdot 1$)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,732 \dots$
S_{T_1}	4 ($4 \cdot 4$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,732 \dots$
S_{T_2}	16 ($4 \cdot 16$)	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$	$4 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = 1,732 \dots$
S_{T_3}	64 ($4 \cdot 64$)	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$	$4 \cdot 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = 1,732 \dots$
S_{T_n}	4^n ($4 \cdot 4^n$)	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$4 \cdot 4^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}} = 4 \cdot 4^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{(2^2)^n \cdot 2^2}$ $= \sqrt{3}$

Observem com l'àrea del tetraedre de Sierpinski és finita i invariant:

$$A_{S_{T_n}} = \sqrt{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{3} = A_{S_T}$$

Per tant, l'àrea del tetraedre es manté sempre constant, independentment de la iteració en què la calculem, ja que les cares ocultes cobriran exactament els forats o buits externs. Això equival a pensar que a l'eliminar l'octaedre regular (figura de vuit cares iguals, en aquest cas triangles), es suprimeixen quatre cares triangulars externes, però alhora es desvelen unes altres quatre cares triangulars interiors, com podem projectar en les figures adjuntes.



VOLUM

La característica més sorprenent d'aquest fractal és que el seu volum és nul, tot i ser la seva àrea constant. Per demostrar-ho, calcularem el volum total en cada iteració per veure com aquest va disminuint, a partir dels volums de cada tetraedre amb les condicions i dades de l'apartat anterior.

	Nombre de tetraedres restants	Àrea de la base triangular de cada tetraedre	Longitud de l'altura de cada tetraedre (T. P.)	Volum de cada tetraedre ($\frac{1}{3} \cdot \text{àrea de la base} \cdot \text{altura}$)	Volum total (nombre de tetraedres · volum de cada tetraedre)
S_{T_0}	1	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$	$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,117 \dots$
S_{T_1}	4	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,589 \dots$
S_{T_2}	16	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}$	$16 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = 0,029 \dots$
S_{T_3}	64	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{6}}{24}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\sqrt{6}}{24}$	$64 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\sqrt{6}}{24} = 0,014 \dots$
S_{T_n}	4^n	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$\frac{\sqrt{6}}{3 \cdot 2^n}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3 \cdot 2^n}$ $= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3^2 \cdot 2^{3n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2^{3n+2}}$	$4^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2^{3n+2}} = 4^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot (2^3)^n \cdot 2^2} =$ $\left(\frac{4}{8}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Observem com el volum total del conjunt va disminuint en cada pas, i per calcular el del fractal hauríem de raonar-ho quan el número d'iteracions tendeix a infinit:

$$V_{S_{T_n}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = V_{S_T}$$

Tal com havíem pronosticat, el volum final del tetraedre de Sierpinski és zero, ja que a mida que anem iterant, cada tetraedre es subdivideix en uns altres quatre que deixen multitud d'espais buits en l'original. Per tant, cada vegada té menys volum (recordem que l'àrea roman constant) i en el seu límit serà nul.

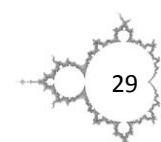
DIMENSIÓ FRACTAL

El tetraedre de Sierpinski podria descompondre's en 4^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 2^n . Això equival a pensar que en la primera iteració romanen 4 tetraedres idèntics a l'original ($n = 4$) que s'han d'amplificar per un factor de 2 ($m = 2$) per reproduir-lo sencer.

Per tant, la dimensió fractal del tetraedre de Sierpinski és:

$$D = \frac{\log 4^n}{\log 2^n} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Per tant, aquest fractal té la mateixa dimensió que una superfície o pla euclidià, resultat que connecta amb el fet que la seva àrea total roman constant en totes les seves etapes. També el fet que el seu volum és nul ens indica que la seva dimensió no es pot aproximar a la de l'espai (3D), cosa que xoca amb la idea intuïtiva d'associar-lo amb un objecte fractal tridimensional.



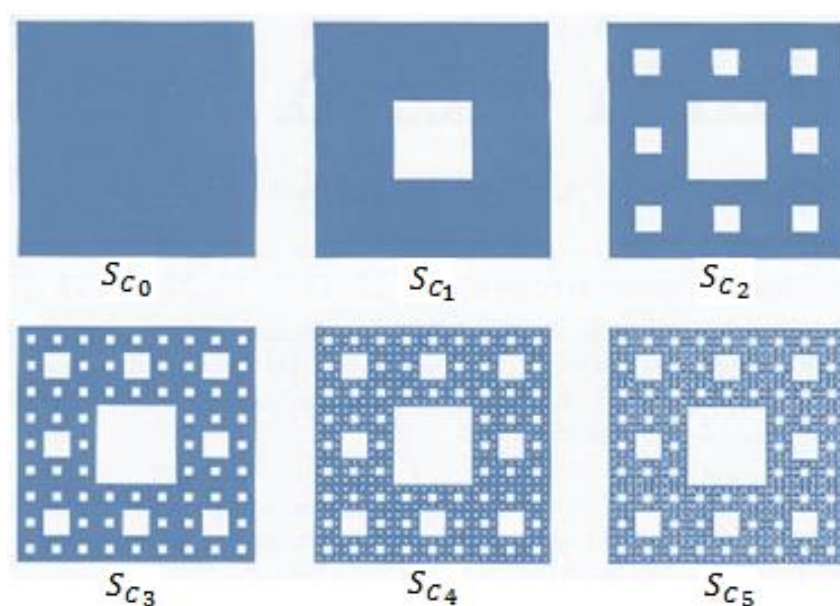
2.3.7. CATIFA DE SIERPINSKI

HISTÒRIA

La catifa de Sierpinski és un altre fractal clàssic descrit per Waclaw Sierpinski el 1916 que constitueix una generalització del conjunt de Cantor a dues dimensions (un vertical i un altre horitzontal). Comparteix moltes propietats amb ell i el triangle de Sierpinski, com ser un conjunt de longitud infinita i superfície nul·la.

També és conegut com quadrat de Sierpinski, ja que es poden considerar catifes fractals el resultat d'aplicar el mateix procés d'iteració a qualsevol figura geomètrica.

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Eliminar el quadrat central de cada conjunt de nou quadrats idèntics congruents per tal que en romanguin vuit."

La llavor és un quadrat. A mida que anem iterant aquesta regla, s'elimina el quadrat interior fruit de la divisió dels anteriors en conjunts de nou quadrats idèntics congruents, i després s'aplica de forma recursiva a cada un dels vuit quadrats restants, per tant, la seva àrea es redueix $1/9$ respecte a la iteració anterior i els costats dels triangles que el formen són un terç de llargs que els anteriors.

Si continuem iterant indefinidament, eliminant els quadrats centrals de cada nou, la seva àrea va disminuint i la longitud dels costats va minvant. Per tant, el destí de l'òrbita és una figura complexa amb una àrea pràcticament nul·la, coneguda com "Catifa de Sierpinski".

LONGITUD

Si considerem que comencem amb un quadrat de costat d'una unitat de longitud, podem fer una taula semblant a la del triangle de Sierpinski.

	Nombre de quadrats centrals eliminats (nombre de costats)	Longitud del costat de cada quadrat central eliminat	Longitud total (<i>longitud quadrat inicial + longitud quadrats eliminats anteriors + nombre de costats dels quadrats centrals · longitud de cada quadrat</i>)
S_{C_0}	0	0	4
S_{C_1}	1 (4 · 1)	$\frac{1}{3}$	$l_{S_{C_0}} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 5,333 \dots$
S_{C_2}	8 (4 · 8)	$\frac{1}{9}$	$l_{S_{C_0}} + l_{S_{C_1}} + 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9} = 8,888 \dots$
S_{C_3}	64 (4 · 64)	$\frac{1}{27}$	$l_{S_{C_0}} + l_{S_{C_1}} + l_{S_{C_2}} + 4 \cdot 64 \cdot \frac{1}{27} = 18,370 \dots$
S_{C_n}	$8^{n-1} (4 \cdot 8^{n-1})$	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$l_{S_{C_0}} + \dots + 4 \cdot 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = l_{S_{C_0}} + \dots + 4 \cdot 8^n \cdot 8^{-1} \cdot \frac{1}{3^n} = l_{S_{C_0}} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$

Intuitivament observem com la longitud total del conjunt va augmentant en cada pas, i per calcular la del fractal de la catifa de Sierpinski hauríem de portar aquesta successió geomètrica al límit (infinites iteracions):

$$l_{S_{C_n}} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

Com hem estudiat amb el floc de neu de Koch anteriorment, sabem que per calcular el resultat d'una suma de k termes consecutius, però que no comencin en zero, hem d'utilitzar la següent expressió:

$$\sum_{n=m}^k a \cdot r^n = \frac{a \cdot (r^{k+1} - r^m)}{r - 1}$$

En canvi, si $|r| > 1$, la suma dels infinits termes decreixents de la progressió geomètrica no convergeix cap a un valor finit, és a dir, $r^{\infty+1}$ tendeix cap a infinit, per tant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a \cdot (r^{\infty} - r^1)}{r - 1} = \infty$$

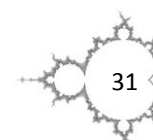
Si apliquem aquesta expressió a la sèrie, simplement demostrem que la longitud total de la catifa de Sierpinski és clarament infinita:

$$l_{S_{C_n}} = 4 + \infty = \infty = l_{S_C}$$

Per tant, igual que en el cas del triangle de Sierpinski, la seva catifa també és de longitud infinita, i podríem pensar que està formada per quadrats ínfims però que conserven els seus petits costats.

ÀREA

Si considerem les mateixes condicions anteriors, podem fer una taula amb la longitud del costat de cada quadrat per tal de calcular l'àrea de cada un com l'àrea total en cada pas.



	Nombre de quadrats restants	Longitud del costat de cada costat	Àrea de cada quadrat (<i>longitud del costat</i> ²)	Àrea total (<i>nombre de quadrats restants · àrea de cada quadrat</i>)
S_{C_0}	1	1	1	1
S_{C_1}	8	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,888 \dots$
S_{C_2}	64	$\frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^2$	$64 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 0,790 \dots$
S_{C_3}	512	$\frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^2$	$512 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 0,702 \dots$
S_{C_n}	8^n	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$	$8^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = 8^n \cdot \frac{1}{(3^2)^n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

Observem com l'àrea total del conjunt va disminuint en cada pas, i per calcular l'àrea final de la catifa de Sierpinski només hauríem de portar aquest procés fins al límit:

$$A_{S_{C_n}} = \left(\frac{8}{9}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = A_{S_C}$$

Per tant, tal com imaginàvem l'àrea final de la catifa de Sierpinski és zero, com la del seu triangle germà, i podríem pensar que està formada per quadrats quasi inapreciables que tenen una àrea tan ínfima que arriba a ser nul·la.

Així en el límit d'iteracions tendint a l'infinit la catifa està tan foradada que la seva superfície és nul·la. No seria sorprenent sinó haguéssim calculat el seu perímetre, que és infinit!

DIMENSIÓ FRACTAL

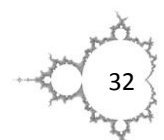
La catifa de Sierpinski podria descompondre's en 8^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 3^n . Això equival a pensar que en la primera iteració queden 8 quadrats idèntics a l'original ($n = 8$) que s'han d'amplificar per un factor de 3 ($m = 3$) per reproduir-lo sencer.

Per tant, la dimensió fractal de la catifa és:

$$D = \frac{\log 8^n}{\log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,8927 \dots$$

Com veiem, ens ha sortit una dimensió més gran que 1 (segment) però més petita que 2 (pla), ja que és un objecte geomètric de longitud infinita, tot i que es troba en una regió finita del pla, cosa que implica dimensió major que 1, a la vegada té àrea nul·la, cosa que indica dimensió menor que 2.

També podríem imaginar-nos aquest fractal com una catifa elaborada per un teixidor embogit que cerca un disseny, una simetria i bellesa perfectes però molt complexes. Per tant, per una banda, la catifa resultant estaria plena de forats i no contindria cap tros de teixit, per la qual cosa difícilment podria considerar-se una superfície. Però d'altra banda, els fils que la formarien estarien teixits en un patró tan complex que probablement ningú no diria que la catifa és una corba...



2.3.8. ESPONJA DE MENGER

HISTÒRIA



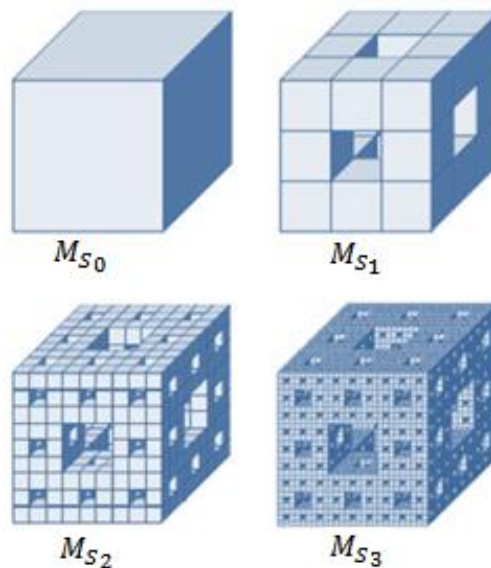
Karl Menger

L'esponja de Menger és un fractal molt famós i interessant descrit per Karl Menger el 1926 mentre explorava el concepte de dimensió topològica.

Es tracta d'una versió tridimensional de la catifa de Sierpinski i es podria considerar parent del tetraedre de Sierpinski, ja que aquest innocent cub comparteix una de les propietats fractals més desconcertants: la seva superfície és infinita però el seu volum nul!

També és conegut com cub de Menger per atribuir-li un nom més seriós i matemàtic, tot i que hi ha discrepàncies entre si batejar-lo en honor de Menger, qui el va idear i raonar, o del famós Sierpinski, qui va fer la catifa de Sierpinski de la qual parteix aquest fractal, tot i que llavors també hauríem de dubtar del nom de tots els altres fractals perquè tots ells són fruit del treball de molts matemàtics que passen despercebuts amb el pas del temps (la mateixa catifa de Sierpinski vindria a ser una extensió del conjunt de Cantor). D'altra banda, hi ha autors que l'anomenen esponja o cub de Menger-Sierpinski per evitar conflictes i homenatjar aquests dos grans matemàtics.

FRACTAL



L'òrbita descrita segueix la regla d'iteració: "Eliminar el cub central i els seus sis cubs congruents (laterals) de cada conjunt de vint-i-set cubs idèntics per tal que en romanguin vint." Aquesta regla ens recorda a la construcció de la catifa de Sierpinski, pel fet d'eliminar la figura central de cada conjunt d'idèntiques, i també a la del tetraedre de Sierpinski, ja que s'elimina el volum que ocupa aquesta figura central.

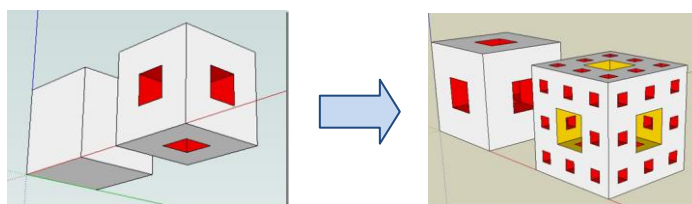
La *llavor* és un cub. A mida que anem iterant aquesta regla, s'elimina el cub central interior junt amb els cubs contigus o laterals, fruit de la divisió dels cubs anteriors en conjunts de 27 cubs idèntics, i després s'aplica de manera recursiva a cada un dels 20 cubs restants. Per tant, el seu volum es redueix 1/9 respecte a la iteració anterior, i les arestes dels cubs que el formen són 1/3 la longitud dels anteriors.

Si continuem aquest procés indefinidament, eliminant els cubs centrals de cada nou objecte, el seu volum va disminuint i la longitud de les arestes és cada vegada menor, per tant, el *destí de l'òrbita* és una figura sorprenent de volum pràcticament nul formada per cubs ínfims amb arestes quasi inapreciables, la qual es coneix com "Esponja de Menger".

ÀREA

Intuïtivament és difícil apreciar la propietat principal d'aquest fractal, una superfície infinita, perquè el seu anàleg bidimensional, la catifa de Sierpinski, mostra una àrea nul·la, i a més el seu cosí tridimensional, el tetraedre de Sierpinski, té àrea finita i constant com vam comprovar.

Per tant, en aquest cas és necessària una taula amb la variació de l'àrea total del conjunt en cada iteració a partir de les seves àrees externa i interna. En quant a l'exterior, només hem de pensar que es troben sis catifes de Sierpinski disposades sobre cada cara del cub, per tant, serà sis vegades l'àrea de la catifa en cada iteració. D'altra banda, per calcular l'àrea interior, hauríem d'imaginar-nos geomètricament en 3 dimensions els forats que es van produint en cada pas. A partir d'això, podem raonar que per cada cub central eliminat, es suprimeixen sis cubs congruents al central, cosa que provoca que es facin visibles 4 cares de la mateixa àrea que les dels cubs congruents perquè abans eren amagades per aquests, com podem projectar en la figura de la seva construcció.



	Àrea exterior (6 · àrea total de cada cara del cub)	Àrea interior (àrea interior de l'iteració anterior + nombre de cubs centrals eliminats · 6 cubs congruents eliminats · 4 cares destapades per cub congruent · àrea de cada cara del cub congruent)	Àrea total (àrea exterior + àrea interior)
M_{S_0}	$6 \cdot 1$	0	6
M_{S_1}	$6 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$6 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 8$
M_{S_2}	$6 \cdot 64 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$	$A_{interior_{M_{S_1}}} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$	$6 \cdot 64 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + A_{interior_{M_{S_1}}} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 13,333 \dots$
M_{S_3}	$6 \cdot 512 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2$	$A_{interior_{M_{S_1}}} + A_{interior_{M_{S_2}}} + 400 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2$	$6 \cdot 512 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 + A_{interior_{M_{S_1}}} + A_{interior_{M_{S_2}}} + 400 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 25,975 \dots$
M_{S_n}	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$A_{interior_{M_{S_1}}} + \dots + 20^{n-1} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 =$ $A_{interior_{M_{S_1}}} + \dots + 20^n \cdot 20^{-1} \cdot \frac{6 \cdot 4}{(3^2)^n} =$ $A_{interior_{M_{S_1}}} + \dots + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^n \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n$	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^n \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n$

Llavors l'àrea total de l'esponja de Menger, quan el número d'iteracions tendeix a infinit, ve donada per la següent sèrie:

$$A_{M_S} = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n$$

Com hem comprovat en l'apartat de la catifa de Sierpinski, si $|r| > 1$, la suma dels infinits termes decreixents de la progressió geomètrica convergeix cap a un valor infinit, per tant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \infty$$

En canvi, quan es porta al límit l'altre sumand, aquest tendeix a zero:

$$A_{M_{S_n}} = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = A_{M_S}$$

Si apliquem aquestes expressions a la sèrie, sabem l'àrea total de l'esponja de Menger:

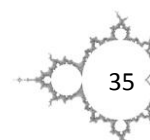
$$A_{M_S} = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = A_{M_S}$$

Per tant, com havíem esmentat, la seva àrea total és infinita, ja que tot i que la seva àrea exterior és nul·la perquè correspon a diverses catifes de Sierpinski disposades sobre les sis cares del cub, l'àrea interior provoca aquesta propietat d'infinitud perquè podríem pensar en la superfície de les cares internes dels múltiples ínfims cubs que són quasi inapreciables però omplen el pla.

VOLUM

Per acabar d'estudiar el conjunt, comprovarem que l'altra característica intuïtiva de què el seu volum final és nul, sí és certa. Simplement hauríem de pensar en el cas afí del tetraedre de Sierpinski, però eliminant successius cubs en lloc d'octaedres centrals. Per tant, només cal recordar que a l'eliminar el cub central i els sis congruents de cada conjunt de 27 cubs idèntics, en romanen 20, per tal de calcular el volum total com descrivim en la taula següent:

	Nombre de cubs restants	Longitud de l'aresta de cada cub	Volum de cada cub (longitud de l'aresta³)	Volum total (nombre de quadrats restants · àrea de cada quadrat)
M_{S_0}	1	1	1	1
M_{S_1}	20	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
M_{S_2}	400	$\frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^3$	$400 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$
M_{S_3}	8000	$\frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^3$	$8000 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^3$
M_{S_n}	20^n	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)^3$	$20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 = 20^n \cdot \frac{1}{(3^3)^n} = \left(\frac{20}{27}\right)^n$



Observem com el volum total del conjunt va disminuint en cada pas, i per avaluar el del fractal hauríem de portar aquesta operació al límit, és a dir, aplicar-la infinites vegades:

$$V_{M_{S_n}} = \left(\frac{20}{27}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = V_{M_S}$$

Tal com hem deduït, el volum final de l'esponja de Menger és zero, ja que a mida que anem iterant, cada cub es subdivideix en uns altres vint que deixen multitud d'espais buits en l'original. Per tant, el seu volum disminueix en cada pas i en el seu límit és nul.

Com a conclusió de l'anàlisi de les qualitats sorprenents d'aquest fractal, podem pensar que a l'aplicar indefinidament el mecanisme proposat per Menger obtenim el cub inicial perforat una i altra vegada per una "xarxa de tubs prismàtics de secció quadrada" cada vegada més petits. El que era un cub s'ha convertit en una col·lecció de segments orientats en les tres dimensions possibles, un esquelet que tot i estar compost per infinites peces, aquestes posseeixen un "gruix" que tendeix a zero amb cada iteració, el que fa de l'esponja de Menger un objecte amb un volum nul i una superfície infinita. Per tant, podem dir que aquesta esponja és fantàstica per a casa: la seva superfície és infinita i el seu volum nul, qualitats que ens proporcionen avantatges alhora d'usar-la pel seu infinit abast i també al guardar-la per l'espai nul que ocupa!

DIMENSIÓ FRACTAL



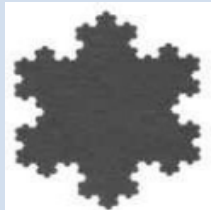

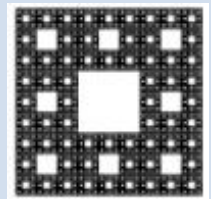
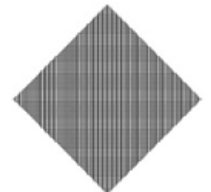

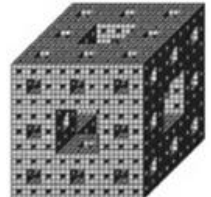
L'esponja de Menger podria descompondre's en 20^n peces idèntiques que es transformessin en el conjunt original al aplicar-los un factor d'augment de 3^n . Això equival a pensar que en la primera iteració romanen 20 cubs idèntics a l'original ($n = 20$) que s'han d'amplificar per un factor de 3 ($m = 3$) per reproduir-lo sencer. Per tant, la seva dimensió fractal és:

$$D = \frac{\log 20^n}{\log 3^n} = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268 \dots$$





Per tant, si unim tots els conceptes exposats sobre l'esponja de Menger, ens adonarem que no és un fractal bidimensional ni tridimensional, és a dir, és més que una superfície però menys que un cos sòlid.

2.3.10. TAULA COMPARATIVA

Finalment presentem una taula expositiva amb els fractals geomètrics estudiats i les seves propietats (longitud, àrea i volum final), ordenats de menor a major valor de la seva dimensió fractal, cosa que ens permet comparar-los amb un simple cop d'ull en aquest esquema visual.

Fractal	Representació	Longitud	Àrea	Volum	Dimensió fractal
Conjunt de Cantor		0	-	-	0,6309 ...
Corba de Koch		∞	-	-	1,2618 ...
Floc de neu de Koch		∞	0,6928 ...	-	1,2618 ...
Triangle de Sierpinski		∞	0	-	1,5849 ...
Catifa de Sierpinski		∞	0	-	1,8927 ...
Corba de Peano		∞	-	-	2
Tetraedre de Sierpinski		-	$\sqrt{3}$	0	2
Espanja de Menger		-	∞	0	2,7268 ...

També com a curiositat i per veure com podem comparar la complexitat d'objectes, adjunto una altra taula amb elements naturals ordenats per la seva dimensió fractal aproximada:

Fractal natural	Il·lustració	Dimensió fractal
Línia costa de Gran Bretanya		1,24
Bròquil		2,66
Superfície cervell humà		2,79
Superfície del pulmó		2,97

3. FRACTALS AL PLA COMPLEX. MANDELBROT, JULIA I NEWTON

En el capítol anterior hem parlat sobre els fractals geomètrics per tal de familiaritzar-nos amb les propietats fractals com l'autosimilitud o la dimensió, per tant, estem en condicions de submergir-nos en el món dels fractals en tota la seva riquesa i bellesa, especialment en l'objecte matemàtic més popular de les matemàtiques contemporànies: el conjunt de Mandelbrot.

Els fractals geomètrics van ser els primers en desenvolupar-se perquè només requerien determinar una iteració real de tipus geomètric i aplicar-la infinites vegades. Però algú va pensar en treballar el tema en el pla complex? La invenció dels ordinadors va canviar el concepte de fractals? En aquesta secció intentarem respondre aquestes preguntes per adonar-nos com ha progressat la geometria fractal en tot tipus de ciències i arts per l'augment de la seva complexitat (en el pla complex) i la seva bellesa, tot i començar amb regles de generació senzilles.

Aquesta nova concepció va néixer el 1917, Pierre Fatou i Gaston Julia van anunciar de manera quasi simultània resultats increïbles sobre iteració de funcions racionals complexes, motivats pel premi *Grand Prix des Sciences Mathématiques* organitzat per l'*Academia Francesa de Ciències* impulsada per les idees d'iteració d'Henri Poincaré.

Aquest dos treballs sobre iteració de funcions van romandre quasi oblidats durant més de 50 anys, fins que van ser repesos per Benoît Mandelbrot. Aquests són els fonaments per la posterior creació de la geometria fractal i el seu conjunt més famós, i a més gràcies a la potència de càlcul i representació dels ordinadors, van ser la font d'un tipus de fractals -els conjunts de Julia- reconeguts per la seva extraordinària bellesa.

Per tant en aquest capítol parlarem sobre els fractals en el pla complex, en concret dels famosos conjunts de Julia, de Mandelbrot i de Newton per la seva popularitat, bellesa i gran aportació científica. Per poder entendre millor la seva generació, presentarem primer de tot conceptes sobre els nombres complexos i la iteració de funcions complexes que no es treballen en el batxillerat.

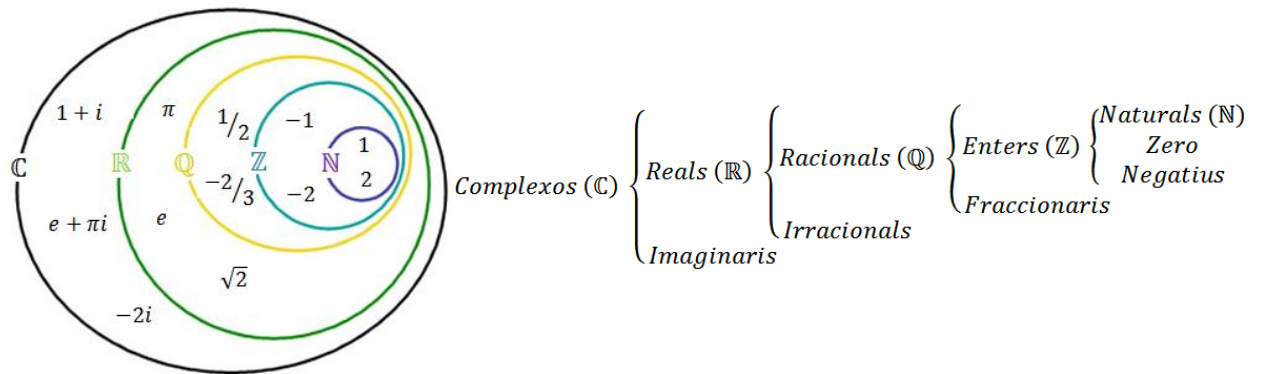
En cadascun d'aquests fractals, començarem amb una mica d'història per situar-nos en el moment de la "invenció". Tot seguit continuarem amb els conceptes matemàtics que aprofiten el pla complex per idear objectes amb fronteres impossibles de traçar, i que per descomptat presenten totes les propietats fractals, així com una sorprenent autosimilitud. També en aquest apartat volem deixar clares dues característiques del concepte fractal:

- Regles de formació molt senzilles poden generar estructures sorprenentment complexes, com veurem amb la iteració de funcions quadràtiques.
- El desenvolupament computacional ha propiciat el naixement i perfeccionament de la geometria fractal, tant per la seva precisió (càlculs aplicat un nombre immens de vegades, apropant-se a l'infinit) com per la seva bellesa (algoritmes d'escapament i coloració que suggereixen una harmonia fractal, amb interès matemàtic i artístic).

3.1. COMPLEXOS

NOMBRES COMPLEXOS

Per començar, presentem la classificació de tots els nombres per fixar-nos com els complexos engloben tots els altres.

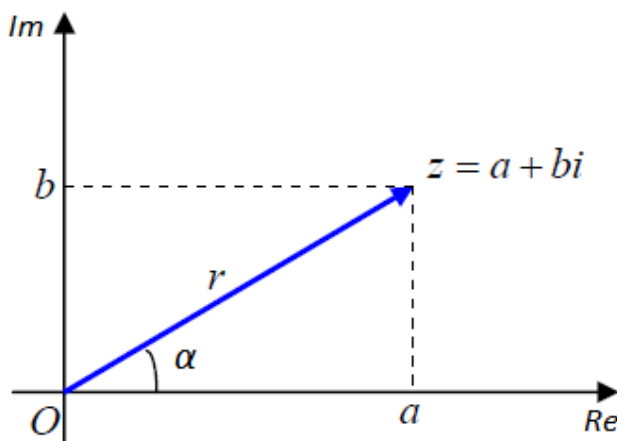


Els números reals constitueixen una manera d'etiquetar cadascun dels punts situats sobre la recta real de forma única i ordenada, ja que a cada número li correspon un punt, i cada punt té la seva etiqueta.

En canvi, els nombres complexos són nombres de la forma $a + bi$, on a i b són nombres reals (anomenats part real i part imaginària, respectivament) i $i = \sqrt{-1}$ (unitat imaginària), com a extensió del nombres reals que permeten representar totes les arrels dels polinomis.

De manera semblant als reals, els números complexos ens permeten etiquetar punts però no sobre una línia, sinó sobre un pla anomenat pla complex, on l'eix d'abscisses representa la component real (eix real), i l'eix d'ordenades, la component imaginària (eix imaginari).

Hi ha tres maneres habituals de representar un nombre complex: l'aritmètica o binomial, la vectorial o polar, i la cartesiana. Aquestes diferents formes de representació són fruit de la seva correspondència amb els vectors, ja que els nombres complexos, a més de per la seva part real i imaginària, queden determinats pel seu mòdul i argument, com es mostra a continuació:



Forma binòmica:

$$z = a + bi \begin{cases} a = \text{Re}(z) \equiv \text{part real} \\ b = \text{Im}(z) \equiv \text{part imaginària} \end{cases}$$

Forma polar:

$$z = r_\alpha \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \equiv \text{mòdul} \\ \tan \alpha = \frac{b}{a} \equiv \text{argument} \end{cases}$$

Forma cartesiana:

$$z = (a, b)$$

ITERACIÓ COMPLEXA

Una funció complexa és una funció que assigna a cada nombre complex $z \in \mathbb{C}$ un nombre complex w . Formalment s'escriu $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, o equivalentment $w = f(z)$. El nombre complex w s'anomena valor de f en el punt z , és a dir, w és la imatge de z per la funció f (comparable amb funcions reals, $y = f(x)$, però treballant amb números complexos en lloc de reals).

D'altra banda, hem de recordar que en un procés iteratiu, el resultat d'un càlcul és utilitzat una altra vegada com a entrada. Per tant, la idea es basa en agafar un nombre sobre el que es faci una operació, repetir-la sobre el resultat i continuar-ho fent indefinidament amb els valors obtinguts. Formalment la iteració es representa de manera general com:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n \geq 0$$

Equivalentment, podem pensar que apliquem la funció n vegades a un nombre complex inicial z_0 :

$$z_n = f^n(z_0) \quad , \quad n \geq 0$$

Com en el cas de la iteració real, la successió definida pels iterats (de f en z_0) es coneix com la trajectòria o l'òrbita del punt z_0 , el qual rep el nom de *llavor* o *condició inicial*. I el *destí de l'òrbita*, és a dir, el resultat després d'infinits iterats es podria calcular, si existeix, com:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0)$$

Per comprendre-ho millor, considerem primer que la iteració "simple" (real) és:

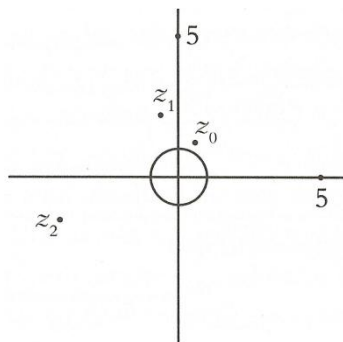
$$x_{n+1} = x_n^2$$

Sabem que si la *llavor* és un nombre real: 0 és un punt fix repulsor i totes les altres *condicions inicials* (diferents del punt fix 0) tendeixen cap a infinit (positiu o negatiu), com per exemple l'òrbita de $x_0 = 2$:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 256 \rightarrow \dots \rightarrow \infty$$

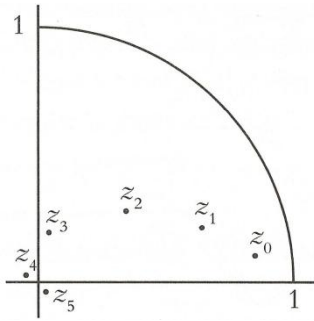
Si triem un nombre complex com a *llavor*, podem iterar de la mateixa manera, aplicat a la mateixa fórmula quadràtica:

$$f(z) = z^2$$



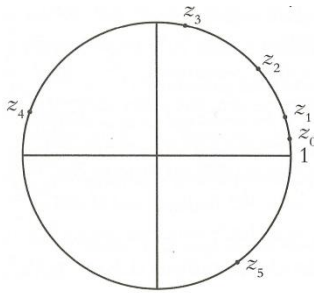
Com per exemple l'òrbita de $z_0 = 1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$:

$$1 + i \rightarrow 2i \rightarrow -4 \rightarrow 16 \rightarrow \dots \rightarrow \infty$$



L'òrbita de $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} 45^\circ$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \rightarrow \frac{1}{2}i \rightarrow -\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{16} \rightarrow \dots \rightarrow 0$$



L'òrbita de $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = 1_{45^\circ}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

o l'òrbita de $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1_{30^\circ}$ (també ho farem en polars per facilitar els càlculs i veure millor el que ens interessa, el mòdul):

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1_{30^\circ} &\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{60^\circ} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ} \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ} \rightarrow \dots \rightarrow 1_{k \cdot \alpha} \end{aligned}$$

De tots aquests càlculs exemplars podem raonar i generalitzar el procés:

Si $f(z) = z^2$, la successió d'iterats en un punt qualsevol $z_0 \in \mathbb{C}$ ve determinada per:

$$z_0 \rightarrow f(z_0) = z_0^2 \rightarrow f^2(z_0) = z_0^4 \rightarrow f^3(z_0) = z_0^8 \rightarrow \dots \rightarrow z_n = f^n(z_0) = z_0^{2^n}$$

de tal forma que el seu valor en el límit, si existeix, és:

$$z_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{2^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z_0| < 1 \\ \infty & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

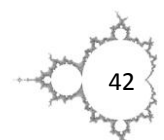
Mentre que si $|z_0| = 1$, tota l'òrbita pertany a la circumferència unitat, és a dir, $\{z_n\} \in \mathbb{S}^1$.

D'altra banda podem parlar de *punts periòdics* o *preperiòdics* quan la seva òrbita tendeix cap a un punt o *trajectòria* que es repeteix indefinidament després de cert nombre d'iteracions (nombre de períodes), per tant, "atterra" en un punt fix o en una òrbita periòdica com hem vist en els exemples anteriors.

En aquest cas, si $|z_0| < 1$ l'origen $(0, 0)$ és un *punt fix atractor*, ja que tots els punts de l'interior de \mathbb{S}^1 tendeixen cap a ell. També el $(1, 0)$ es podria considerar un altre atractor, ja que alguns punts situats sobre \mathbb{S}^1 (com $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$) van a parar a ell.

Però si $|z_0| > 1$, qualsevol d'aquests punts és un *punt repulsor*, ja que l'òrbita de tota llavor al seu entorn s'allunya o s'escapa cap a l'infinit. Com a conseqüència, podem dir que la conca d'atracció de l'infinit engloba tots aquests punts fora del cercle unitat.

En canvi, si $|z_0| = 1$ podem considerar l'origen com un punt fix neutral o indiferent perquè totes les òrbites romanen a la circumferència unitat amb centre a $(0, 0)$, és a dir, les òrbites no són ni repel·lides ni atretes per aquest punt fix.



3.2. CONJUNTS DE JULIA

HISTÒRIA



Gaston Maurice Julia
(1893-1978)

Gaston Maurice Julia, gran precursor dels fractals, va ser un matemàtic d'Algèria (llavors sota domini francès) que va estudiar la dinàmica complexa, amb la competència constructiva de Pierre Fatou. També va explicar com a partir de qualsevol funció complexa es pot fabricar, per mitjà d'una successió definida, un conjunt amb frontera impossible de dibuixar a pols per ser de longitud infinita, entre d'altres propietats. Per tant, és el pare d'una llarga família de fractals coneguts com conjunts de Julia, que estan intrínsecament relacionats amb el conjunt de Mandelbrot.

FRACTAL

Els conjunts de Julia són uns fractals al pla complex que es basen en qualsevol polinomi de variable complexa. Per simplificar l'estudi ens centrarem en funcions polinòmiques quadràtiques de la forma:

$$f(z) = z^2 + c$$

Equivalentment, podem treballar amb el mètode iteratiu:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

On:

z_n = variable complexa fruit de la iteració anterior

c = constant complexa i característica de cada conjunt de Julia

Per tant, per a cada valor del nombre complex c hi ha un sistema dinàmic relacionat i l'òrbita de la llavor z_0 és:

$$\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

On:

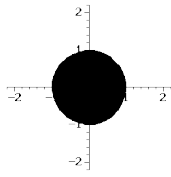
$$z_1 = f(z_0) = z_0^2 + c$$

$$z_2 = f(z_1) = z_1^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c$$

$$z_3 = f(z_2) = z_2^2 + c = [(z_0^2 + c)^2 + c]^2 + c$$

...

En aquest cas, si $c \neq 0$, no es pot obtenir una expressió general per a qualsevol terme de l'òrbita en funció del primer i , per tant, és molt més difícil conèixer l'òrbita dels punts del pla complex. S'acostuma a parlar de *pla dinàmic* o de *fase* de $f(z)$ perquè els iterats d'un punt formen la seva *òrbita*.



La situació és semblant al cas $c = 0$ estudiat en l'apartat anterior, on hi ha punts que divergeixen cap a l'infinit i punts l'òrbita dels quals roman atrapada en un conjunt acotat, éssent la frontera entre uns i altres la circumferència unitat associada al sistema dinàmic corresponent que s'anomena conjunt de Julia per a $c = 0$.

Per tant, podem definir el conjunt de Julia J_c d'un polinomi de variable complexa com la frontera del conjunt de punts que escapen a l'infinit (s'acostumen a representar de color blanc o altres) i els que no ho fan al iterar-los infinites vegades (representats en negre). Els punts que no tendeixen cap a l'infinit conformen una regió delimitada pel propi conjunt de Julia, que es sol denominar el conjunt de Julia farcit K_c .

ALGORITME D'ESCAPAMENT

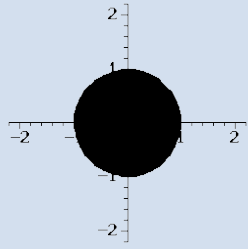
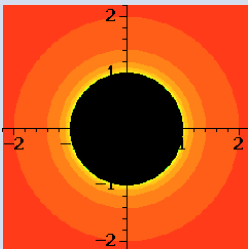
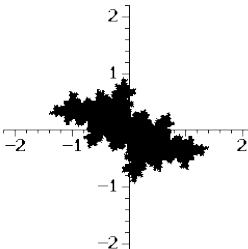
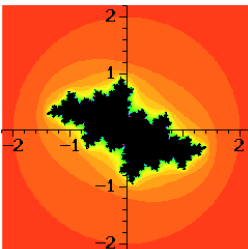
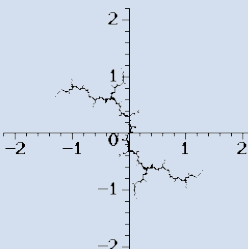
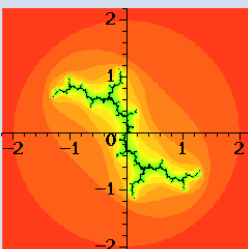
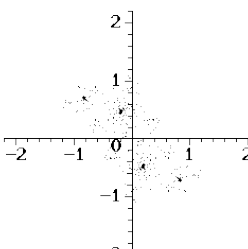
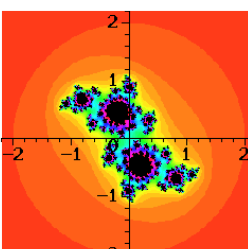
Gràcies a la potència dels ordinadors, les representacions dels diferents conjunts de Julia acostumen a ser imatges sorprenents formades per un degradat de colors que envolten el conjunt de Julia farcit de color negre.

Aquests efectes coloristes s'aconsegueixen amb l'aplicació d'un algoritme matemàtic, normalment el software fractal aplica l'anomenat "algoritme d'escapament". Aquest algoritme, conjunt d'instruccions per a resoldre un problema en un nombre finit de passos, calcula una sèrie de valors per cada punt mitjançant la repetició d'una fórmula fins que es compleix una condició predefinida, moment en el qual s'assigna al punt un color depenent del nombre d'iteracions realitzades. També podem dividir els algorismes de colors entre els que produeixen valors discrets que mostren salts o bandes en la transició de colors; i els que ho fan amb valors continus que permeten interpolar qualsevol color del gradient amb la precisió desitjada, amb especial predilecció artística pel desenvolupament de les targetes gràfiques.

La condició principal dels conjunts J_c consisteix en si l'òrbita escapa o no cap a l'infinit. Si tendeix cap a l'infinit, el punt s'acolorix depenent del nombre d'iteracions necessàries per divergir, és a dir, segons la seva velocitat de divergència o escapament. Alguns punts escapen molt ràpid cap a l'infinit i altres molt lentament, per això els seus respectius colors indiquen la velocitat d'escapament, que normalment s'associa amb l'augment d'intensitat. També cal dir que per saber si s'escapa o no s'utilitzen mètodes més eficients, com explicarem en el següent apartat.

Per exemple, els valors z_0 que escapen a l'infinit després de 2 iteracions es pinten de color vermell, si en necessiten 5 de color taronja, si escapen en 10 iteracions de color groc, si ho fan en 50 de color verd, i si tarden més de 100 en divergir de color lila. De fet 100 o 150 iteracions es consideren suficients per diferenciar els conjunts de Julia, tot i que com major sigui el llindar d'iteració, la representació serà més detallada i fidel, malgrat l'augment del temps de computació.

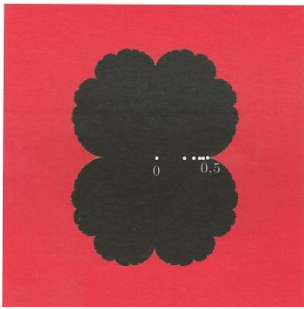
En la taula següent presentem uns conjunts de Julia farcits, on només els punts que no escapen a l'infinit s'han representat en negre sobre el pla complex per tal de veure com varien segons el valor del paràmetre c i visualitzar la influència dels algorismes d'escapament amb l'ús de diferents colors segons la velocitat d'escapament (de més càlid -taronja, groc- a més fred -verd, blau, lila- passant per tota la paleta amb un mètode semblant al de l'exemple):

Conjunt de Julia (K_c)	Coloració del pla	Paràmetre c	Tipus
		$c = 0$	Connex (Circumferència unitat)
		$c = -0.5 + 0.5i$	Connex
		$c = i$	Connex (Dendrita)
		$c = 0.66 + i$	Disconnex (Pols de Cantor)

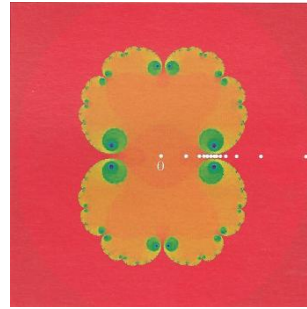
En la taula anterior, hem observat i destacat que els conjunts de Julia depenen molt del valor c i es poden classificar generalment en dos grans grups:

- **Connexos:** el conjunt està format per una sola peça.
- **Disconnexos:** el conjunt està fragmentat o format per un núvol de punts dispersos com en el conjunt de Cantor, motiu pel qual també es coneixen com "Pols de Cantor".

També per tal de deixar clar la forta relació dels conjunts de Julia amb la constant, presentem dos casos on c varia molt poc, en canvi el fractal passa de ser connex a disconnex, resultat d'una bifurcació (anomenada "cadira-node") que produeix una "explosió" en el conjunt de Julia.



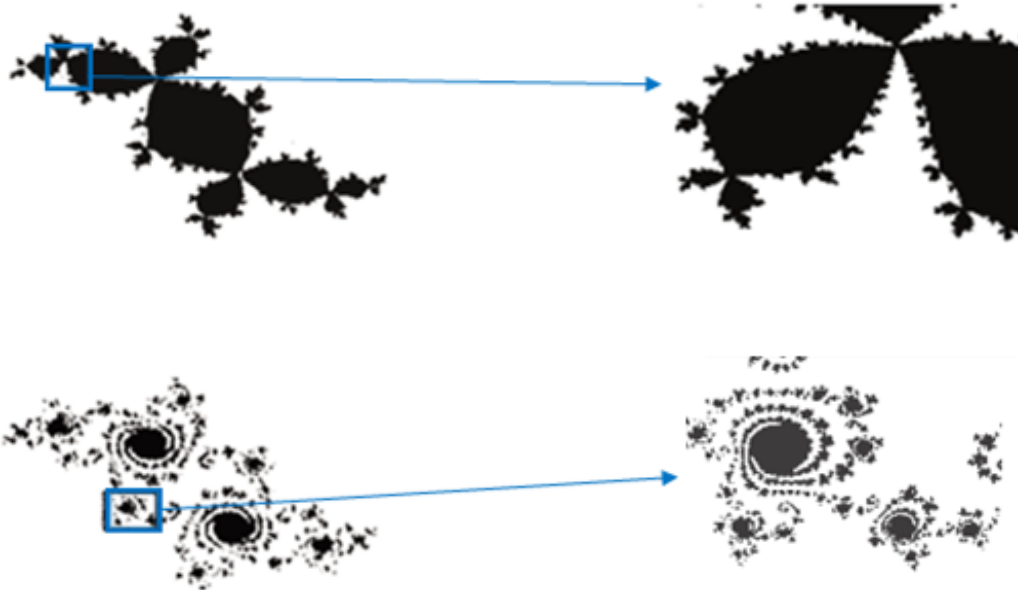
Conjunt de Julia connex associat a $c = 0,25$



Conjunt de Julia disconnex associat a $c = 0,26$

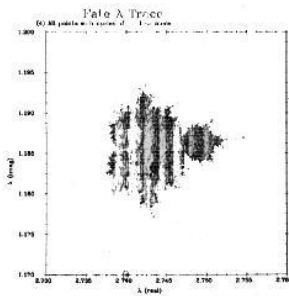
AUTISIMILITUD/QUASIAUTOSIMILITUD

Els conjunts de Julia també compleixen la principal propietat fractal en dues vessants: els connexos presenten quasiautosimilitud, en canvi els disconnexos són autosemblants:



3.3. CONJUNT DE MANDELBROT

HISTÒRIA



Primera representació del conjunt de Mandelbrot en ordinador

El conjunt de Mandelbrot, en la mateixa línia que el seu propi descobridor, és el pare dels fractals "complexos" i el símbol per excel·lència d'una nova geometria i manera de veure el món. De fet publicacions molt prestigioses afirmen que és l'objecte matemàtic més complex creat per l'ésser humà fins avui dia, i també podríem dir que és el més bell: entrar al seu interior és com explorar la infinitat d'un nou univers meravellós.

FRACTAL

El conjunt de Mandelbrot M és el conjunt de nombres complexos c per als quals l'òrbita de $z_0 = 0$ segons la fórmula de recurrència $z_{n+1} = z_n^2 + c$ està acotada, és a dir, no tendeix cap a infinit.

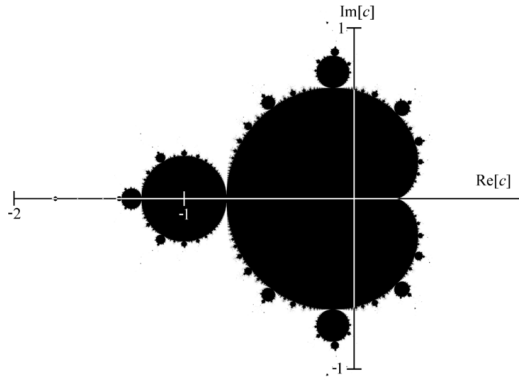
Equivalentment, el conjunt de Mandelbrot és el conjunt de nombres complexos c per als quals el conjunt de Julia J_c associat a $f(z) = z^2 + c$ és connex.

Per tant, la classificació dels conjunts de Julia en connexos i disconnexos exposada en l'apartat anterior no es gratuïta, ja que el seu estudi ha donat lloc a un dels objectes matemàtics més fascinants que existeixen: el conjunt M .

Portar a terme aquesta classificació pot semblar, en primera instància, un treball interminable, ja que semblaria que s'haurien d'analitzar tots els punts de tots els conjunts de Julia per a cada variació del paràmetre c , i n'hi ha infinits! No obstant, Mandelbrot va aprofitar un teorema demostrat independentment per Julia i Fatou al voltant del 1919, segons el qual l'òrbita del zero juga un paper essencial per saber si un conjunt de Julia és connex o no. En concret, el teorema afirma que si la seva òrbita escapa a l'infinit, el conjunt de Julia és disconnex, i en cas contrari és connex. Aquesta troballa és molt important, ja que per conèixer la naturalesa del conjunt de Julia a tot el pla complex només haurem de calcular el *destí de l'òrbita* de $z_0 = 0$.

El descobriment anterior proporciona un mètode precís i còmode per determinar la connexió o disconnexió d'un conjunt de Julia, però: com podem saber que l'òrbita de $z_0 = 0$ tendeix cap a l'infinit o no? Afortunadament, existeix una resposta òptima però difícil de demostrar. En el cas general, les òrbites divergeixen si en algun moment $|z_n| > \max(2, |c|)$, és a dir, tota òrbita que sobresurti del cercle del radi màxim entre 2 i el mòdul de c , escaparà cap a l'infinit amb tota seguretat.

Mandelbrot va fer servir aquesta útil propietat de la iteració quadràtica i es va dedicar a localitzar els valors de la constant c que donen lloc a conjunts de Julia connexos. El resultat va mostrar que aquesta col·lecció de valors del paràmetre c tenia també una estructura sorprenent quan es representava sobre el pla complex. Per això s'acostuma a dir que el conjunt M viu al *pla de paràmetres* o *de bifurcacions*, és a dir, al *pla de les c* perquè realment és un catàleg dels sistemes dinàmics associats als conjunts de Julia connexos pels diferents valors del paràmetre c .



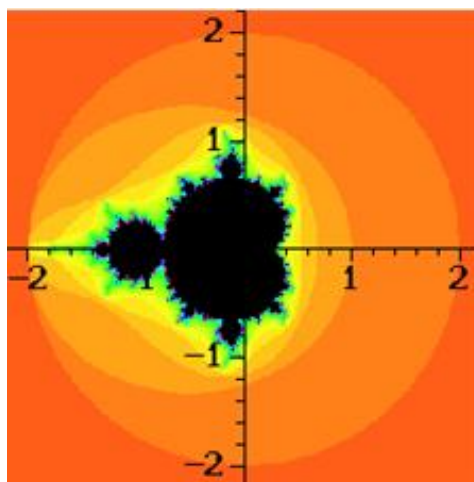
ALGORITME D'ESCAPAMENT

Estem acostumats a visualitzar imatges espectaculars del conjunt M amb centenars o milers de colors que van rotant i aconseguen un efecte visual impressionant: sembla que el fractal tingui vida pròpia i ens guia en l'exploració d'un nou univers infinit.

Aquests efectes coloristes s'aconsegueixen amb l'aplicació d'un *algoritme d'escapament* com en el cas dels conjunts de Julia.

La condició en el cas del conjunt M és semblant: si l'òrbita de $z_0 = 0$ dels conjunts de Julia associats als diferents valors de c escapa o no cap a l'infinit. Per tal d'esbrinar-ho amb rapidesa considerem que si algun punt de la successió té un mòdul superior a dos o al mòdul del paràmetre c : l'òrbita divergeix tal com hem explicat abans, i se li aplica un color o tonalitat amb diferent intensitat segons la velocitat d'escapament, és a dir, en funció del nombre d'iteracions necessàries per haver determinat la disconnexitat del conjunt de Julia corresponent. En cas contrari, si l'òrbita roman acotada després de les iteracions predefinides, es pinta el punt de negre i s'interromp la seva computació. També cal recordar que com major sigui el nombre d'iteracions escollit, la imatge fractal serà de més resolució i precisió, però implicarà més recursos computacionals i més temps de càlcul.

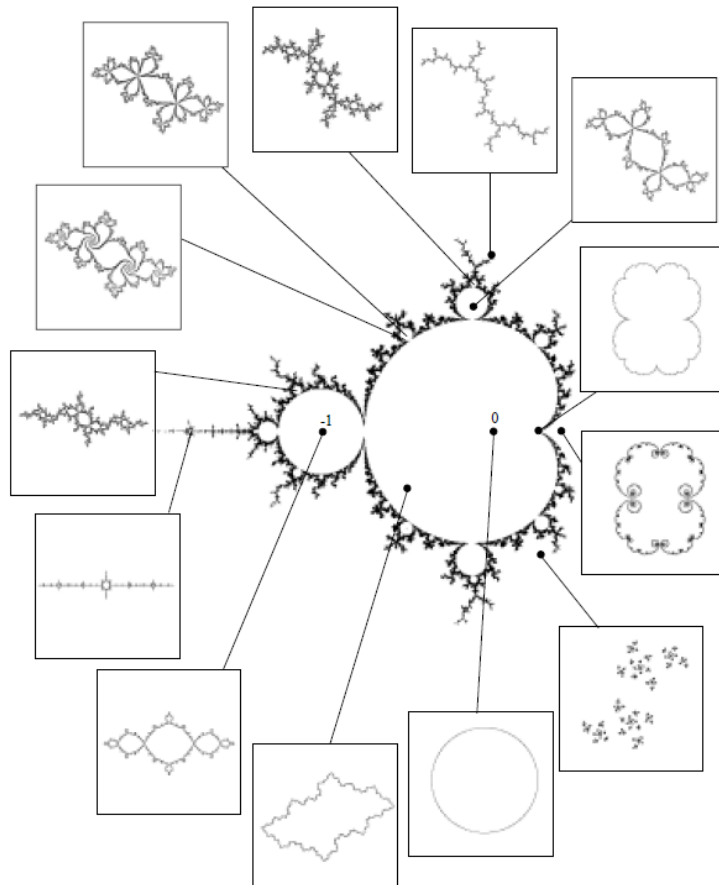
En la següent figura del conjunt de Mandelbrot, s'utilitza el mateix criteri que en l'algoritme d'escapament per als conjunt de Julia representats en l'apartat anterior:



CONJUNTS DE JULIA EN EL CONJUNT M

Com hem destacat en els capítols anteriors, el conjunt de Mandelbrot es defineix com el conjunt de paràmetres c per als quals el conjunt de Julia J_c associat a $f(z) = z^2 + c$ és connex.

En la següent figura, es pot veure la forta relació entre alguns conjunts de Julia, corresponents a diferents valors de c i el lloc que ocupa en el pla de paràmetres associat al conjunt M :



Empíricament, s'ha demostrat que el conjunt M és com un "mapa" que conté tota la informació sobre la dinàmica de tots els polinomis quadràtics així com la geometria dels conjunts de Julia en versió reduïda i deformada, per tant, és molt més que una simple eina per classificar formes connexes i disconnexes.

Amb l'ajuda de la imatge anterior, podem confirmar que tots els valors de c en el cardioide principal donen lloc a un conjunt de Julia com un cercle arrugat, és a dir, corbes tancades simples que corresponen a la component hiperbòlica de període 1 (un únic punt fix atractor).

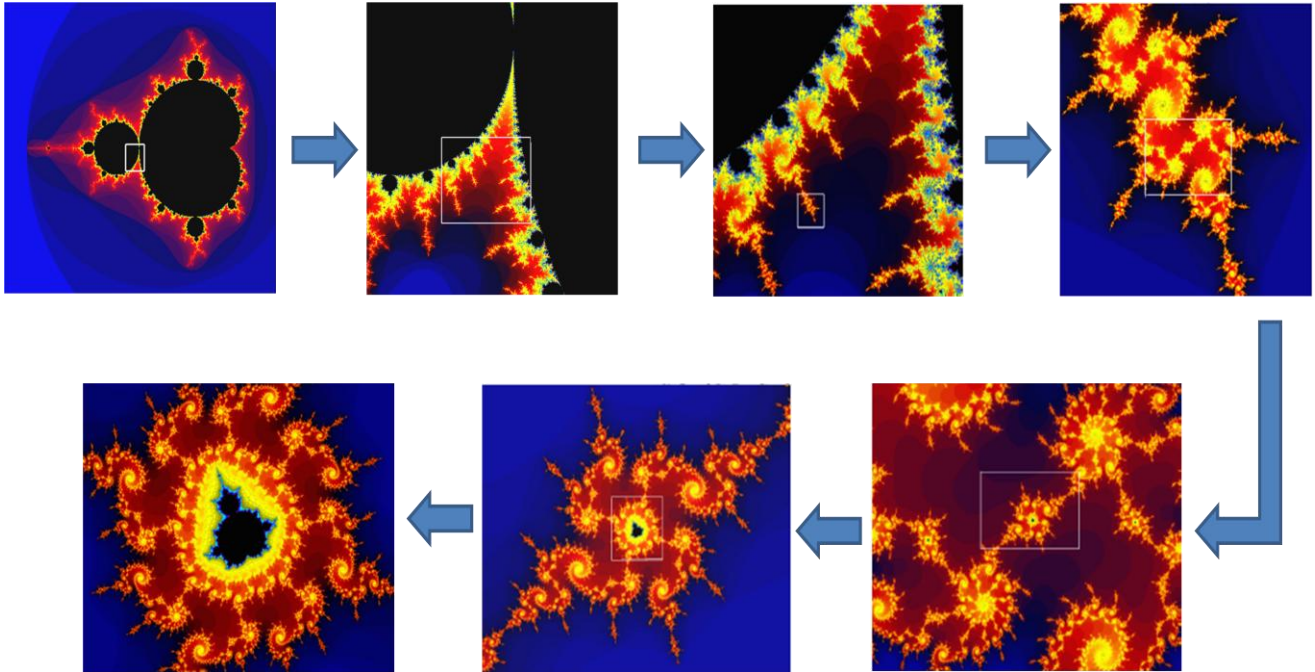
Si el valor de c es troba en algun dels discs tangents, els conjunts

de Julia corresponents apareixeran lobulats. El nombre de lòbuls del conjunt de Julia és manté constant i augmenta en funció de la grandària del disc del conjunt M on es localitza. Cada un d'aquests "discs" deformats del conjunt de Mandelbrot, units els uns amb els altres, són les components hiperbòliques de M i coincideixen amb els valors de c per als quals el polinomi quadràtic associat (el conjunt de Julia) té una òrbita periòdica. En cadascuna d'aquestes components, el període del cicle atractiu corresponent és el mateix i defineix la forma del conjunt J_c ; en general la component hiperbòlica té període n (n -cicles atractius), per tant, el conjunt de Julia associat a aquests paràmetres de c seràn corbes tancades (lòbuls) que es tallaran n a n vegades. De fet també es pot conèixer el període dels conjunts de Julia de cadascun dels discs adossats a la cardioide principal perquè coincideix amb el nombre de ramificacions (comptant el peu) de l'antena principal arrambada a ell.

Si ens desplaçem cap als filaments, els J_c s'aprimaran fins a quedar dendrítics. I no cal dir que si es supera la frontera del conjunt de Mandelbrot, es desfaran en infinitat de peces.

QUASIAUTOSIMILITUD

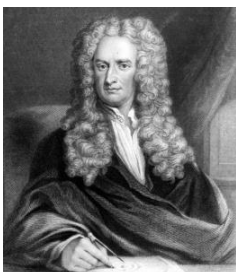
En general, podem descriure el conjunt de Mandelbrot com un cardioide (figura en forma de cor) amb una infinitat de discs tangents dels quals destaca el de la seva esquerra per la seva grandària. En la següent seqüència d'imatges, corresponent a un zoom progressiu de l'espectacular univers de Mandelbrot, podem observar aquesta propietat fractal:



En cada ampliació les estructures que es repeteixen són cada vegada més filamentosos, cosa que ens permet saber en quina escala estem com hem explicat abans. Per aquest motiu, es considera que el conjunt de Mandelbrot és quasiautosimilar.

3.4. FRACTAL DEL MÈTODE DE NEWTON

HISTÒRIA



Isaac Newton, gran físic, filòsof, teòleg, inventor, alquimista i matemàtic anglès, va aportar valuosos coneixements a la ciència, sobretot en l'àmbit de la Física com la descripció de la llei de gravitació universal i les bases de la mecànica clàssica, però també va tenir temps per proporcionar als matemàtics un mètode per determinar les arrels aproximades d'equacions no lineals: el "Mètode de Newton".

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Aquest mètode va ser publicat per Isaac Newton com a "*Mètode de les fluxions*" al 1736, tot i que ja era difós per la comunitat científica cap al 1671.

Durant aquest temps Joseph Raphson el va modificar lleugerament i el va presentar a la societat molt abans cap al 1690, motiu pel qual també es coneix com "Mètode de Newton-Raphson". Tot i que llavors també hauríem de citar el treball posterior de Thomas Simpson i Joseph Fourier per donar-li la forma actual.

MÈTODE DE NEWTON PER \mathbb{R}

Un problema històricament de gran interès matemàtic ha estat resoldre l'equació $f(x) = 0$, és a dir, els zeros o arrels d'una funció real, per tal de resoldre problemes d'optimització (càlcul de màxims i mínims) o obtenir punts fixos d'aplicacions, entre d'altres. Aquesta qüestió es pot solucionar gràcies al mètode de Newton, un dels mètodes iteratius més coneguts per funcions derivables.

Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció polinòmica de variable real i suposem que f té alguna arrel propera a cert punt x_0 . Llavors si reemplaçem el polinomi $f(x)$ per la seva recta tangent t_1 en el punt de tangència $(x_0, f(x_0))$ i trobem el seu tall amb l'eix X , obtindrem un valor x_1 que és una primera aproximació de l'arrel desitjada, com exposem a continuació:

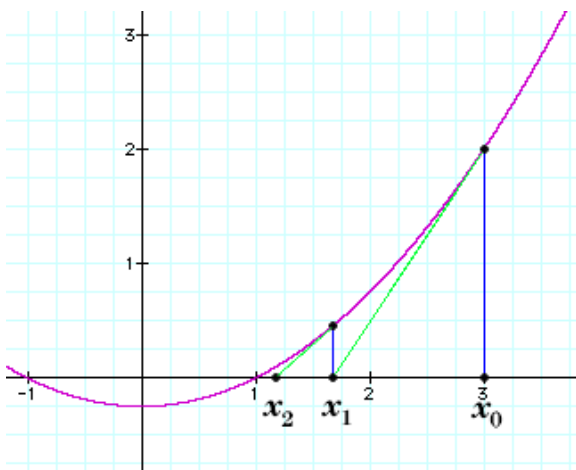
$$t_1: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Iterant aquest procés varies vegades obtindrem valors cada vegada més propers a l'arrel o zero de la funció. Generalitzant, el procés es pot resumir en la següent fórmula de recurrència:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

Per exemple una de les arrels o zeros de funció de la gràfica de $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 1)$ és 1. Si agafem $x_0 = 3$ i apliquem el mètode de Newton, obtenim la següent òrbita:



$$x_0 = 3 \rightarrow$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{2}{1,5} = \frac{5}{3} = 1,66666 \dots \rightarrow$$

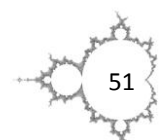
$$x_2 = \frac{17}{15} = 1,13333 \dots \rightarrow$$

$$x_3 = \frac{257}{255} = 1,00784 \dots \rightarrow$$

$$x_4 = \frac{65537}{65535} = 1,00003 \dots$$

Per tant, el mètode de Newton és una bona eina per la seva elevada velocitat de convergència cap a alguna de les arrels (en aquest cas amb 4 iteracions obtenim un resultat molt pròxim a l'arrel amb 4 decimals correctes). En general i amb "bona vista", podem guanyar almenys 2 decimals correctes en cada iteració.

Per tal d'aconseguir una bona aproximació i assegurar-nos que l'òrbita convergeix cap a una arrel de la funció, hem d'intentar començar amb punts pròxims a l'arrel amb els mètodes possibles i complir totes



les condicions del *teorema de convergència global*: donada una funció $f(x)$, amb primera i segona derivada, definida en l'interval $[a, b]$ cal que es compleixi:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$: les imatges de a i b han de tenir signes diferents per tal d'assegurar l'existència d'una arrel segons el teorema de Bolzano.
2. $f'(x) \neq 0$, per a tot $x \in [a, b]$: la funció ha de ser sempre creixent [$f'(x) > 0$] o decreixent [$f'(x) < 0$] per tal d'assegurar la unicitat de l'arrel.
3. $f''(x) \cdot f''(y) \geq 0$, per a tot $x \in [a, b]$: la funció ha de ser sempre convexa [$f''(x) > 0$] o sempre còncava [$f''(x) < 0$].
4. $\max \left\{ \frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} \right\} \leq b - a$: la recta tangent a la funció en un dels dos extrems, a o b , ha de tallar l'eix X dins l'interval $[a, b]$.

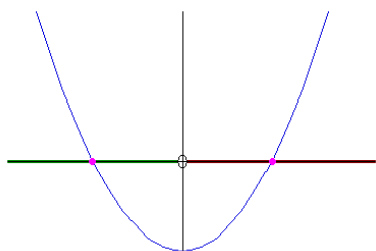
MÈTODE DE NEWTON PER A C

Si ara $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció polinòmica de variable complexa i volem trobar alguna arrel o zero de funció de f , podem aplicar el mètode de Newton de la mateixa manera que per funcions de variable real. Per tant, la fórmula de recurrència és la mateixa però aplicada als nombres complexos:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0$$

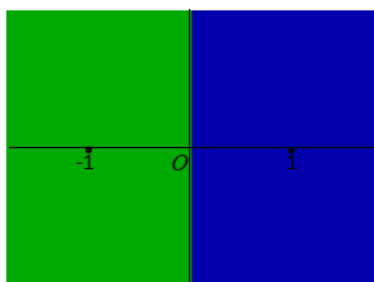
CONQUES D'ATRACCIÓ

Si la funció té més d'una arrel, el mètode de Newton trobarà una o altra segons el valor x_0 amb que es comenci la iteració. Per tant, cada arrel de f té la seva pròpia conca d'atracció que determina els valors de la llavor x_0 perquè l'òrbita produïda pel mètode de Newton convergeixi cap a ella.



Per exemple, les arrels d'una funció de variable real $f(x) = x^2 - 1$ són -1 i 1 , per tant, hi ha dues conques d'atracció per cada solució, que engloben aquells punts inicials pels quals la seva òrbita tendeix cap a una de les arrels. En aquest cas, la conca d'atracció de l'arrel $x = 1$ inclou tots els punts inicials que convergeixen cap a ella, és a dir, si $x_0 \in (0, +\infty)$; i la conca d'atracció de l'altra arrel $x = -1$ correspon a l'interval $x_0 \in (-\infty, 0)$, excloent en tots dos casos el $x_0 = 0$ perquè no es

pot substituir en la fórmula de recurrència.



Si ara pensem el mateix mètode aplicat al pla complex, les conques d'atracció de cada arrel no englobaran intervals sinó subconjunts del pla complex. Per exemple, $f(z) = z^2 - 1$ té dues arrels que corresponen al seu anàleg en el pla real, és a dir, $z = -1$ i $z = 1$. Però ara la convergència cap a una de les arrels depèn de la regió on agafem la llavor z_0 amb que comencem la iteració. Per tant, si comencem en un punt del pla complex amb part real positiva (corresponent a la regió blava de la figura) el mètode de Newton

convergirà cap a l'arrel $z = 1$, però si comencem en un punt amb part real negativa (a la regió verda de la figura) l'òrbita convergirà cap a l'altre arrel $z = -1$.

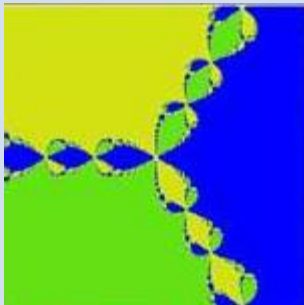
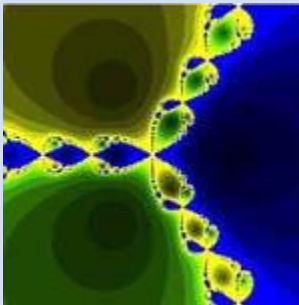
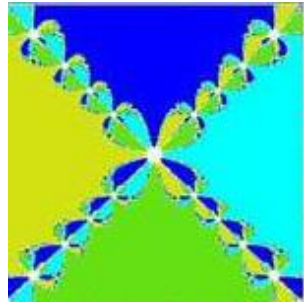
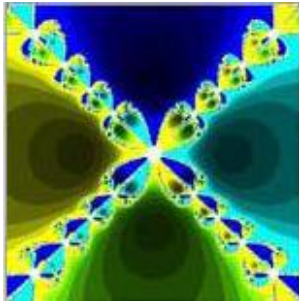
VELOCITAT DE CONVERGÈNCIA

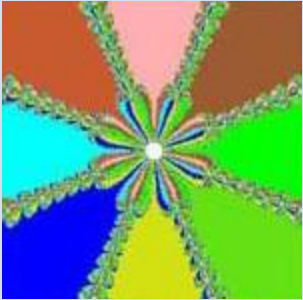

En realitat, els fractals de tipus Newton es construeixen donant colors diferents a la conca d'atracció de cada arrel fruit de l'aplicació del mètode de Newton com en l'exemple anterior.

S'acostuma a aplicar un algoritme de coloració relacionat amb la velocitat de convergència dels punts de cada conca cap a la seva arrel, atribuint una intensitat de color diferent en funció d'aquesta. Si la seva velocitat de convergència és molt gran, el color de la conca d'atracció en aquesta regió serà més intens i així successivament fins a un llindar preestablert.

També és interessant observar que les fronteres entre les diferents conques d'atracció pertanyen al conjunt de Julia de N_p , i per tant, està format pels punts l'òrbita dels quals romandrà en el conjunt, és a dir, no convergiran cap a cap de les arrels de $f(z)$. Per exemple per $f(z) = z^2 - 1$, el conjunt de Julia associat seria la recta perpendicular al punt mig de les dues arrels (coincident amb l'eix imaginari). Però hi ha molts altres casos com polinomis de major grau, on els conjunts de Julia associats són molt complexos i actuen de frontera entre les diferents conques d'atracció.

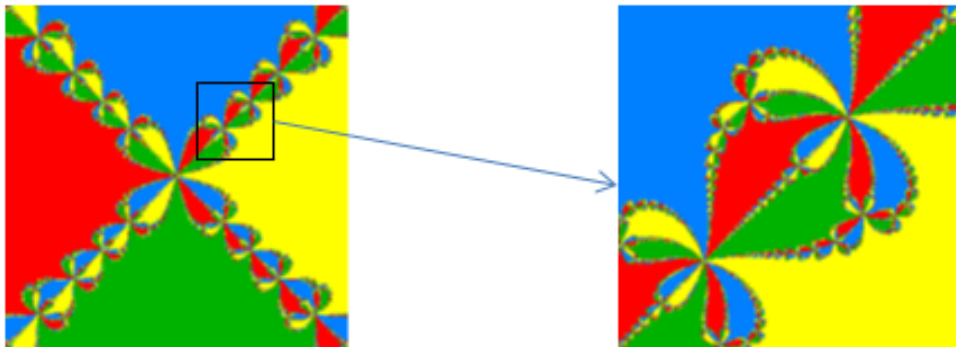
Per tal d'aclarir els conceptes relacionats amb les arrels de les conques d'atracció com a resultat del mètode de Newton, exposarem una taula amb diversos fractals de tipus Newton fruit de la coloració de les diferents conques d'atracció (les arrels de cada polinomi estan acolorides de la mateixa tonalitat que la seva conca per facilitar-ne la compressió), i també representem l'anàleg però tenint en compte la velocitat de convergència per tal d'aproximar-lo a la idea convencional de bellesa fractal:

Fractal de Newton	Velocitat de convergència	Funció	Conques d'atracció	Arrels
		$f(z) = z^3 - 1$	3	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: flex-start;"> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> 1 </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ </div> </div>
		$f(z) = z^4 - 1$	4	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: flex-start;"> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> 1 </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> i </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> -1 </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> $-i$ </div> </div>

		$f(z) = z^8 - 1$	8	<ul style="list-style-type: none"> 1 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ i $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ -1 $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $-i$ $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
---	---	------------------	---	--

QUASIAUTOSIMILITUD

Els fractals de Newton també presenten quasiautosimilitud com es pot observar a la figura següent:



4. ELS IFS I EL "JOC DEL CAOS"

4.1. INTRODUCCIÓ A LA MRCM (*MULTIPLE REDUCTION COPY MACHINE*)

En aquest capítol presentarem un mètode molt senzill que ens introduirà en el llenguatge de la geometria fractal per tal d'entendre millor la seva construcció i poder programar els fractals, mitjançant el treball dels conceptes fractals bàsics: l'autosimilitud i la iteració.

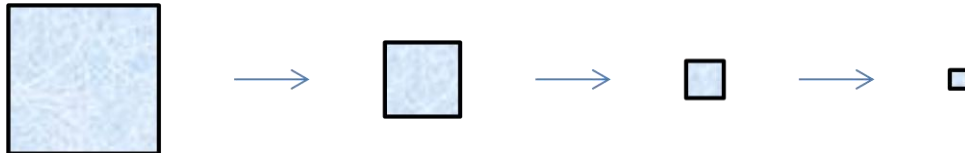
Primer hem de considerar una màquina copiadora equipada amb una eina de reducció d'imatges de tal manera que si agafem una imatge com a *input*, la posem en la màquina i pitgem el botó necessari, obtenim una còpia idèntica de la imatge introduïda com a *output*, però reduïda uniformement amb un factor determinat.

En llenguatge matemàtic, diríem que hem aplicat un procés anomenat *transformació similar* o *similitud* per tal de generar una còpia *similar* a l'original.

SRM: MÀQUINA COPIADORA REDUCTORA SIMPLE

Per exemple, imaginem que tenim una màquina copiadora de reducció simple, la qual ens proporciona una única còpia idèntica a l'original, però reduïda un 50%, és a dir, per un factor de $1/2$.

El procés consisteix en un sistema de realimentació, és a dir, usant l'*output* de cada execució com a *input* del següent pas, com es mostra a la figura següent (és la mateixa emprada per explicar el concepte d'iteració, motiu que ens recorda la seva intrínseca relació):

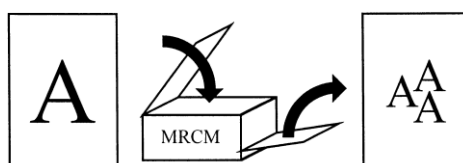


Aquesta successió és fàcil de predir a llarg termini: després de poques iteracions qualsevol imatge serà contínuament reduïda fins a convertir-se en un punt. En altres paraules, executar aquesta màquina simple seria un malbaratament de paper.

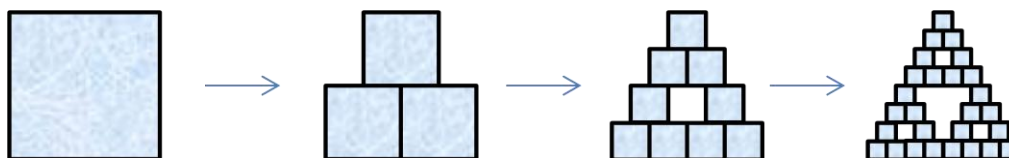
MRCM: MÀQUINA COPIADORA REDUCTORA MÚLTIPLE

Per tal de trobar-li una finalitat profitosa, hem de millorar la seva configuració i maquinària. Hem de recordar que l'acció principal de la nostra màquina és la reducció d'imatges. Com que cada reducció s'aconsegueix amb un sistema d'una lent, podem variar el nombre de còpies amb una simple modificació en el nombre de lents reductores. Per tant, redueix la imatge pel factor desitjat, produeix tantes còpies com lents disponibles, i col·loca cadascuna resultant en un lloc específic del paper.

Aquest mecanisme encarregat d'executar aquest nou sistema de realimentació s'anomena *Màquina Copiadora Reductora Múltiple* (MRCM), el disseny de la qual depèn de l'elecció del nombre de lents, els factors de reducció i l'emplaçament de cada imatge reduïda.

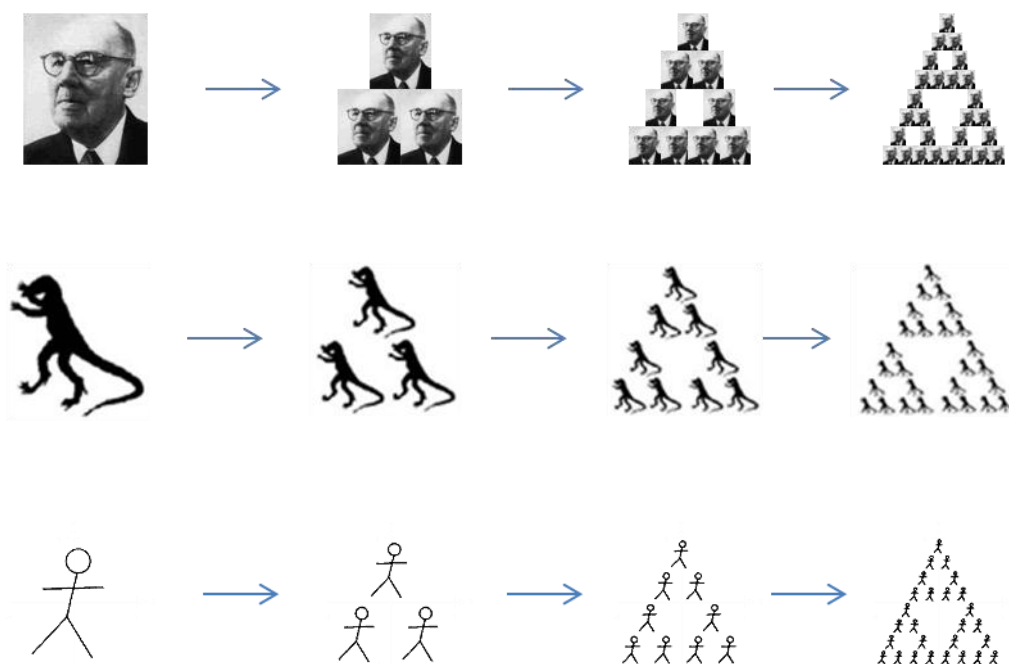


A continuació presentarem un primer exemple d'una MRCM que incorpora 3 tres lents reductores que redueixen la imatge un 50%, és a dir, per un factor de $1/2$ com en el cas anterior de la SRCM, però col·locades de la següent manera: una en la part superior central, una altra al cantó dret i l'altra al cantó esquerre; com es mostra a la figura següent:



En aquest cas, observem com la figura resultant no suposa una pèrdua de temps i material, ja que en cada pas es tripliquen les còpies que disminueixen de grandària ràpidament, per tant, el resultat és cada vegada més interessant i sorprenent.

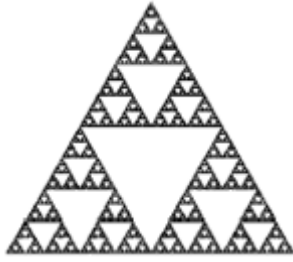
De fet ens podem imaginar que el resultat final d'aplicar aquest procés moltes vegades és invariant i molt conegut dins l'àmbit fractal, però el més meravellós és que el secret de la tendència d'aquest procés realimentat no és l'elecció d'un quadrat de dimensions apropiades, com podem veure en les següents figures:



Per tant, ara podem predir que la màquina produeix la mateixa imatge al final de tot procés, i a més aquesta figura és totalment independent de la imatge amb la que comencem l'execució.

Aquest comportament sembla ser un miracle o màgia, però matemàticament simplement significa que el procés és estable, ja que origina una seqüència de resultats que tendeixen cap a un únic objecte final, independentment de la llavor amb que iniciem la iteració.

L'altra gran sorpresa és representar la imatge final amb paciència perquè aquesta serà perfectament un dels fractals més famosos: el triangle de Sierpinski!



Com a resultat d'aquest experiment, podem afirmar que sense importar la imatge inicial escollida, la seqüència tendeix cap a una única figura que s'anomena "atractor" de la màquina o procés.

Aquesta troballa fa pensar que la MRCM és una màquina potent per representar aquests "monstres matemàtics", fins i tot, elements de la natura que presentin característiques fractals com la autosimilitud. De fet podem modificar el nombre de lents i el factor de reducció per obtenir el fractal desitjat, i en les seccions següents veurem com trobar els seus algorismes per poder-los programar d'una manera senzilla.

DE SIMILAR A AFÍ

En l'exemple anterior, cada lent es comporta com una transformació de similitud, és a dir, un quadrat es reproduïx com un quadrat, una imatge com la mateixa imatge, ja que l'única cosa que canvia és l'escala de la figura. Per tant, dos punts de la imatge inicial sempre es distancien per un factor reductor constant.

Una primera idea seria permetre al sistema de cada lent reduir la imatge amb un factor diferent segons la direcció espacial. Per exemple, les lents poden reduir-la per un factor de $1/2$ en la direcció horitzontal (amplada) i per un factor de $1/3$ en la direcció vertical (altura). L'efecte d'aquest canvi és la destrucció de l'autosemblança perfecta: un quadrat es reduiria en un rectangle, o una imatge es deformaria.

En termes matemàtics, es parla de *transformacions afins*. Les *similituds* i *transformacions afins* formen part de les *transformacions lineals*, és a dir, transformacions que aplicades a una línia recta reproduïxen també una recta.

En general aquesta maquinària perfeccionada ens permet fer translacions, reduccions i rotacions per realitzar tot tipus de similituds que seran de gran ajuda més endavant per tal de representar fractals gràcies al seu innocent poder.

DE LINEAL A NO LINEAL

Però en realitat les similituds dels sistemes de lents acostumen a no ser perfectes perquè distorsionen la imatge inicial. Ens ho podem imaginar amb un exemple animal: una línia recta observada per les lents oculars d'un peix, és reproduïda com una línia corba.

En termes matemàtics es parla dels efectes de *transformacions no lineals*. Per exemple, si agafem una línia recta en el pla real i apliquem una reducció per un factor de $1/3$ a qualsevol segment de línia, obtindrem òbviament una similitud perfecta. Però en canvi, si ho intentem amb l'arrel quadrada, observem un efecte no lineal típic: un segment de longitud 9 és reduït a un de $\sqrt{9} = 3$ (com si també es reduís per un factor de $1/3$), mentre que un segment de longitud 81, tot i ser 9 vegades més llarg, és reduït a un de 9 (per un factor de $1/9$), que només és 3 vegades més llarg que el reduït anteriorment. Aquest tipus de transformacions fan variar el factor de reducció segons el lloc on la apliquem, per tant és més difícil predir els seus efectes (només es pot saber que es mantenen els angles).

Les màquines copiadores equipades amb sistema de lents no lineals són més complexes i no entrarem en el tema, però més endavant ho utilitzarem per construir un conjunt de Julia per tal de veure els seus increïbles efectes.

4.2. TRANSFORMACIONS AFINS

Observar que la MRCM sembla produir sempre la mateixa figura final és una descoberta experimental meravellosa, però necessita un suport teòric matemàtic.

La *Màquina Copiadora de Reducció Múltiple* es basa en una col·lecció de reduccions o contraccions. Aquestes transformacions poden ser similars o afins, cosa que ens permet escalar, cisellar, rotar o reflectir la imatge, a més de traslladar-la al lloc desitjat del paper gràcies a l'aplicació d'uns conceptes matemàtics molt senzills com veurem en aquest apartat.

Una transformació afí en el pla és una funció w en el pla \mathbb{R}^2 composta per una transformació lineal i una translació de la forma:

$$w(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

on $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Aquesta expressió també es pot escriure usant el llenguatge matricial per la seva utilitat i facilitat d'estructuració dels coeficients de les transformacions, de la següent manera:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

on $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ és la *part lineal* (A) i $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ és el *vector de translació* (T).

D'altra banda, si considerem $z = (x, y)$ i $z' = w(z) = (x', y')$, podem escriure la mateixa expressió en un llenguatge més familiar i computacional:

$$x' = ax + by + e$$

$$y' = cx + dy + f$$

En resum, estudiarem les transformacions afins, formades per una transformació lineal i una translació, de forma general:

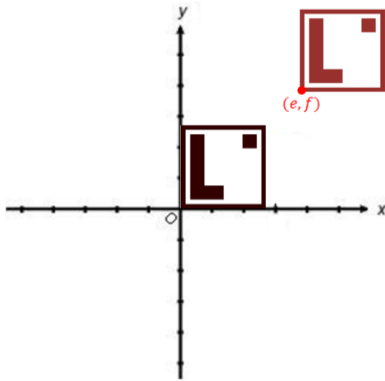
$$z' = A \cdot z + T$$

Sempre tenint en compte que partim de l'origen de coordenades, on roman el vèrtex de l'objecte, el qual no és més que un conjunt de punts que pateixen la mateixa transformació.

TIPUS DE TRANSFORMACIONS AFINS

En aquest apartat presentem les principals transformacions geomètriques, tant en forma matricial, funcional com general, per tal d'adquirir les eines necessàries per contraure i moure un objecte en el pla que ens serà de molt servei més endavant per idear la representació d'alguns fractals molt interessants.

TRANSLACIÓ



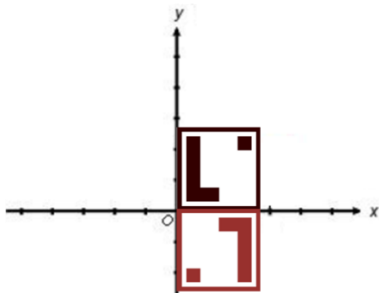
Una *translació* desplaça simplement l'objecte al lloc desitjat, movent cada punt la mateixa distància en la mateixa direcció que el vector de translació.

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = z + T$$

$$w(x, y) = (x + e, y + f)$$

SIMETRIA

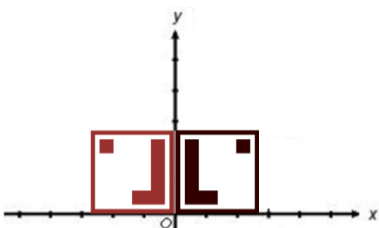
Una *simetria* és una reflexió que emmiralla una imatge respecte un eix o punt per tal d'obtenir una figura simètrica però voltejada al mateix temps.



Simetria respecte a l'eix X:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = \bar{z} \text{ (conjugat)}$$

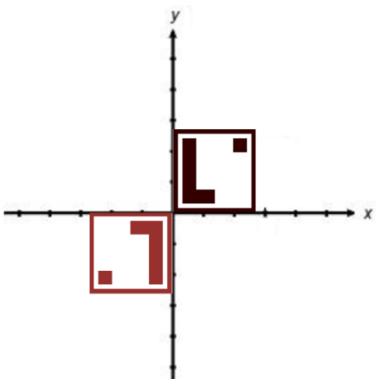
$$w(x, y) = (x, -y)$$



Simetria respecte a l'eix Y:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = -\bar{z} \text{ (-conjugat)}$$

$$w(x, y) = (-x, y)$$



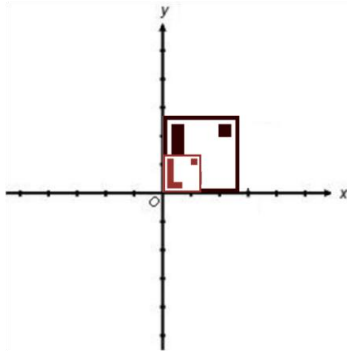
Simetria respecte a l'origen de coordenades:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = -z$$

$$w(x, y) = (-x, -y)$$

HOMOTÈCIA

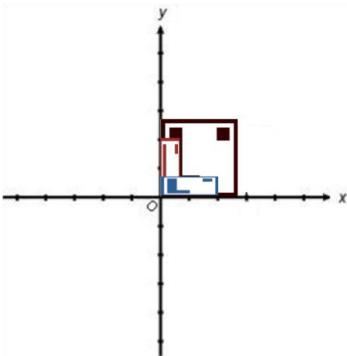
En especial, una *reducció* o *contracció* disminueix la grandària de la figura per un cert factor de reducció.



Reducció similar: L'amplitud i altura es contrauen pel mateix factor r .

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = r \cdot z$$

$$w(x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)$$



Reducció afí: L'amplitud es contrau per un factor r_1 , diferent al de l'altura r_2 .

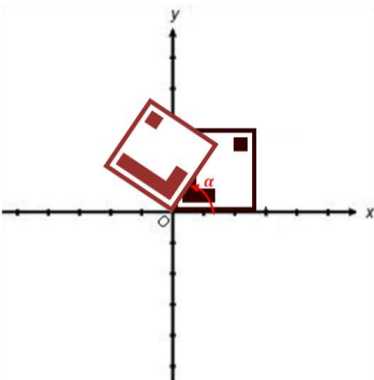
$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = R \cdot z$$

$$w(x, y) = (r_1 \cdot x, r_2 \cdot y)$$

També es pot generar una *ampliació* de la figura si el factor $r > 0$ (d'ampliació), però no ens interessa perquè en la següent secció veurem que només necessitem transformacions contractives.

ROTACIÓ

Una *rotació* gira una figura al voltant d'un punt fix (en el nostre cas, l'origen de coordenades), rotant cada punt segons el nombre de graus, el punt central i la direcció.



La matriu de rotació ve donada per l'angle α :

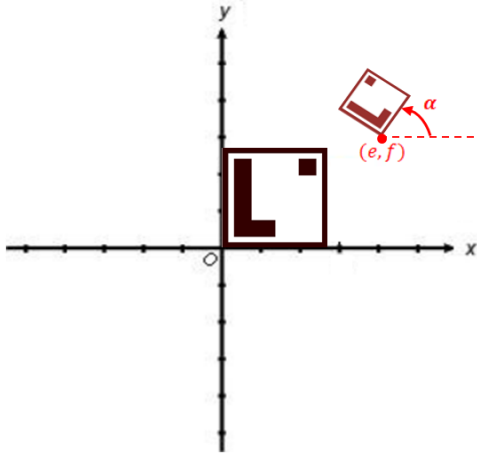
$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z' = R_\alpha \cdot z$$

$$w(x, y) = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)$$

També podem cisellar la imatge si canvien els angles de rotació per l'eix X i Y, és a dir, si en l'eix horitzontal rotem per l'angle α i l'eix vertical per β .

SEMBLANÇA

Una *semblança* o *similitud* és una composició de transformacions afins del pla: una reducció similar, una rotació i una translació per tal de formar figures perfectament autosemblants.



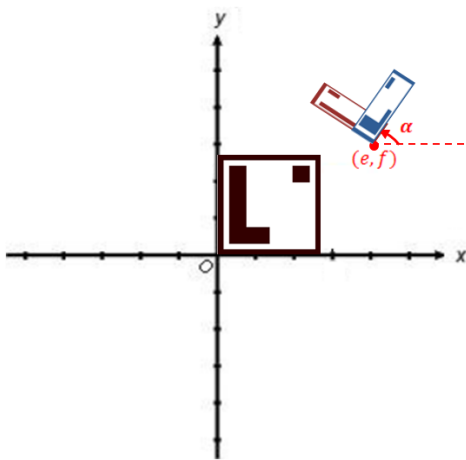
$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z' = r \cdot R_{\alpha} \cdot z + T$$

$$w(x, y) = (r \cdot x \cdot \cos \alpha - r \cdot y \cdot \sin \alpha + e, \\ r \cdot x \cdot \sin \alpha + r \cdot y \cdot \cos \alpha + f)$$

AFINITAT

Una *afinitat* també és una composició de transformacions afins: una reducció afí, una rotació i una translació per tal de generar figures semblants però deformades segons el nostre interès.



$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z' = R \cdot R_{\alpha} \cdot z + T$$

$$w(x, y) = (r_1 \cdot x \cdot \cos \alpha - r_1 \cdot y \cdot \sin \alpha + e, \\ r_2 \cdot x \cdot \sin \alpha + r_2 \cdot y \cdot \cos \alpha + f)$$

4.3. IFS (ITERATED FUNCTION SYSTEM): SISTEMA DE FUNCIONS ITERADES

4.3.1. MRCM = IFS

La MRCM proporciona una bona metàfora coneguda com *Sistemes de Funcions Iterades* en matemàtiques, els quals tractarem amb detall en aquest capítol.

Recordem que aquesta màquina agafa una imatge com a *input* (entrada). Està formada per un sistema de lents, on cadascuna redueix la imatge d'entrada i la col·loca en algun lloc de la imatge de sortida. L'autosemblança de totes les còpies reduïdes es mostra definitivament com a *output* (sortida).

La màquina de còpia es basa en tres indicadors: el nombre de sistemes de lents, el factor de reducció de cada sistema de lents i la configuració d'aquests sistemes per generar còpies semblants. Però la idea crucial de la màquina és l'execució d'un circuit de realimentació, és a dir, utilitza cada *output* com a nou *input* una i altra vegada. Mentre el resultat del procés és inútil quan utilitzem un únic sistema de lents amb cert factor de reducció (obtenim simplement un punt), aquest experiment es torna extremament potent i interessant quan utilitzem diversos sistemes de lents (i més si treballem amb transformacions més generals com les presentades en l'apartat anterior).

Si volguéssim descobrir el secret d'una MRCM, el seu pla de construcció, no ens hauríem d'esforçar gaire. Només hauríem d'executar la màquina amb una imatge arbitrària, ja que la primera còpia ens revelaria totes les funcions geomètriques de l'instrument que continuariem operant en un mode de realimentació, i ens permetrà aconseguir diferents atractors amb petits canvis.

4.3.2. IFS DETERMINISTA

Un IFS (Sistema de Funcions Iterades, en anglès) és un conjunt de contraccions del pla w_1, w_2, \dots, w_n (funcions que aproximen conjunts de punts entre si) aplicades a una figura inicial P (conjunt de punts) de forma recursiva.

La imatge inicial P és transformada en còpies més petites de si mateixa, aplicant cada contracció sobre la imatge mitjançant l'anomenat *operador de Hutchinson*:

$$W(P) = w_1(P) \cup w_2(P) \cup \dots \cup w_n(P)$$

Aquest operador W aplicat a la figura P , simplement realitza cada una de les transformacions contractives i reuneix tots els resultats en una mateixa imatge.

Si comencem amb una imatge qualsevol P_0 , l'aplicació recursiva del operador de Hutchinson genera una successió de figures:

$$P_1 = W(P_0)$$

$$P_2 = W(P_1)$$

...

$$P_{n+1} = W(P_n)$$

Equivalentment, podem pensar que apliquem l'operador n vegades a una figura inicial P_0 :

$$P_n = W^n(P_0), \quad n \geq 0$$

Per tant, generem successives aproximacions a la figura final resultant d'aplicar infinites iteracions, anomenada *atractor A* del IFS fruit del límit del procés:

$$A = P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(P_0)$$

Aquests raonaments matemàtics per una situació general, ens permetran compondre qualsevol tipus de figures autosembllants que en el seu límit ens generaran fractals interessants, ja que de fet és l'algorítme de la nostra MRCM.

4.3.3. TEOREMA DEL COLLAGE

Hem descrit com un conjunt de transformacions afins contractives ens condueix cap a una imatge atractora. Ara tractarem el problema invers: donada una imatge, descobrir les transformacions imprescindibles per generar-la, és a dir, donada la imatge final o atractor, definir l'IFS que ens conduirà a ell. Si aconseguim un mètode general, podrem generar imatges com els fractals estudiats en un temps de computació mínim perquè només necessitaríem unes quantes equacions corresponents a l'IFS.

Barnsley va trobar una solució a aquest interessant problema invers: el teorema del Collage, i el va utilitzar exitosament per comprimir imatges. La idea presentada en el seu llibre *Fractals Everywhere*, es basa en recobrir una imatge amb còpies aproximades d'ella mateixa per poder generar-la amb un IFS. Segons els estudis de Barnsley, al executar-lo utilitzem 10.000 vegades menys informació que els mètodes tradicionals per generar un atractor molt proper a la imatge donada per la gràfica fractal. De fet si parlem d'un fractal matemàtic, podem compondre les còpies en el pla per tal d'obtenir el següent pas en la iteració, i així successivament per obtenir una reproducció exacta.

Matemàticament, el teorema del collage diu que si tenim n contraccions de la forma

$$w_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{R}$$

i la funció collage

$$W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que actua sobre el conjunt de compactes del pla com a

$$W(C) = w_1(C) \cup \dots \cup w_n(C)$$

on

$$w_1(C) = \{w_1(x, y); (x, y) \in C\}.$$

Llavors, existeix un únic compacte A complint

$$W(A) = A.$$

A més, per qualsevol compacte B és manté invariable:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) = A.$$

El desenvolupament d'aquest teorema enunciat per Barnsley, ens assegura l'èxit de la MRCM, i en paraules ens diu que mentre millor sigui descrita la imatge C per la unió de les imatges afins C_n , l'aproximació serà més propera a la figura original donada al generar l'atractor del conjunt de transformacions afins.

4.4. FRACTALS IFS

En aquest capítol aplicarem tots els coneixements adquirits sobre fractals i transformacions per tal de generar tot tipus de fractals a partir d'un IFS de forma senzilla i ràpida com a part pràctica del treball.

El mètode portat a terme es basa en els següents passos:

1- Es localitzen les n parts autosemblants F_n del fractal F en qüestió. Això equival a observar el nombre de peces autosemblants a F_0 que componen la figura en la primera iteració F_1 .

2- Es troben les transformacions afins contractives per a cada peça autosemblant, és a dir, aplicar totes les reduccions i translacions necessàries per fer-ne una còpia semblat col·locada en el lloc del pla que ens interressi. Com ja hem vist, hem d'escriure per a cada transformació una matriu tipus:

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

3- Es compon la figura en cada pas de la seva construcció unint els resultats de totes les transformacions mitjançant l'operador de Hutchinson:

$$F_{n+1} = W(F_n) = w_1(F_n) \cup \dots \cup w_n(F_n)$$

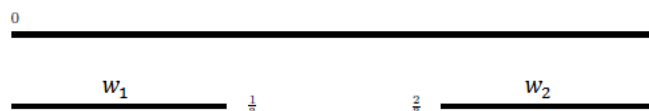
4- Es realimenta l'input amb el output del pas anterior de forma recursiva, fins a obtenir una aproximació prou bona de l'atractor F desitjat, és a dir, s'aconsegueix representar cada fractal amb una MRCM definida per un característic IFS relativament senzill.

Descriurem el IFS i adjuntarem una taula amb tota la seqüència d'imatges pas a pas, fins a arribar a una bona aproximació del fractal cercat.

4.4.1. FRACTALS GEOMÈTRICS "2D"

Per familiaritzar-nos amb els conceptes presentats i saber-los aplicar correctament, trobarem els IFS que descriuen la construcció dels fractals geomètrics estudiats en el capítol 2, motiu pel qual ens serà molt fàcil observar el nombre de peces i les transformacions necessàries. Considerant que els segments, els costats o arestes de les figures inicials tenen longitud 1 per posar-nos d'acord amb les transformacions i translacions.


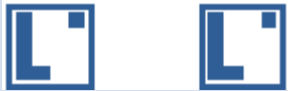

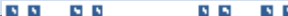


CONJUNT DE CANTOR



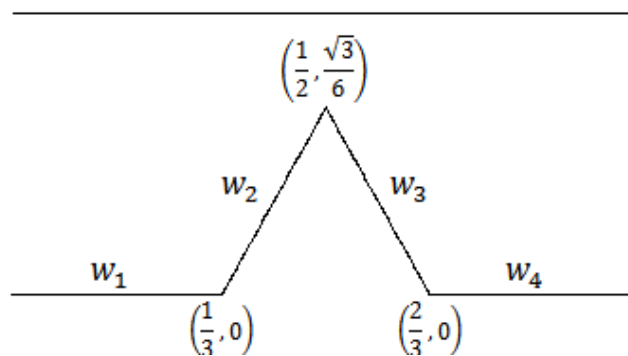
El conjunt de Cantor està format per dos peces autosemblants amb un factor de reducció de 1/3, i la segona es trasllada 2/3 cap a la dreta. Per tant, necessitem 2 transformacions:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2}{3}$$

Input	Operador	Output
C_0 	$W(C_0) = w_1(C_0) \cup w_2(C_0)$	C_1 
C_1	$W(C_1)$	C_2 
C_2	$W(C_2)$	C_3 
C_3	$W(C_3)$	C_4 
C_4	$W(C_4)$	$C_5 \sim C$ 

CORBA DE KOCH








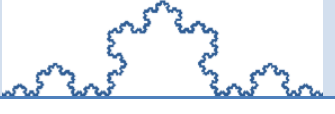
La corba de Koch consta de 4 transformacions contractives (2 d'elles amb rotació):

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

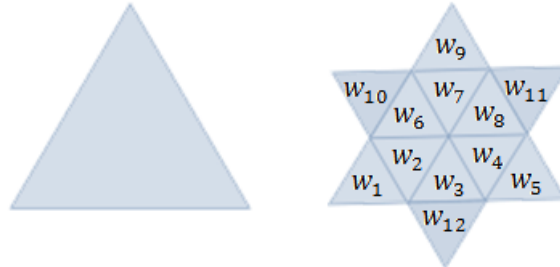
$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Input	Operador	Output
K_0 	$W(K_0) = w_1(K_0) \cup w_2(K_0) \cup w_3(K_0) \cup w_4(K_0)$	K_1 
K_1	$W(K_1)$	K_2 
K_2	$W(K_2)$	K_3 
K_3	$W(K_3)$	K_4 
K_4	$W(K_4)$	$K_5 \sim K$ 



FLOC DE NEU DE KOCH

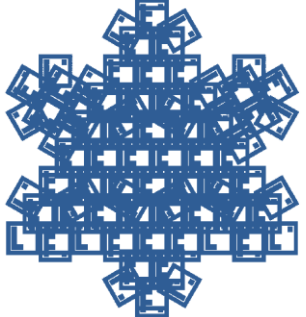
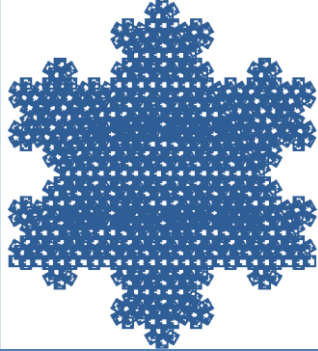
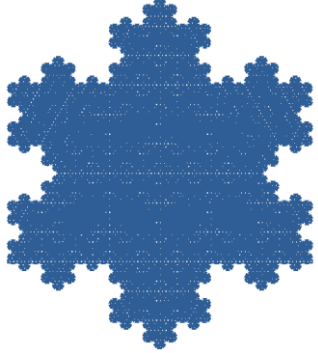
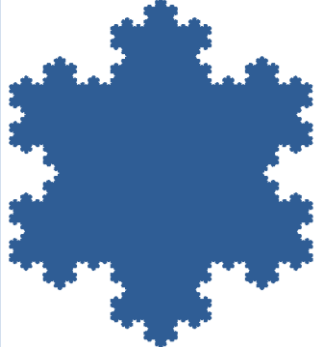
El floc de neu de Koch es podria fer unint tres corbes de Koch, però he preferit pensar-ho com una composició de triangles equilàters de la mateixa grandària per tal d'acabar omplint la seva superfície alhora que construeix aquestes corbes de Koch.



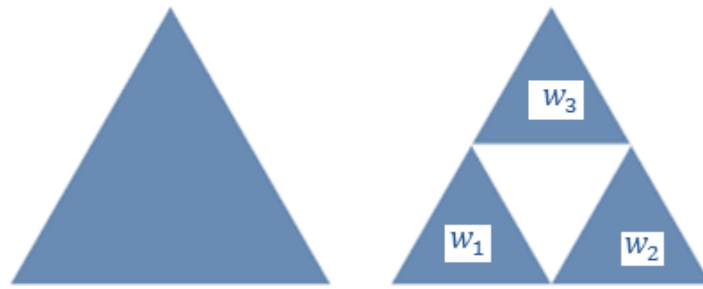
El floc de neu de Koch consta de 12 transformacions (4 d'elles amb reflexió i 2 amb rotació):

$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} & w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\
 w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} & w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\
 w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} & w_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\
 w_9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} & w_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\
 w_{11} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} & w_{12} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Input	Operador	Output
K_{S_0} 	$ \begin{aligned} W(K_{S_0}) &= w_1(K_{S_0}) \cup w_2(K_{S_0}) \cup w_3(K_{S_0}) \\ &\cup w_3(K_{S_0}) \cup w_4(K_{S_0}) \\ &\cup w_5(K_{S_0}) \cup w_6(K_{S_0}) \\ &\cup w_7(K_{S_0}) \cup w_8(K_{S_0}) \\ &\cup w_9(K_{S_0}) \cup w_{10}(K_{S_0}) \\ &\cup w_{11}(K_{S_0}) \cup w_{12}(K_{S_0}) \end{aligned} $	K_{S_1} 

K_{S_1}	$W(K_{S_1})$	K_{S_2} 
K_{S_2}	$W(K_{S_2})$	K_{S_3} 
K_{S_3}	$W(K_{S_3})$	K_{S_4} 
K_{S_4}	$W(K_{S_4})$	$K_{S_5} \sim K_S$ 

TRIANGLE DE SIERPINSKI

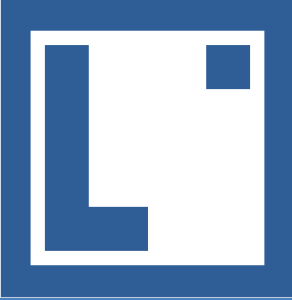
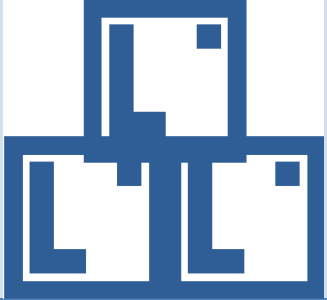
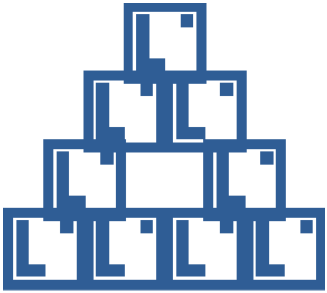


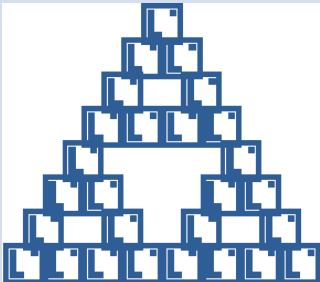
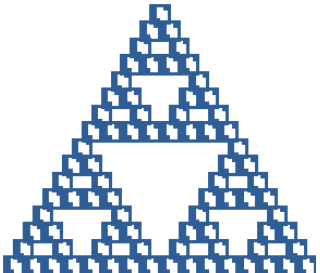
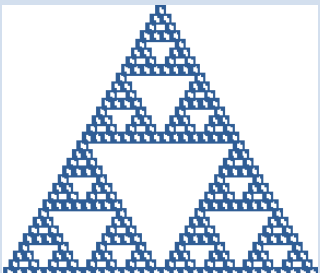
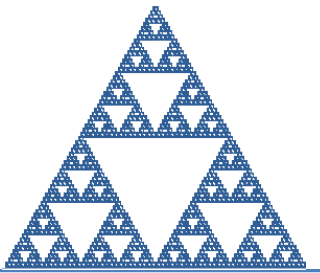
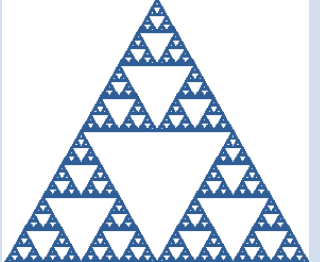
Com tantes vegades hem observat, el triangle de Sierpinski presenta 3 transformacions:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

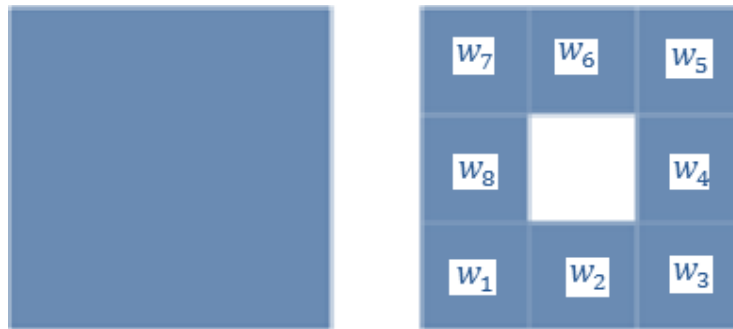
$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

Input	Operador	Output
S_0 	$W(S_0) = w_1(S_0) \cup w_2(S_0) \cup w_3(S_0)$	S_1 
S_1	$W(S_1)$	S_2 

S_2	$W(S_2)$	S_3 
S_3	$W(S_3)$	S_4 
S_4	$W(S_4)$	S_5 
S_5	$W(S_5)$	S_6 
S_6	$W(S_6)$	$S_7 \sim S$ 

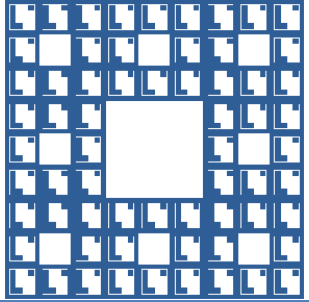
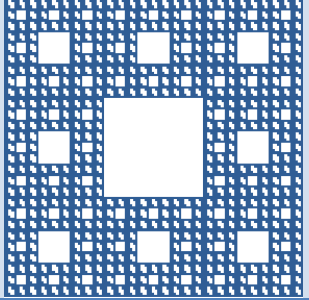
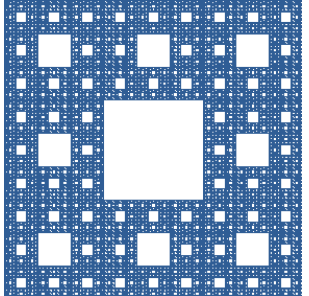
CATIFA DE SIERPINSKI



La catifa de Sierpinski consta de 8 transformacions amb reducció per un factor 1/3 i diverses translacions:

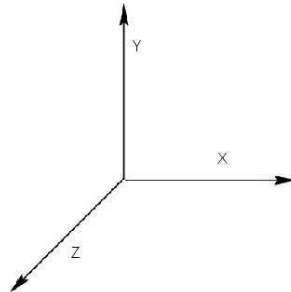
$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} & w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
 w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} & w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\
 w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} & w_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Input	Operador	Output
S_{C_0} 	$ \begin{aligned} W(S_{C_0}) &= w_1(S_{C_0}) \cup w_2(S_{C_0}) \cup w_3(S_{C_0}) \\ &\cup w_4(S_{C_0}) \cup w_5(S_{C_0}) \\ &\cup w_6(S_{C_0}) \cup w_7(S_{C_0}) \\ &\cup w_8(S_{C_0}) \end{aligned} $	S_{C_1}

S_{C_1}	$W(S_{C_1})$	S_{C_2} 
S_{C_2}	$W(S_{C_2})$	S_{C_3} 
S_{C_3}	$W(S_{C_3})$	$S_{C_4} \sim S_C$ 

4.4.2. FRACTALS GEOMÈTRICS "3D"

Els fractals tridimensionals també es poden representar amb un IFS, però requereix una reducció respecte els tres eixos (x, y, z) , per tant, una matriu amb tres columnes.









A continuació presentarem el tetraedre i la catifa de Sierpinski ja estudiats, hi deixo pels curiosos esbrinar a quin cub reduït de la primera iteració pertany cadascuna d'aquestes transformacions espacials.

TETRAEDRE DE SIERPINSKI

El tetraedre de Sierpinski consta de 4 transformacions amb reduccions de $1/2$ en l'amplada, altura i profunditat de cada aresta del tetraedre:

$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} & w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/12 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Input	Operador	Output
S_{T_0} 	$w(S_{T_0}) = w_1(S_{T_0}) \cup w_2(S_{T_0}) \cup w_3(S_{T_0}) \cup w_4(S_{T_0})$	S_{T_1} 

S_{T_1}	$W(S_{T_1})$	S_{T_2} 
S_{T_2}	$W(S_{T_2})$	S_{T_3} 
S_{T_3}	$W(S_{T_3})$	S_{T_4} 
S_{T_4}	$W(S_{T_4})$	$S_{T_5} \sim S_T$ 

ESPONJA DE MENGER

De la mateixa manera però amb més paciència, podem definir les 20 transformacions que corresponen als cubs restants en el primer pas de la construcció de l'esponja de Menger:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$w_9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{11} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{12} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{13} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{14} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{15} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$




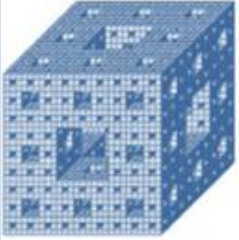
$$w_{16} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{17} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{18} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{19} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_{20} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Input	Operator	Output
M_{S_0} 	$W(M_{S_0}) = w_1(M_{S_0}) \cup w_2(M_{S_0}) \cup w_3(M_{S_0}) \cup w_4(M_{S_0}) \cup w_5(M_{S_0}) \cup w_6(M_{S_0}) \cup w_7(M_{S_0}) \cup w_8(M_{S_0}) \cup w_9(M_{S_0}) \cup w_{10}(M_{S_0}) \cup w_{11}(M_{S_0}) \cup w_{12}(M_{S_0}) \cup w_{13}(M_{S_0}) \cup w_{14}(M_{S_0}) \cup w_{15}(M_{S_0}) \cup w_{16}(M_{S_0}) \cup w_{17}(M_{S_0}) \cup w_{18}(M_{S_0}) \cup w_{19}(M_{S_0}) \cup w_{20}(M_{S_0})$	M_{S_1} 
M_{S_1}	$W(M_{S_1})$	M_{S_2} 
M_{S_2}	$W(M_{S_2})$	$M_{S_3} \sim M_S$ 

4.4.3. FRACTALS "COMPLEXOS"

Un cop vist els fractals geomètrics, podem dibuixar uns "IFS Complexos" amb uns trucs matemàtics que ens permetran visualitzar resultats semblants tot i no ser fidedignes a la iteració quadràtica que els defineix.

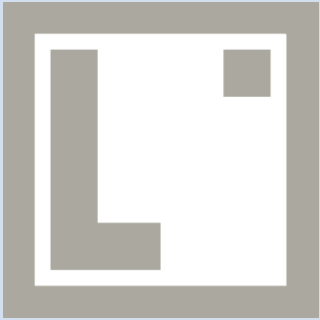
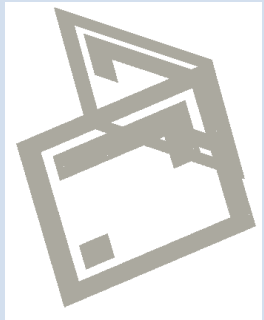
4.4.3.1. PSEUDO-MANDELBROT

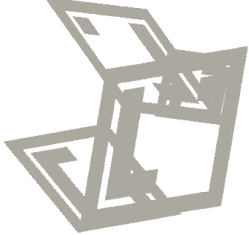
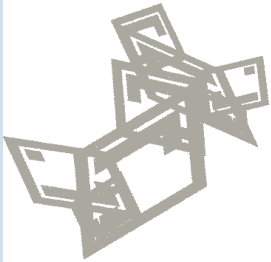
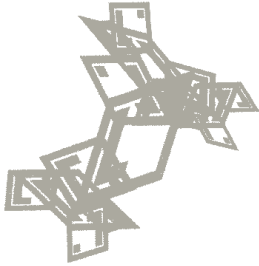
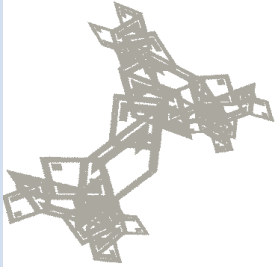
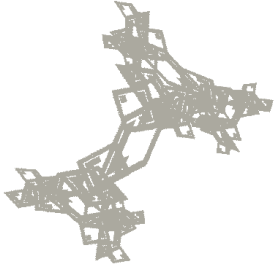
Vaig cercar un IFS per fer una mena de Mandelbrot, i a partir dels coeficients vaig poder desenvolupar 2 possibles transformacions:


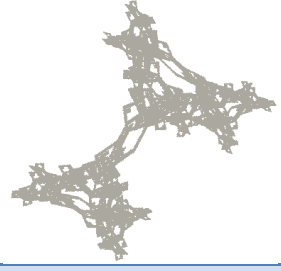
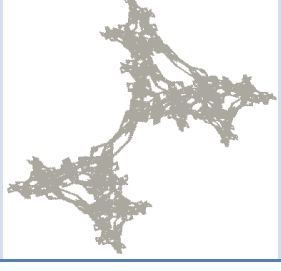
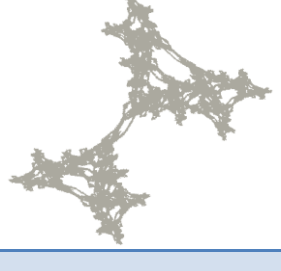
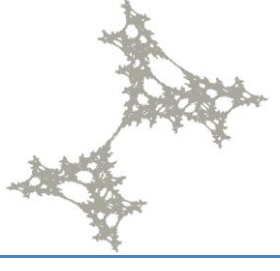
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 & 0 \\ 0 & -0,875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 73,66^\circ & -\sin 67^\circ \\ \sin 73,66^\circ & \cos 67^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.373 \\ -0.653 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 & 0 \\ 0 & -0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-74,66^\circ) & -\sin 71,5^\circ \\ \sin(-74,66^\circ) & \cos 71,5^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.277 \end{pmatrix}$$

En aquesta taula, presentem els sorprenents resultats que tendeixen a una mena de doble conjunt de Mandelbrot on es pot diferenciar els cardioides i algunes antenes.

Input	Operador	Output
m_0 	$W(m_0) = w_1(m_0) \cup w_2(m_0)$	m_1 

m_1	$W(m_1)$	m_2 
m_2	$W(m_2)$	m_3 
m_3	$W(m_3)$	m_4 
m_4	$W(m_4)$	m_5 
m_5	$W(m_5)$	m_6 

m_6	$W(m_6)$	m_7 
m_7	$W(m_7)$	m_8 
m_8	$W(m_8)$	m_9 
m_9	$W(m_9)$	m_{10} 
I així successivament...		
m_{14}	$W(m_{14})$	$m_{15} \sim m$ 

CONJUNT DE JULIA - IIM (INVERSE ITERATION METHOD)

En el capítol 3 de complexos hem estudiat l'algoritme d'escapament, però existeix un altre eficient algoritme que es basa en una propietat específica del conjunt de Julia:

- Si z_0 és un punt de J_c (frontera), el conjunt d'antiimatges de z_0 és dens en J_c .

La primera dificultat és trobar un punt del conjunt de Julia sobre el qual començar els càlculs d'iteració inversa. En el nostre cas, de les famílies quadràtiques se sap de forma directa que un dels dos punts fixos és sempre repulsor. En efecte, els punts fixos són les solucions de l'equació:

$$z^2 + c = z$$

Si desenvolupéssim l'equació arribaríem al seu resultat:

$$z^2 - z + c = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} = \begin{cases} z_1 = \alpha_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \\ z_2 = \beta_c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \end{cases}$$

Si sabéssim els raonaments matemàtics més complexos anteriorment esmentats, podríem comprovar que z_2 és sempre repulsor, per tant, pertany al Conjunt de Julia i el podem usar com a punt base de l'algoritme. A partir d'aquí calculem les antiimatges n -èssimes d'aquesta solució que podem també anomenar com z_n . De fet els punts es van duplicant per les dualitat de l'arrel a l'iterar-les inversament, i en general z_n són 2^n punts. En concret tot punt de z_n , per cada n , compleix que $Q_c^n(z_n) = \beta_c$ i per tant,

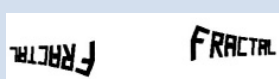
$$z_n = \pm \sqrt{z_{n-1} - c} \text{ amb } z_0 = \beta_c$$


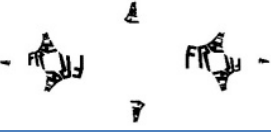
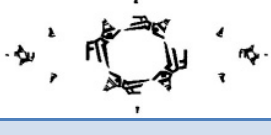



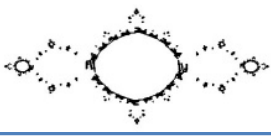
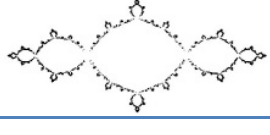
Aquest plantejament ens recorda a un IFS. De fet, aquest consta de 2 transformacions no lineals:

$$w_1(z) = +\sqrt{z - c}$$

$$w_2(z) = -\sqrt{z - c}$$

En aquesta taula, podem veure l'efecte de les transformacions lineals sobre un objecte (en aquest cas, la paraula FRACTAL) i no es pot negar que els resultats són meravellosos: una molt bona aproximació del conjunt de Julia per a $c = -1$! (Tot i que es necessitarien molts punts per fer el conjunt realment connex, però és una bona representació, i a més seria molt eficaç per dibuixar dendrites o pols de Cantor perquè són conjunts de Julia buits.)

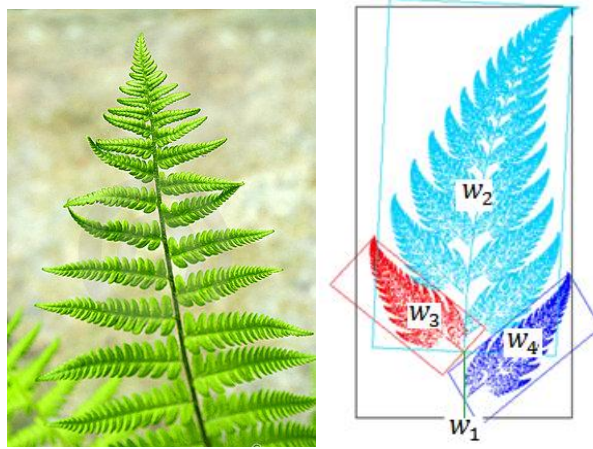
Input	Operador	Output
J_0 FRACTAL	$W(J_0) = w_1(J_0) \cup w_2(J_0)$	J_1 

J_1	$W(J_1)$	J_2 
J_2	$W(J_2)$	J_3 
J_3	$W(J_3)$	J_4 
J_4	$W(J_4)$	J_5 
J_5	$W(J_5)$	J_6 
J_6	$W(J_6)$	J_7 
J_7	$W(J_7)$	J_8 
J_8	$W(J_8)$	$J_9 \sim J_{C=-1}$ 

4.4.4. FRACTALS NATURALS

En aquets curiós apartat, veurem com generem fractals naturals (arbres i fulles) a partir d'IFS descrits per matemàtics com Barnsley. La idea continua sent cobrir la imatge final, però per diferenciar-ne les transformacions ens centrarem abans en la primera iteració.

4.4.4.1. FALGUERA DE BARNSELEY



La famosa falguera de Barnsley està formada per 4 transformacions, corresponents a la seva petita tija, la fulla principal, la dretana i l'esquerrana amb rotacions, reduccions i translacions molt estudiades:








$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,85 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-2,5^\circ) & -\sin(-2,5^\circ) \\ \sin(-2,5^\circ) & \cos(-2,5^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 49^\circ & -\sin 49^\circ \\ \sin 49^\circ & \cos 49^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

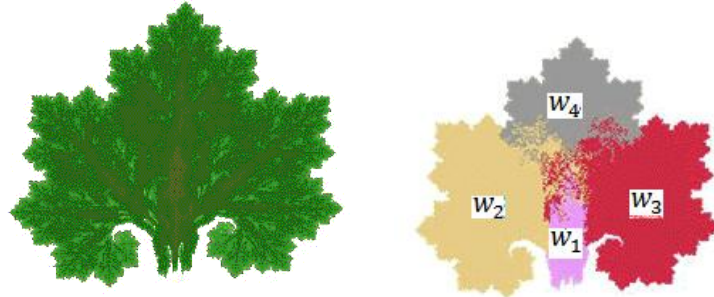
$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0 \\ 0 & 0,37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-50^\circ) & -\sin(-50^\circ) \\ \sin(-50^\circ) & \cos(-50^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

En la següent taula veurem una reproducció de la falguera partint d'un petit quadrat, per observar com increïblement sempre obtenim el resultat desitjat:

Input	Operador	Output
F_{B_0} 	$W(F_{B_0}) = w_1(F_{B_0}) \cup w_2(F_{B_0}) \cup w_3(F_{B_0}) \cup w_4(F_{B_0})$	F_{B_1} 
F_{B_1}	$W(F_{B_1})$	F_{B_2} 
F_{B_2}	$W(F_{B_2})$	F_{B_3} 
F_{B_3}	$W(F_{B_3})$	F_{B_4} 
F_{B_4}	$W(F_{B_4})$	F_{B_5} 
F_{B_5}	$W(F_{B_5})$	F_{B_6} 

F_{B_6}	$W(F_{B_6})$	F_{B_7} 
F_{B_7}	$W(F_{B_7})$	F_{B_8} 
F_{B_8}	$W(F_{B_8})$	F_{B_9} 
I així successivament...		
$F_{B_{15}}$	$W(F_{B_{15}})$	$F_{B_{16}} \sim F_B$ 

4.4.4.2. FULLA D'AURO




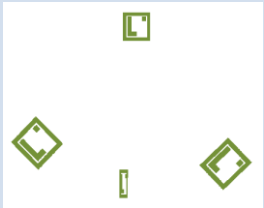

Un altre fractal natural molt bonic és la fulla d'auró, també composta per 4 transformacions (una per la tija i tres per les fulles):

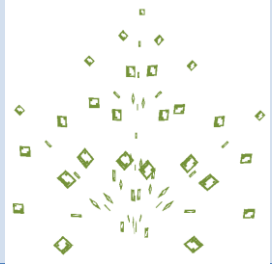

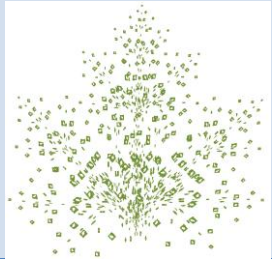
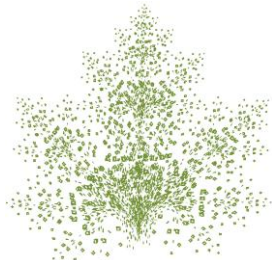
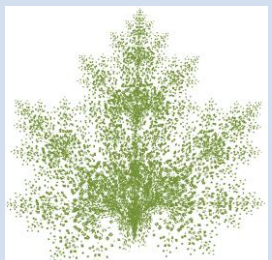
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,08 \\ -1,31 \end{pmatrix}$$

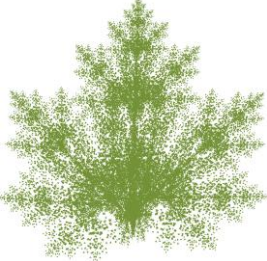
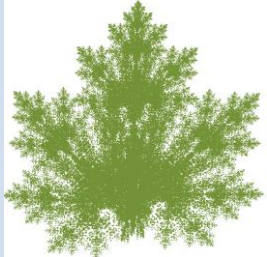
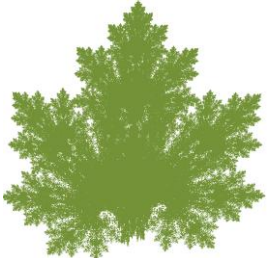

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,62 & 0 \\ 0 & 0,72 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-46,2^\circ) & -\sin(-46,2^\circ) \\ \sin(-46,2^\circ) & \cos(-46,2^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,62 & 0 \\ 0 & 0,72 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 46,2^\circ & -\sin 46,2^\circ \\ \sin 46,2^\circ & \cos 46,2^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,62 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

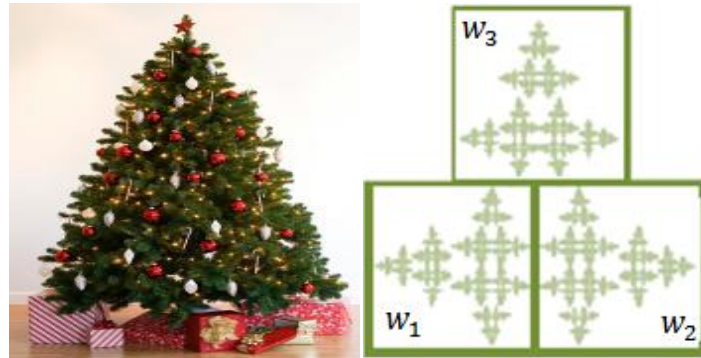
$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 1,62 \end{pmatrix}$$

Input	Operador	Output
F_{A_0} 	$W(F_{A_0}) = w_1(F_{A_0}) \cup w_2(F_{A_0}) \cup w_3(F_{A_0}) \cup w_4(F_{A_0})$	F_{A_1} 
F_{A_1}	$W(F_{A_1})$	F_{A_2} 

F_{A_2}	$W(F_{A_2})$	F_{A_3} 
F_{A_3}	$W(F_{A_3})$	F_{A_4} 
F_{A_4}	$W(F_{A_4})$	F_{A_5} 
F_{A_5}	$W(F_{A_5})$	F_{A_6} 
F_{A_6}	$W(F_{A_6})$	F_{A_7} 

F_{A7}	$W(F_{A7})$	F_{A8} 
F_{A8}	$W(F_{A8})$	F_{A9} 
F_{A9}	$W(F_{A9})$	F_{A10} 
F_{A10}	$W(F_{A10})$	$F_{A11} \sim F_A$ 

4.4.4.3. ARBRE DE NADAL

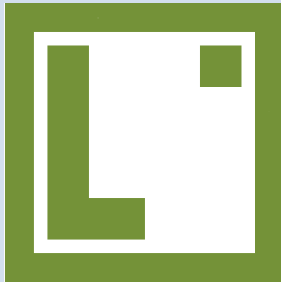
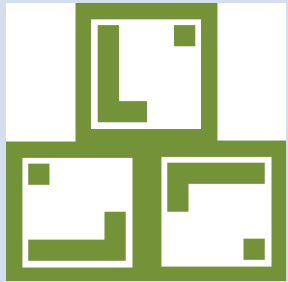
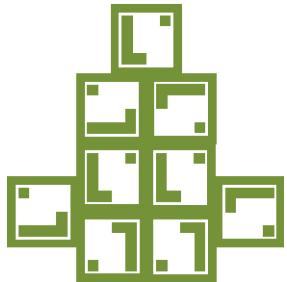


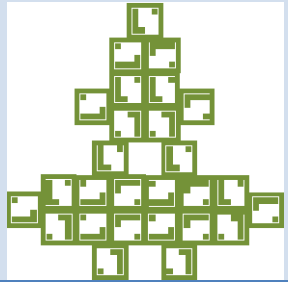
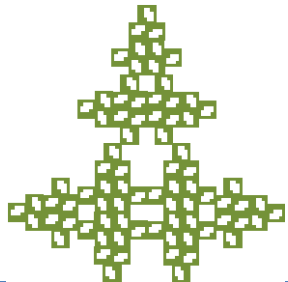
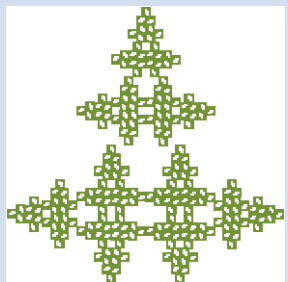
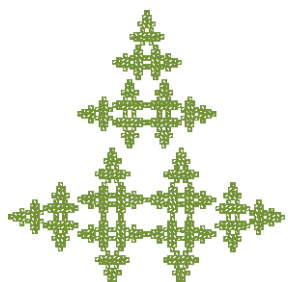
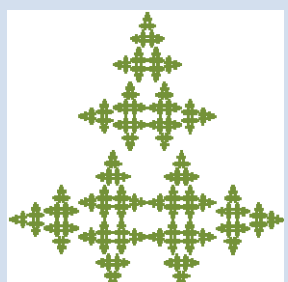
Aquest curiós arbre de Nadal està format per 3 senzilles transformacions de reducció per un factor 1/2 (dos d'elles rotades 90° en sentits contraris):

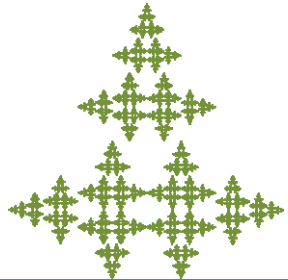
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

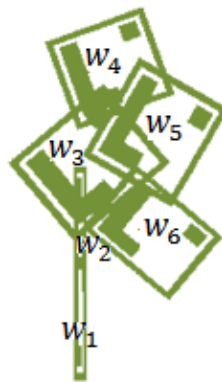
$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Input	Operador	Output
A_{N_0} 	$W(A_{N_0}) = w_1(A_{N_0}) \cup w_2(A_{N_0}) \cup w_3(A_{N_0})$	A_{N_1} 
A_{N_1}	$W(A_{N_1})$	A_{N_2} 

A_{N_2}	$W(A_{N_2})$	A_{N_3} 
A_{N_3}	$W(A_{N_3})$	A_{N_4} 
A_{N_4}	$W(A_{N_4})$	A_{N_5} 
A_{N_5}	$W(A_{N_5})$	A_{N_6} 
A_{N_6}	$W(A_{N_6})$	A_{N_7} 

A_{N_7}	$W(A_{N_7})$	$A_{N_8} \sim A_N$
		

4.4.4.4. ARBRE COMÚ



Aquest arbre és més comú, però no per això menys complex perquè de fet presenta 6 transformacions molt específiques (2 per la tija i 4 per les fulles amb diferents rotacions):

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$




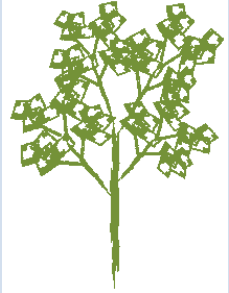
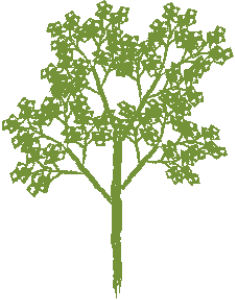
$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

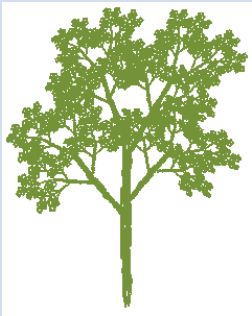
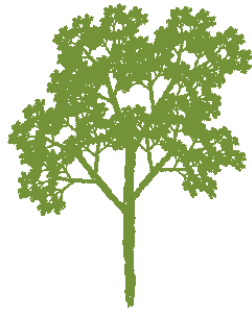
$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & \cos 40^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

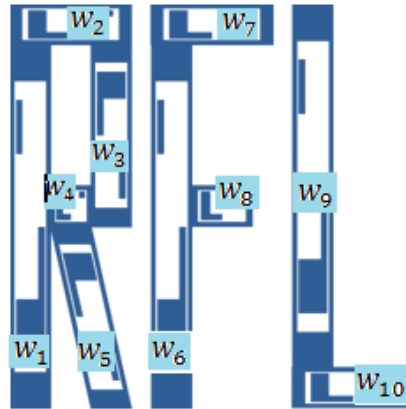
$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

$$w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-40^\circ) & -\sin(-40^\circ) \\ \sin(-40^\circ) & \cos(-40^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Input	Operador	Output
A_{c_0} 	$W(A_{c_0}) = w_1(A_{c_0}) \cup w_2(A_{c_0}) \cup w_3(A_{c_0})$ $\cup w_4(A_{c_0}) \cup w_5(A_{c_0})$ $\cup w_6(A_{c_0})$	A_{c_1} 
A_{c_1}	$W(A_{c_1})$	A_{c_2} 
A_{c_2}	$W(A_{c_2})$	A_{c_3} 
A_{c_3}	$W(A_{c_3})$	A_{c_4} 

A_{c4}	$W(A_{c4})$	A_{c5} 
A_{c5}	$W(A_{c5})$	$A_{c6} \sim A_c$ 



Un cop apres les transformacions a dur a terme per a cada tipus de fractal, tant geomètric, "complex" com natural, podem fer una petita creació aprofitant aquest nous coneixements.

De fet, la idea es fer una mena de fractal "propi", és a dir, amb les inicials pròpies perquè és un bon exercici i molt satisfactori. En el meu cas, he reproduït les lletres de les meves inicials RFL (una de cada color) de forma fractal mitjançant 10 simples transformacions contractives respecte un quadrat inicial:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

$$w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,461 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-77,471^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-77,471^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

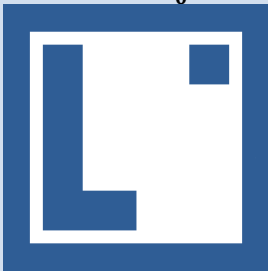
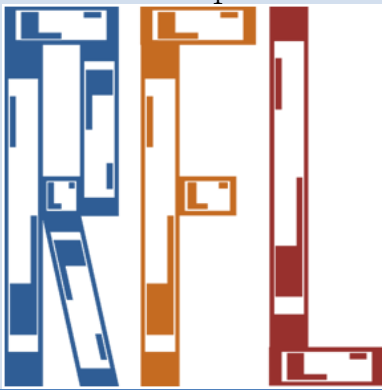
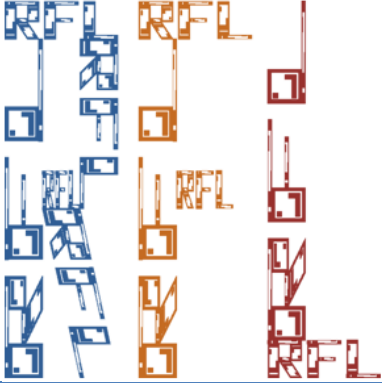
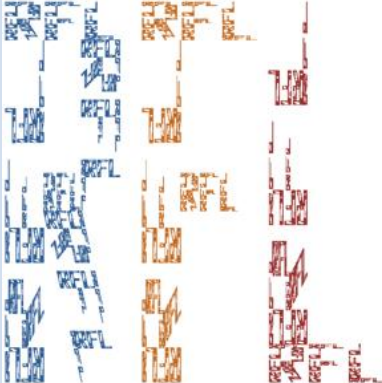
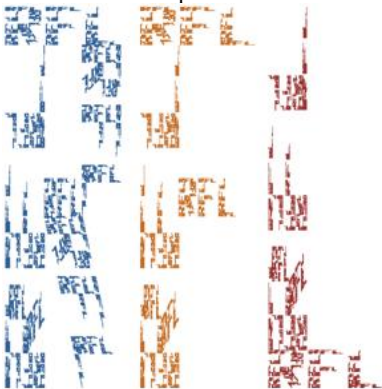
$$w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

$$w_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

$$w_9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$w_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Input	Operator	Output
<p style="text-align: center;">RFL_0</p> 	$W(RFL_0) = w_1(RFL_0) \cup w_2(RFL_0) \cup w_3(RFL_0) \cup w_4(RFL_0) \cup w_5(RFL_0) \cup w_6(RFL_0) \cup w_7(RFL_0) \cup w_8(RFL_0) \cup w_9(RFL_0) \cup w_{10}(RFL_0)$	<p style="text-align: center;">RFL_1</p> 
<p style="text-align: center;">RFL_1</p>	<p style="text-align: center;">$W(RFL_1)$</p>	<p style="text-align: center;">RFL_2</p> 
<p style="text-align: center;">RFL_2</p>	<p style="text-align: center;">$W(RFL_2)$</p>	<p style="text-align: center;">RFL_3</p> 
<p style="text-align: center;">RFL_3</p>	<p style="text-align: center;">$W(RFL_3)$</p>	<p style="text-align: center;">$RFL_4 \sim RFL$</p> 

4.5. EL "JOC DEL CAOS"

En el capítol 2 hem estudiat diferents fractals construïts a partir de raonaments geomètrics, i en el capítol 3 conjunts a partir de certes condicions en el pla complex, però en la secció actual veurem com alguns d'aquests fractals apareixen de forma, a priori, totalment atzarosa, com a resultat de jocs aleatoris.

Un dels més coneguts és el "Joc del Caos" ideat per Michael Barnsley el 1988 per tal d'obtenir com a resultat final un dels fractals més famosos: el triangle de Sierpinski.

4.5.1. JOC DE TAULA PEL TRIANGLE DE SIERPINSKI

PREPARACIONS/TAULER:

El Joc del Caos està orientat per a un jugador i requereix un full de paper, un llapis, un regle mil·limetrat, un dau quotidià i paciència per calcular (o una calculadora per als més mandrosos).

El tauler consisteix en tres punts qualsevol marcats en el full de paper, amb dos números de l'1 al 6 corresponents al dels daus.

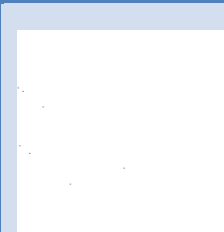
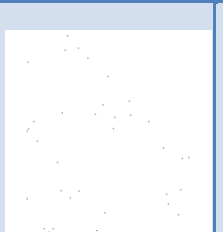
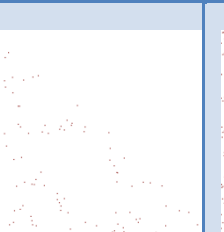
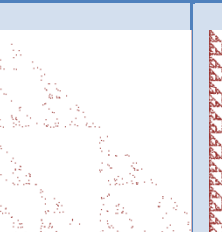
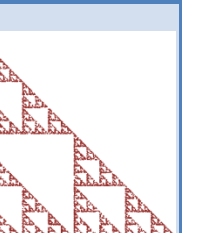
REGLES:

Al començament dibuixem un punt de joc qualsevol al paper que correspondrà a la posició inicial de la fitxa del jugador, la qual deixarà un rastre en forma de punt allà on es col·loqui.

Es comença tirant el dau i el valor obtingut a l'atzar correspon a un dels tres vèrtexs marcats prèviament. A continuació calculem el punt mitjà entre el punt inicial i el vèrtex que ha tocat en la primera tirada, i amb l'ajuda del regle marquem aquest punt, és a dir, movem la nostra fitxa cap a aquest.

Després tornem a tirar el dau i calculem el punt mitjà entre el primer punt marcat i el vèrtex determinat per aquesta segona tirada, desplaçem altre cop la fitxa per tal de deixar pintat un altre punt de la mateixa manera que en el primer llançament.

Lavors repetim i repetim el procés les vegades necessàries per complir correctament l'objectiu del joc en el mínim temps. Si marquéssim els vèrtexs d'un triangle rectangle com a punts a escollir aleatòriament, l'aspecte del tauler de joc després de diverses tirades seria el següent:

Nombre de tirades	10	50	100	500	10.000
Aspecte del tauler					

OBJECTIUS:

Però quin és l'objectiu? L'objectiu del joc és predir el patró resultant dels punts marcats amb el mínim de tirades del dau. Moltes persones que no estan familiaritzades amb el joc conjecturaran que la figura resultant serà una taca aleatòria de punts. Altres prediran que els punts acabaran omplint completament el triangle. Aquestes conjetures són bastant normals per la naturalesa aleatòria del Joc del Caos, però totes dues són totalment falses. La imatge resultant és qualsevol cosa menys una taca aleatòria, ja que amb tota seguretat els punts acabaran definint una figura molt semblant al famós Triangle de Sierpinski.

Un altre objectiu interessant consisteix en el tir al blanc. Si considerem una de les imatges de construcció determinista del triangle de Sierpinski com a diana. Fixem el punt de joc en qualsevol lloc, per exemple un vèrtex i destaquem amb color el triangle de destí com a objectiu final. A continuació, hauríem de fer arribar el nostre punt a l'objectiu en el menor nombre de tirades, seguint les mateixes regles que el joc anterior (tot i que en aquest cas el dau està trucat, és a dir, el nombre escollit és determinat pel jugador en cada moviment). D'aquesta manera podríem acabar trobant l'algoritme més eficient per trobar cada solució, però això ho deixo perquè cadascú s'entretengui amb aquest curiós joc d'estratègia.

PER QUÈ EL TRIANGLE DE SIERPINSKI SORGEIX DEL JOC DEL CAOS?

En principi, aquest fenomen ens pot semblar un petit miracle o una curiosa coincidència, però veurem com no és així i com en tota obra de màgia, podem trobar el truc matemàtic que amaga en la seva impressionant actuació.

En els capítols anteriors hem observat clarament com aplicant IFS determinista a qualsevol imatge inicial P_0 , obtenim una successió d'imatges P_1, P_2, \dots que convergeix a la imatge atractora P_∞ . Sense cap inconvenient podem agafar simplement un punt com a imatge inicial:

$$A_0 = \{z_0\}$$

Si continuem pensant que aquest IFS ve donat per n transformacions contractives, podem descriure la imatge de la primera iteració com un conjunt de punts n :

$$A_1 = \{w_1(z_0), w_2(z_0), \dots, w_n(z_0)\}$$

En la segona obtindrem n^2 punts, i així successivament fins a aconseguir el mateix objectiu que la MRCM però simplement representant punts.

Però aquest mètode és llarg de comptabilitzar i s'utilitza el "Joc del Caos", que en realitat està descrit per un IFS aleatori (com veurem en el següent apartat), ja que ens permet obtenir el mateix resultat però amb molta més eficàcia. De fet, si z_0 es troba dins d'un dels triangles del primer pas de la construcció del triangle de Sierpinski sempre romandrà en el seu interior al llarg de les iteracions aleatòries perquè correspon a aplicar transformacions geomètriques a una figura, que no és més que un conjunt de punts que es desplacen en el pla, mantenint la seva distància o deformant la seva separació vertical o horitzontal. Per tant, el punt viatjarà pels triangles, cada vegada més petits, fins arribar a conjuntar-se amb la imatge atractora, on nosaltres ja no podrem percebre el pas de la seva construcció on es troba situat, podent-lo considerar part d'ell. Sense oblidar que els punts es van duplicant, per tant, acabaríem enviant punts per tot el fractal que conjuntament el representarien perfectament.

Per descomptat, en el cas que comencem amb un punt que no pertanyi al triangle de Sierpinski, aquest s'aproparà arbitràriament a l'atractor fins a no poder apreciar la distància amb ell, per tant, ens proporciona una acurada aproximació de l'atractor sencer. Per millorar aquesta representació, podem ignorar els primers punts que es troben més distants del resultat final.

GENERALITZACIÓ MATEMÀTICA

Partim de 3 punts no alineats qualssevol del pla que anomenarem A , B i C . Marquem un punt qualsevol z_0 a l'interior del triangle que formen i escollim a l'atzar un dels tres punts inicials. En un principi podríem assignar probabilitats diferents als tres punts però com en el cas anterior tots tres tenen la mateixa probabilitat de sortir, és a dir, són equiprobables ($p_A = p_B = p_C = 1/3$).

Una vegada seleccionat z_0 i escollit aleatòriament un dels tres vèrtexs amb la probabilitat establerta, podem definir z_1 com el punt situat a la meitat de distància entre z_0 i el vèrtex elegit. De la mateixa manera, per situar z_2 calcularem el punt a meitat de camí entre z_1 i el vèrtex escollit aleatòriament altre cop.

En general, un cop calculat z_n , per obtenir z_{n+1} simplement hem d'escollir aleatòriament un vèrtex del triangle i marcar z_{n+1} com el punt mig entre z_n i el vèrtex elegit. Aquest procés iteratiu permet definir, per a tot punt inicial z_0 , l'òrbita:

$$\{z_0, z_1, \dots, z_n, \dots\}$$

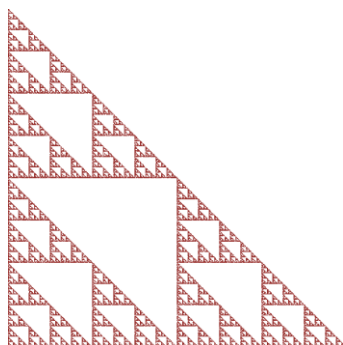
Aquesta successió pot ser descrita de forma compacta com:

$$z_n = f^n(z_0)$$

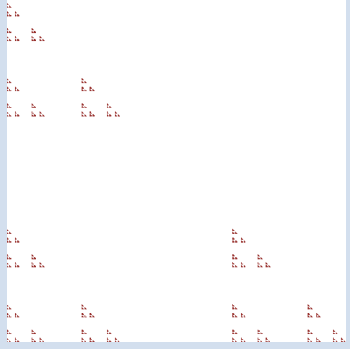
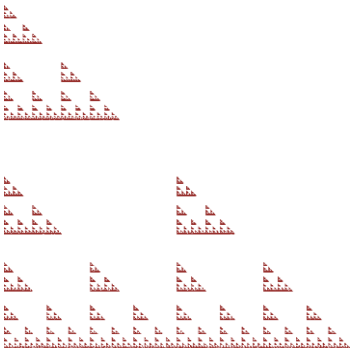
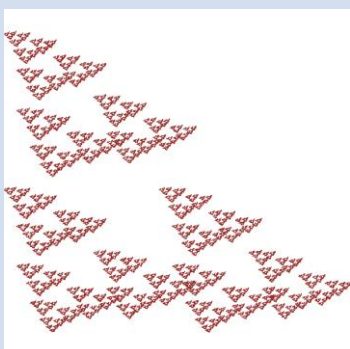
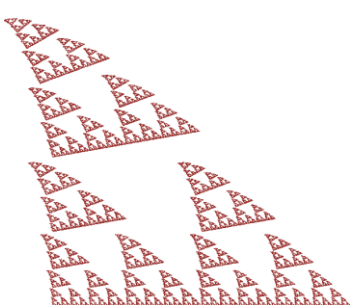
on f representa el mecanisme aleatori explicat anteriorment.

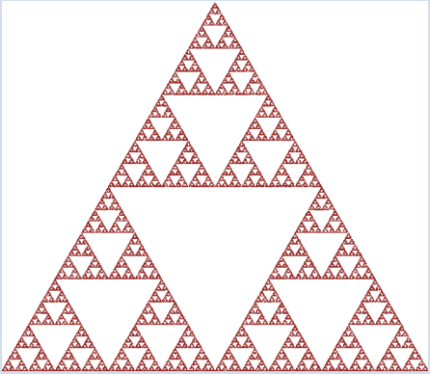
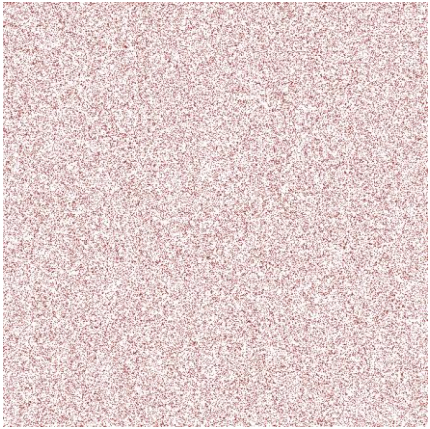
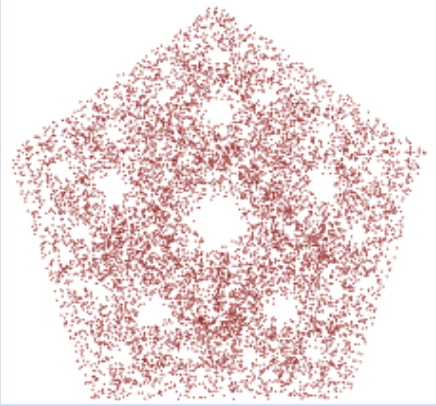
Com sempre, estem interessats en el destí de l'òrbita de z_0 perquè ens permetrà descobrir fractals per camins inversemblants.

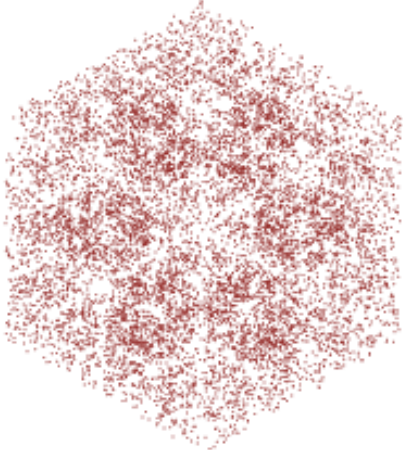
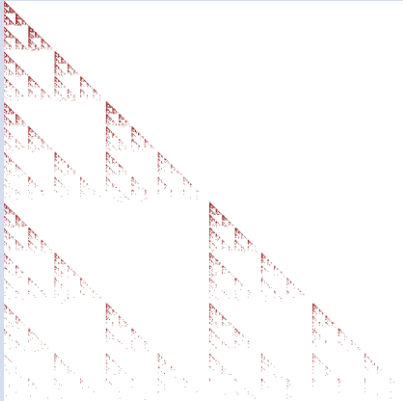
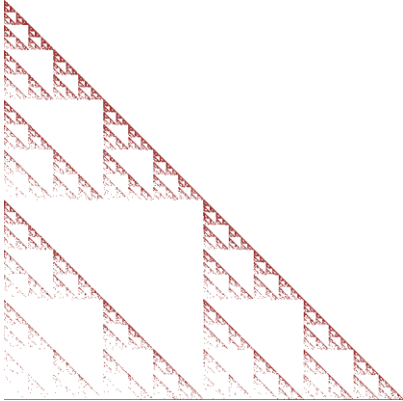
JUGANT AMB EL JOC DEL CAOS



El "Joc del Caos" dóna molt joc per continuar experimentant amb diferents variacions per tal d'obtenir conjunts ben diferents al triangle de Sierpinski. Com presentarem en aquest apartat, les principals modificacions poden ser: canvis o innovacions en les transformacions afins descrites com aplicar rotacions o variar el factor de reducció, tant en l'àmbit general com per cada vèrtex en especial; variacions del nombre i disposició dels vèrtexs inicials que marquen la figura a contraure; o el repartiment desigual de la probabilitat de sortir cada vèrtex en concret.

	Tipus	Resultat (100.000 punts)
Canvis en transformacions	Reducció general: $r_A = r_B = r_C = \frac{1}{3}$	 <p>Es trenca la connexió per l'augment de reducció.</p>
	Reducció específica: $r_A = r_B = \frac{1}{2}$ $r_C = \frac{1}{3}$	 <p>El vèrtex amb més reducció trenca el triangle.</p>
	Rotació general: $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 10^\circ$	 <p>El triangle queda rotat globalment.</p>
	Rotació específica: $\alpha_A = \alpha_B = 0^\circ$ $\alpha_C = 10^\circ$	 <p>El triangle sembla ballar per la rotació superior.</p>

<p>Canvis en vèrtexs inicials (Figura)</p>	<p>Triangle equilàter</p>	 <p>El famós triangle de Sierpinski original.</p>
	<p>Quadrat</p>	 <p>Un quadrat és autosemblant.</p>
	<p>Pentàgon regular</p>	 <p>Els pentàgons petits es sobreposen, però s'intueixen.</p>

	Hexàgon regular	 <p data-bbox="863 741 1318 768">Els hexàgons es tornen a sobreposar més.</p>
Canvis en la probabilitat	<p data-bbox="576 801 675 828">General:</p> $p_A = p_B = \frac{1}{10} = 10\%$ $p_C = \frac{4}{5} = 80\%$	 <p data-bbox="842 1227 1342 1254">Els punts es concentren en el vèrtex superior.</p>
	<p data-bbox="576 1290 675 1317">Específic:</p> $p_A = \frac{1}{10} = 10\%$ $p_B = \frac{3}{10} = 30\%$ $p_C = \frac{3}{5} = 60\%$	 <p data-bbox="815 1715 1369 1774">Els punts tendeixen al costat dels vèrtexs amb més probabilitat.</p>

4.5.2. FRCM (FORTUNE WHEEL REDUCTION COPY MACHINE)

Com hem observat, hi ha moltes variacions del "Joc del Caos" que donen lloc a diferents fractals. De fet, en aquest apartat raonarem com tots els fractals creats amb una MRCM poden ser obtinguts jugant amb les regles adequades.

La norma bàsica del primer "Joc del Caos" és generar un nou punt de joc z_{n+1} com a punt mitjà entre l'últim punt de joc z_n i un dels tres punts de partida escollits per un nombre a l'atzar entre 1 i 6, corresponents a les cares d'un dau quotidià.

Però és important adonar-se que qualsevol nou punt de joc és fruit de realitzar un dels tres possibles desplaçaments associats als tres punts de partida, i en un llenguatge matemàtic parlariem de les tres transformacions w_1 , w_2 i w_3 aplicades aleatòriament a l'últim punt de joc.

Però de quin tipus de transformació parlem? És crucial observar que són les mateixes transformacions afins aplicades al triangle de Sierpinski però sobre un triangle rectangle inicial. Per veure-ho clarament, partirem de la fórmula per trobar un punt mitjà:

$$z_{n+1} = \begin{cases} w_1(z_n) = \left(\frac{x_n}{2}, \frac{y_n}{2}\right) \\ w_2(z_n) = \left(\frac{x_n+1}{2}, \frac{y_n}{2}\right) = \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y_n}{2}\right) \\ w_3(z_n) = \left(\frac{x_n}{2}, \frac{y_n+1}{2}\right) = \left(\frac{x_n}{2}, \frac{y_n}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

De fet, podem escriure les transformacions en forma de matriu per comprovar que són idèntiques als operadors de Hutchinson utilitzades en els IFS:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De fet, es pot comparar perfectament amb les descripcions matemàtiques (IFS) emprades pel sistema de lents de la MRCM. Però el nostre concepte d'una MRCM (o IFS) és estrictament determinista, per tant, hem d'aplicar unes certes modificacions a la nostra primera màquina per tal de reproduir el "Joc del Caos".

Per tal d'obtenir aquesta nova espècie de MRCM aleatòria hem d'imposar tres condicions:

- 1- Emprar la màquina copiadora per iterar punts individuals, en lloc d'imatges senceres.
- 2- Aplicar en cada pas aleatòriament (amb una probabilitat preestablerta) únicament una de les transformacions definides sobre el punt resultant anterior, en lloc de realitzar les tres afinitats alhora.
- 3- Dibuixar tots els punts acumulats, en lloc de substituir cada punt de joc pel seu resultat.

En conseqüència, aquest nou tipus de MRCM aleatòria l'anomenarem la *Roda de la Fortuna de la Màquina Copiadora de Reducció* (en anglès, FRCM per abreviar), la qual ens permetrà executar ràpidament qualsevol "Joc del Caos".

La relació més important entre les dues màquines és que la imatge final d'una MRCM (l'atractor del seu IFS) pot ser igualment generat per la corresponent FRCM, és a dir, jugant al "Joc del Caos" amb un conjunt específic de regles que tenen molt a veure amb les respectives transformacions afins. De fet hem pogut observar aquesta sorprenent coincidència amb l'exemple del Triangle de Sierpinski, però aquest és simplement un cas del potencial d'aquesta innocent regla general.

4.5.3. IFS ALEATORI

Hem estudiat que una MRCM ve determinada per n transformacions contractives:

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

En cada pas, les operacions de còpia de la màquina són descrites per l'operador de Hutchinson:

$$W(P) = w_1(P) \cup w_2(P) \cup \dots \cup w_n(P)$$

Començant amb qualsevol figura inicial P_0 , la seqüència d'imatges generades $P_1 = W(P_0)$, $P_2 = W(P_1)$, ... convergirà a un únic atractor $A = P_\infty$, la imatge final del procés.

Equivalentment, una FRCM ve donada per les mateixes contraccions

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

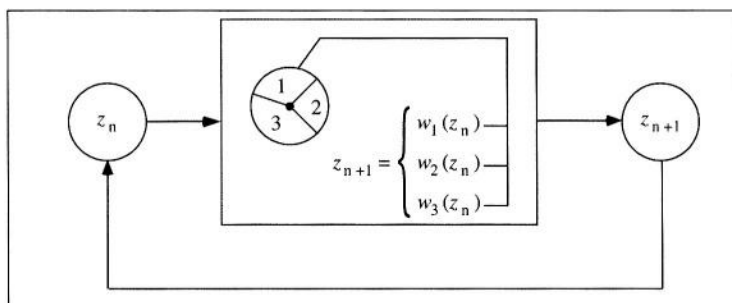
i algunes probabilitats

$$p_1, p_2, \dots, p_n > 0$$

on

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Aquesta configuració en la FRCM s'anomena *Sistema aleatori de Funcions Iterades (Random IFS, en anglès)*, mentre que en la MRCM s'anomena *Sistema de Funcions Iterades determinista (Deterministic IFS, en anglès)*.



En resum, una MRCM i la corresponent FRCM codifiquen la mateixa imatge final $A = P_\infty$, és a dir, podem reproduir l'atractor jugant al "Joc del Caos" amb aquesta interessant maquinària sempre que seguim correctament les regles i tinguem un dau perfecte. Per descomptat, també qualsevol podria trucar el dau, tot i que seria per un bon fi: més eficàcia en quant a temps, com explicarem a continuació.

REPARTIMENT DE PROBABILITATS

A partir de cada transformació tipus

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n$$

Podem definir els factors de contracció d'àrea en cada cas, corresponents a la determinant de la matriu en qüestió, és a dir, la part lineal de dita transformació afí:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} = a_i \cdot d_i - b_i \cdot c_i$$

I a continuació definim les probabilitats P_i basant-nos en l'àrea corresponent:

$$D = |D_1| + |D_2| + \dots + |D_n|$$

$$p_i = \frac{|D_i|}{D}, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Per atractors autosemblants formats per peces de la mateixa àrea, totes les probabilitats p_i són iguals, és a dir, equiprobables. En canvi si la composició de la figura consta d'àrees amb diferents valors



corresponents a la seva transformació, és aconsellable aplicar aquest repartiment de probabilitats per tal d'obtenir el resultat desitjat amb major eficàcia gràcies a una distribució equilibrada dels punts en funció de la grandària de les peces a omplir aleatòriament. Aquest repartiment es pot comparar amb el nombre de cares del dau escollit i la pròpia assignació a cada transformació.

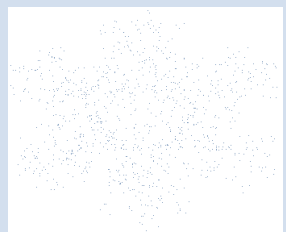
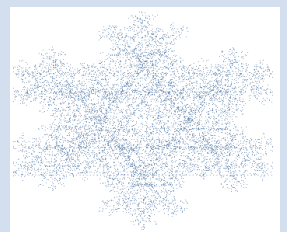
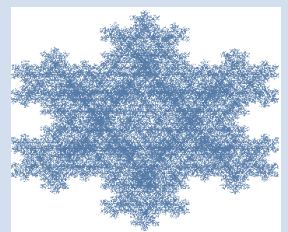

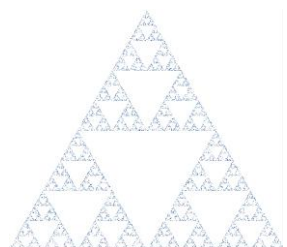
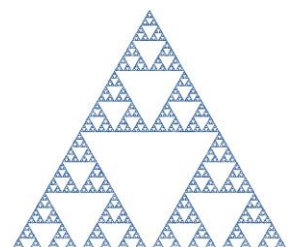
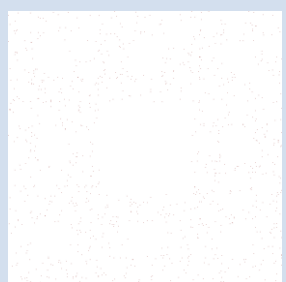
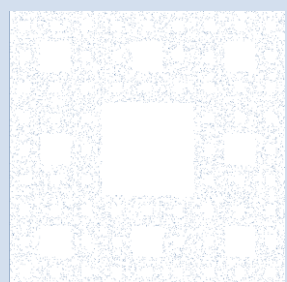
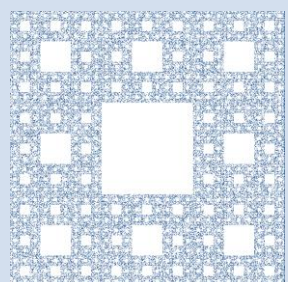
4.5.4. FRACTALS IFS "ALEATORIS"

En aquest apartat presentarem els mateixos fractals estudiats i creats amb IFS, però de forma aleatòria com si juguéssim amb el caos. De la mateixa manera, presentarem una taula per cada tipus de fractals per tal de veure com varia segons el nombre de punts (tirades de dau) i sorprenentment (tot i que matemàticament previsible) arribem al mateix resultat!


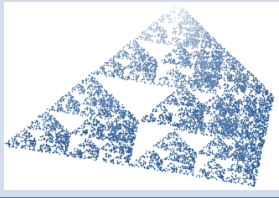


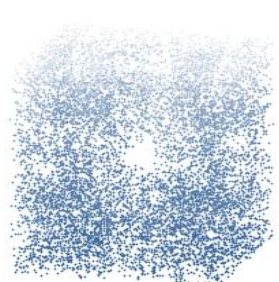
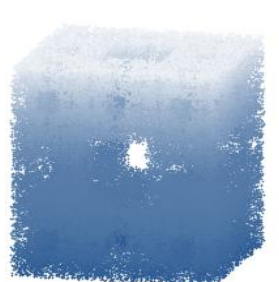
També equilibrarem les probabilitats de cada transformació, allà on faci falta per tal d'obtenir més eficàcia.

FRACTALS GEOMÈTRICS 2D




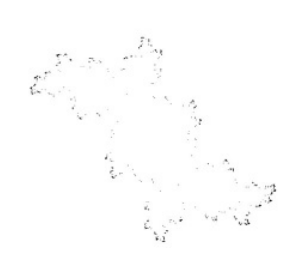
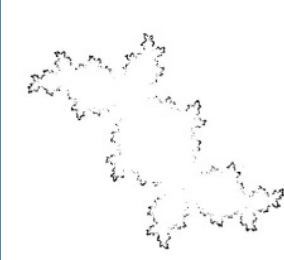
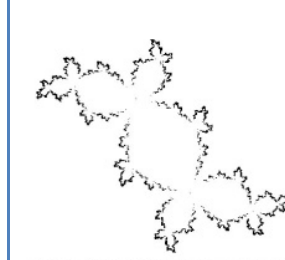
Fractal	Probabilitats	Resultat (1.000 punts)	Resultat (10.000 punts)	Resultat (100.000 punts)
Conjunt de Cantor	Equiprobable			
Corba de Koch	Equiprobable			

Floc de Neu de Koch	Equiprobable			
Triangle de Sierpinski	Equiprobable			
Catifa de Sierpinski	Equiprobable			

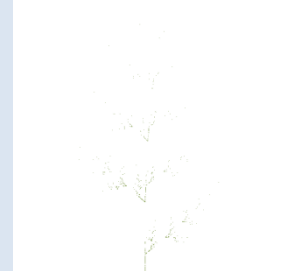





FRACTALS GEOMÈTRICS 3D

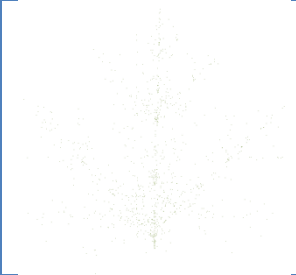
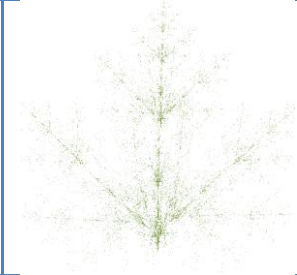
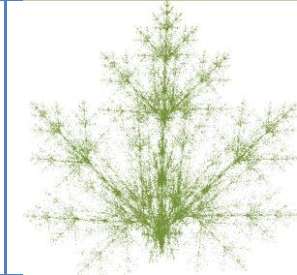

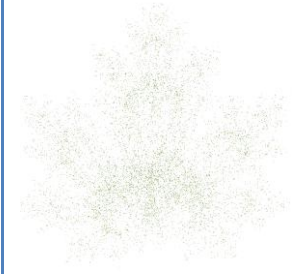
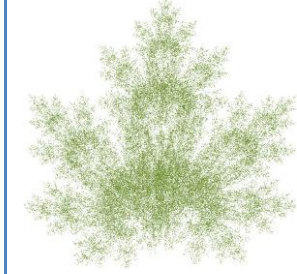

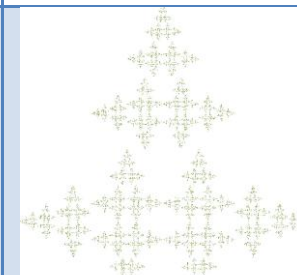
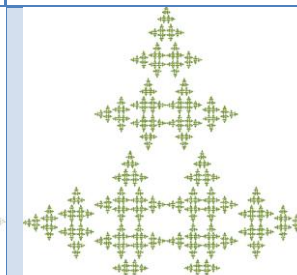
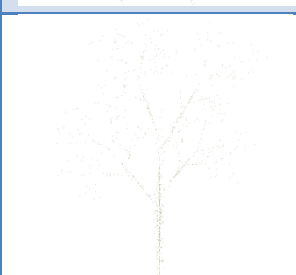
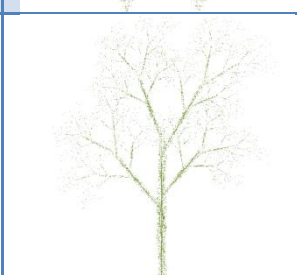
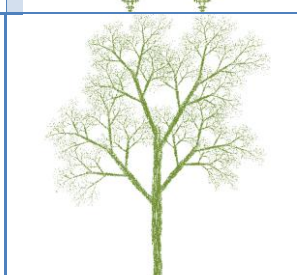

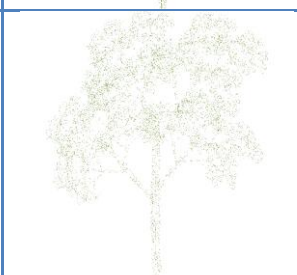
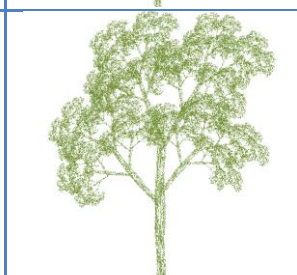
Fractal	Probabilitat	Resultat (1.000 punts)	Resultat (10.000 punts)	Resultat (100.000 punts)
Tetraedre de Sierpinski	Equiprobable			
Esponja de Menger	Equiprobable			

FRACTALS "COMPLEXOS"


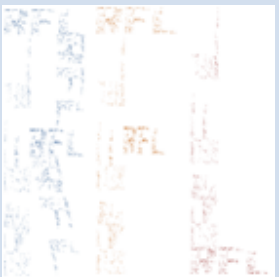
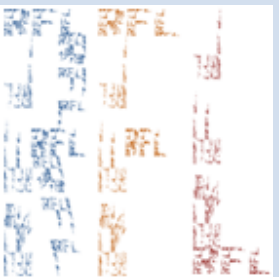


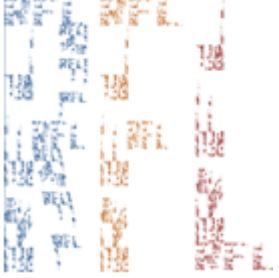
Fractal	Probabilitat	Resultat (1.000 punts)	Resultat (10.000 punts)	Resultat (100.000 punts)
Pseudo-Mandelbrot	Equiprobable			
Conjunt de Julia (IIM)	Equiprobable			

FRACTALS NATURALS

Fractal	Probabilitat	Resultat (1.000 punts)	Resultat (10.000 punts)	Resultat (100.000 punts)
Falguera de Barnsley	Equiprobable			
	Equilibrada: $p_1 = 0,01 = 1\%$ $p_2 = 0,765 = 76,5\%$ $p_3 = 0,108 = 10,8\%$ $p_4 = 0,117 = 11,7\%$			

Fulla d'auró	Equiprobable			
	Equilibrada $p_1 = 0,062 = 6,2\%$ $p_2 = 0,367 = 36,7\%$ $p_3 = 0,367 = 36,7\%$ $p_4 = 0,205 = 20,5\%$			
Arbre de Nadal	Equiprobable			
Arbre comú	Equiprobable			
	Equilibrada: $p_1 = 0,028 = 2,8\%$ $p_2 = 0,023 = 2,3\%$ $p_3 = 0,279 = 27,9\%$ $p_4 = 0,209 = 20,9\%$ $p_5 = 0,256 = 25,6\%$ $p_6 = 0,205 = 20,5\%$			

FRACTAL RLF

Fractal	Probabilitat	Resultat (1.000 punts)	Resultat (10.000 punts)	Resultat (100.000 punts)
RFL	Equiprobable			
	Equilibrada: $p_1 = 0,189 = 18,9\%$ $p_2 = 0,063 = 6,3\%$ $p_3 = 0,074 = 7,4\%$ $p_4 = 0,042 = 4,2\%$ $p_5 = 0,097 = 9,7\%$ $p_6 = 0,189 = 18,9\%$ $p_7 = 0,063 = 6,3\%$ $p_8 = 0,032 = 3,2\%$ $p_9 = 0,189 = 18,9\%$ $p_{10} = 0,209 = 20,9\%$			

Tots aquest fractals resultants del "Joc del Caos" es poden programar de forma senzilla i eficient, simplement basant-nos en el IFS aleatori que el genera.

De fet en el primer annex, adjunto uns programes de creació pròpia en C que expliquen detalladament el procés portat a terme en cada línia de comanda, tant de fractals geomètrics com naturals, a l'igual que repartiments equiprobables o equilibrats de les probabilitats de cada transformació.

Aquesta guia ens permet obrir la ment a jugar amb les equacions de cada sistema per tal de reproduir bones figures fractals amb la potent ajuda del GNUPLOT com també s'explica en el mateix apèndix.

5. CONCLUSIONS I VALORACIÓ

Penso que la geometria fractal m'ha canviat la visió de les coses, tal com advertia Barnsley.

De fet he observat com aquest nou llenguatge matemàtic fractal ens permet estudiar millor les formes capritxoses de la natura. Al mateix temps he pogut discernir la seva relació amb el món real i adonar-me de les múltiples aplicacions i formes fractals que ens envolten a tot arreu des dels nostres orígens, i la veritat és que aquestes són més útils del que em pensava.

En quant al cos del treball em vaig centrar en fer una bona anàlisi dels fractals, tant reals com complexos, per tal de conèixer bé la seva construcció i la causa de les seves impressionants imatges que m'han fet veure el poder d'abstracció dels matemàtics anteriors en aquest àmbit.

Un cop realitzada la recerca enciclopèdica, vaig decidir desenvolupar un capítol com a orientació per la programació, i vaig pensar en els IFS. En un principi vaig experimentar amb l'innocent "Joc del Caos" i a partir de la meua hipòtesi i conclusions vaig observar que aquest processos aparentment estocàstics o màgics sempre amaguen una curiosa part matemàtica. De fet l'aprofundiment en aquesta peculiaritat em va portar a fer una petita introducció definint un sistema de funcions iterades amb tota la informació necessària per idear molts tipus de fractals, tant geomètrics en 2D o 3D, complexos, naturals i fins i tot aportar alguna petita creació senzilla però satisfactòria com les meves pròpies inicials (RFL) fractals!

Pel desenvolupament del treball he hagut d'aprendre conceptes i operacions matemàtiques completament nous, com les matrius i progressions geomètriques, a més d'aprofundir en temes varis com els límits o els nombres complexos. Crec que aquest aprenentatge autodidàctic m'ha suposat un gran esforç però els coneixements assolits han valgut la pena.

Un altre aprenentatge important ha estat la programació en C que m'ha servit per familiaritzar-me amb les seves comandes i funcions, i que em serà de gran profit en el meu futur universitari. La veritat és que ha estat una feina curiosa i de molta dedicació perquè començava des de zero i he hagut d'espavillar-me com he pogut, però el resultat ha estat satisfactori. Anàlogament he après com utilitzar un programa gràfic molt útil com el GNUPLOT que m'ha permès representar ràpidament els meus propis fractals, prèviament calculats en C.

Al llarg del treball, també he pogut comprovar que les coses no sempre surten com un les planifica, ja que havia previst fer un treball de camp relacionat amb les antenes fractals amb l'empresa "Fractus S.A.", i al final no vaig poder aconseguir la visita ni l'entrevista buscades. Anecdòticament vaig preparar un experiment químic com l'electròlisi a l'institut, tot i que els resultats s'allunyaven molt de la forma fractal esperada.

Malgrat aquests inconvenients, he trobat disposició i interès dels professors i professionals en aconsellar-me pel bé del treball i del meu propi futur, ja sigui via correu electrònic o personalment. De fet gràcies a aquests contactes, he pogut conèixer noves persones que gaudeixen de la seva professió, tant matemàtica com computacional, i la transmeten gustosament a estudiants curiosos com jo que s'interessen per aquests temes, de vegades poc treballats a l'institut. En especial m'ha fet molta il·lusió conèixer a una persona molt entesa en el fractals i en complexos, amb qui he pogut compartir els meus dubtes i conèixer la seva valuosa opinió amb una entrevista molt treballada.

Per descomptat, el treball de recerca ha estat una experiència molt profitosa encara que molt laboriosa perquè m'he afrontat per primera vegada a una obra pròpia d'aquestes dimensions des de principis de juliol amb la difícil decisió d'escollir un tema per sobre de molts altres, valorant els possibles avantatges i inconvenients, i totes les preocupacions que sorgeixen fins la presentació concloent. En aquest període he compaginat amb intensitat el temari fractal amb les assignatures de l'institut, cosa que m'ha obligat a planificar-me el temps. A més he volgut posar bonic el treball amb il·lustracions, taules, formats, correccions i resums constants, feines més allunyades de la teoria però necessàries.

Tanmateix m'he adonat de que encara hi ha molta feina a explorar en l'àmbit fractal i imagino que la millor època d'aquesta geometria encara està per desenvolupar, i espero tenir l'oportunitat de conèixer-la de primera mà.

En resum, aquest gran canvi m'ha obert la ment a nous pensaments i raonaments matemàtics diferents als de l'institut, i alhora m'ha ajudat a aclarir-me sobre el meu futur acadèmic, on les matemàtiques crec que tindran un paper important.

6. ANNEXOS

6.1. PROGRAMES EN C AMB L'AJUDA DEL GNUPLOT

En aquest annex adjunto tres tipus bàsics de programes, com a resultat de totes les proves que he realitzat al llarg del treball, que permeten veure les principals diferències a l'hora de representar fractals geomètrics 2D, 3D o naturals, per tal de poder dibuixar tranquil·lament qualsevol altre fractal que desitgem.

Aquest apartat de programació es centra en la teoria del capítol 4 sobre els IFS i el "Joc del Caos".

PROGRAMACIÓ EN C

El principal motiu pel qual he treballat amb llenguatge i tècniques de programació ha estat per utilitzar l'ordinador com una eina i resoldre problemes en C. El mètode per solucionar-los ha consistit en el típic de tot programador: definir i analitzar el problema, dissenyar l'algoritme, codificar-lo, executar-lo i corregir el programa tants cops com calgui.

En el meu cas concret, he elegit el llenguatge C per les seves útils característiques que m'ha proporcionat una potent eina amb la qual elaborar programes amb poques instruccions que aprofitin bé els recursos de l'ordinador i en treguin el seu màxim benefici. De fet és el llenguatge que s'utilitza per programar en la Universitat, altra raó per la qual em vaig decantar per familiaritzar-me amb el C pel meu compte com a preliminar universitari, a més que m'obriria un gran ventall de possibilitats.

El meu compilador és el DEV-C++ 4.9.9.2.

GNUPLOT

També he descobert el GNUPLOT, un potent programa gràfic en línia de comandes que em permet representar funcions en 2 o 3 dimensions a partir de fórmules definides, així com dibuixar gràfics usant una taula de coordenades, en format de text, creades per qualsevol altre programa.

De fet he fet servir aquest interessant programa gràfic per traçar una sèrie de punts prèviament calculats en C per aprofitar el seu potencial visual en pantalla, i no complicar el programa en C amb la seva aplicació a objectes que he preferit deixar per més endavant amb més tranquil·litat i coneixements en el tema.

La versió del GNUPLOT utilitzada és la 4.4.

FRACTALS PROGRAMATS EN C AMB L'AJUDA DEL GNUPLOT

Principalment la idea d'aquesta combinació és utilitzar la potència de càlcul de la programació en C i la potència de gràfic del GNUPLOT, tant en 2D com 3D amb diferents paletes de colors.

En els programes en C, presento els [comentaris en blau](#), les [lliberies i directius en verd](#) i el [text en vermell](#) per fer més visual la seva lectura.

D'altra banda, exposo les [comandes de GNUPLOT en blau marí](#) amb les anotacions oportunes.

TRIANGLE DE SIERPINSKI EN C

Model de programació en C pel càlcul dels punts del "Joc del Caos" o IFS aleatori amb comentaris propis sobre cada nova funció i comanda per poder-lo seguir sense dificultats:

```
/*
  Autor: Robert Florido Llinàs
  Programa: Fractals: Triangle de Sierpinski
*/

#include <stdio.h> //Llibreria de funcions entrada/sortida estàndard (com printf)
#include <math.h> //Llibreria de funcions matemàtiques (com sqrt)
#include <stdlib.h> //Llibreria de funcions de la biblioteca estàndard (com rand)

#define n 100000 //Definim la constant n amb el valor 100000

int main(void) //Declarem la funció principal del programa
{
  int i, k; //Declarem variables enteres (i, k)
  double x, y; //Declaram variables fraccionàries (x, y), amb decimals

  srand((unsigned)time(NULL)); //Funció per assegurar nombres aleatoris en cada execució

  FILE *pf; //Obrim un flux de fitxer
  pf = fopen("Triangle de Sierpinski.txt", "w"); //Nom del fitxer
  //Mode d'opertura "w" per gravar al fitxer

  if(pf == NULL) //En cas d'haver un problema amb el fitxer, ens donarà NULL
  {
    printf("No es pot obrir el fitxer"); //Imprimir en pantalla el text d'error
    exit(1); //Sortim del programa
  }

  x = 0.5;
  y = 0.5;
  /*
  Escrivim un punt inicial qualsevol pel nostre "Joc del Caos"
  */

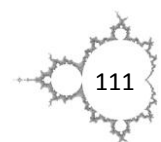
  printf("# n \t x \t y\n"); //Imprimim en pantalla les 3 capçaleres (n, x, y) encolumnades
  printf("0 \t %+0.8le \t %+0.8le\n", x, y); //Visualitzem en pantalla les coordenades inicials,
  // amb 8 decimals de precisió

  for(k=1; k<=n; k++) //Realitzem un cicle -bucle- fins que el valor de k sigui n
  {
    i = rand () % 6 + 1; //Generem un nombre aleatori entre 1 i 6, com si fos un dau

    if (i==1 || i==2) //Sentència condicional si el valor i és igual a 1 o 2
    {
      x = x/2;
      y = y/2;
      /*
      Escrivim les equacions de la 1a transformació
      */
    }
    if (i==3 || i==4) //Sentència condicional si el valor i és igual a 3 o 4
    {
      x = (x + 1)/2;
      y = y/2;
      /*
      Escrivim les equacions de la 2a transformació
      */
    }
    if (i==5 || i==6) //Sentència condicional si el valor i és igual a 5 o 6
    {
      x = (2*x + 1)/4 ;
      y = (2*y + sqrt(3.0))/4; //sqrt(3.0): Arrel d'un nombre de tipus float
      /*
      Escrivim les equacions de la 3a transformació
      */
    }

    printf ("%d \t %+0.8le \t %+0.8le\n", k, x, y); //Imprimim en pantalla les coordenades en cada pas

    if(k>100) //Sentència condicional si k és més gran que 100
    {
      fprintf (pf, "%d \t %+.8le \t %+.8le\n", k, x, y); //Gravem les dades de coordenades en cada pas
      //en el flux del fitxer pf
    }
  }
  fclose(pf); //Tanquem el flux del fitxer perquè les dades quedin guardades
  return 0; //El programa finalitza i sortim de la funció principal
}
```



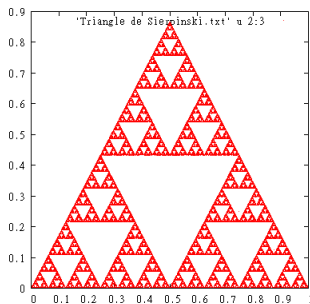
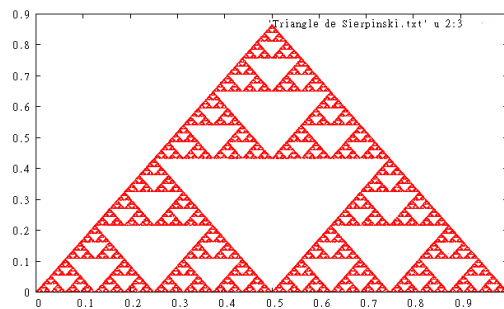
TRIANGLE DE SIERPINSKI EN GNPLOT

El GNPLOT utilitza comandes intuïtives que aniré presentant en aquest capítol com:

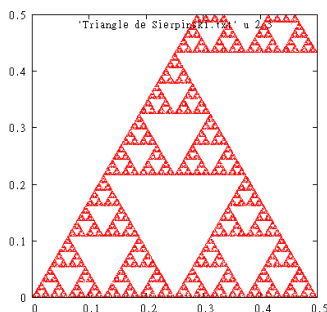
`gnuplot> cd 'C:\Dev-Cpp\Robert-Fractals'` //Escollim el directori (`cd`) on es troba el fitxer amb la taula de punts per tal de representar en el pla com el següent.

k	x	y
101	+6.91183363e-001	+2.76991799e-001
102	+5.95591682e-001	+5.71508601e-001
103	+2.97795841e-001	+2.85754301e-001
104	+6.48897920e-001	+1.42877150e-001
105	+3.24448960e-001	+7.14385751e-002
106	+6.62224480e-001	+3.57192876e-002
107	+3.31112240e-001	+1.78596438e-002
108	+4.15556120e-001	+4.41942524e-001
109	+4.57778060e-001	+6.53983964e-001
110	+2.28889030e-001	+3.26991982e-001

`gnuplot> plot 'Triangle de Sierpinski.txt' u 2:3 w d //Dibuixem (plot) el fitxer de text indicant el 'nom de fitxer.txt', usant (u=using) la columna 2 com a coordenada X i la 3 com a coordenada Y de cada punt de la taula, representat gràficament amb (w=with) punts ínfims (d=dots).`



`gnuplot> set size square` //Definim la grandària (`size`) del dibuix. En aquest cas, quadrada per no deformar la imatge resultant.



`gnuplot> set xrange [0:0.5]` //Definim l'interval de l'eix d'abscisses (`xrange`) entre 0 i 0,5.

`gnuplot> set yrange [0:0.5]` //Definim també l'interval de l'eix d'ordenades (`yrange`) entre 0 i 0,5 de la mateixa manera.

El resultat engloba la zona del pla escollida, cosa que ens permet visualitzar perfectament l'autosimilitud del fractal.

TETRAEDRE DE SIERPINSKI EN C

Un exemple de programació en C d'un fractal 3D amb l'ús de 3 coordenades (x, y, z):

```
/*
  Autor: Robert Florido Llinàs
  Programa: Fractals: Tetraedre de Sierpinski
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

#define n 100000

int main(void)
{
    int i, k;
    double x, y, z; //Declarem 3 variables (x, y, z) amb decimals

    srand((unsigned)time(NULL));

    FILE *pf;
    pf = fopen("Tetraedre de Sierpinski.txt","w");
    if(pf == NULL)
    {
        printf("No es pot obrir el fitxer");
        exit(1);
    }

    x = 0.5;
    y = 0.5;
    z = 0.5;
    /*
     *Escrivim un punt inicial de l'espai qualsevol pel nostre "Joc del Caos"
     */

    for(k=1; k<=n; k++)
    {
        i = rand () % 8 + 1; //Generem un nombre aleatori entre 1 i 8, com si fos un dau octaèdric

        if (i==1||i==2)
        {
            x = x/2;
            y = y/2;
            z = z/2;
            /*
             *Escrivim les equacions de la 1a transformació
             */
        }
        if (i==3||i==4)
        {
            x = (x + 1)/2;
            y = y/2;
            z = z/2;
            /*
             *Escrivim les equacions de la 2a transformació
             */
        }
        if (i==5||i==6)
        {
            x = (2*x + 1)/4;
            y = y/2;
            z = (2*z + sqrt(3))/4;
            /*
             *Escrivim les equacions de la 3a transformació
             */
        }
        if (i==7||i==8)
        {
            x = (2*x + 1)/4;
            y = (3*y + sqrt(6))/6;
            z = (6*z + sqrt(3))/12;
            /*
             *Escrivim les equacions de la 4a transformació
             */
        }

        if(k>100)
        {
            fprintf (pf, "%d \t %.8le \t %.8le \t %.8le \n", k, x, y, z); //Gravem en el fitxer el valor
                                                                    // de les 3 coordenades en cada pas
        }
    }
    fclose(pf);
    return 0;
}
```

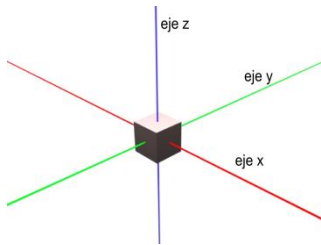
TETRAEDRE DE SIERPINSKI EN GNUPLOT

El GNUPLOT també és una bona eina per representar figures en 3D:

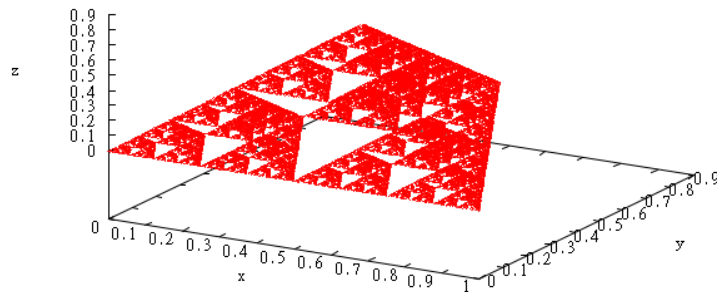
```
gnuplot> cd 'C:\Dev-Cpp\Robert-Fractals'
```

k	x	y	Z
101	+5.48145439e-001	+4.28292437e-006	+7.61320042e-002
102	+2.74072720e-001	+2.14146218e-006	+3.80660021e-002
103	+1.37036360e-001	+1.07073109e-006	+1.90330011e-002
104	+3.18518180e-001	+5.35365546e-007	+4.42529202e-001
105	+4.09259090e-001	+4.08248558e-001	+3.65602169e-001
106	+4.54629545e-001	+2.04124279e-001	+6.15813786e-001
107	+2.27314772e-001	+1.02062140e-001	+3.07906893e-001
108	+1.13657386e-001	+5.10310698e-002	+1.53953447e-001
109	+5.56828693e-001	+2.55155349e-002	+7.69767233e-002
110	+5.28414347e-001	+1.27577674e-002	+4.71501064e-001

```
gnuplot> splot 'Tetraedre de Sierpinski.txt' u 2:4:3 w d //Dibuixem en 3D (splot) el fitxer de text indicant el 'nom de fitxer.txt' com l'adjunt a sobre, usant la columna 2 com a coordenada X, la columna 3 com a coordenada Y i la columna 4 com a coordenada Z de cada punt de la taula, representat gràficament com a punts ínfims. És important saber que el GNUPLOT es basa en un eix de coordenades diferent al descrit en el treball per realitzar les equacions com es mostra a la figura del costat, on s'intercanvien l'eix Y i Z, per tant, usant 2:4:3.
```

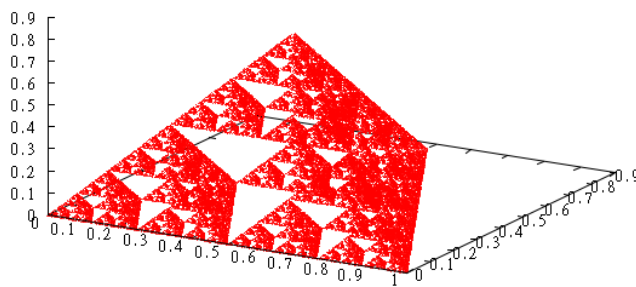


```
'Tetraedre de Sierpinski.txt' u 2:4:3
```



```
gnuplot> set ticslevel 0 //Ajustem l'altura de l'eix Z a 0 (origen de coordenades), és a dir, el fem coincidir amb el pla xy.
```

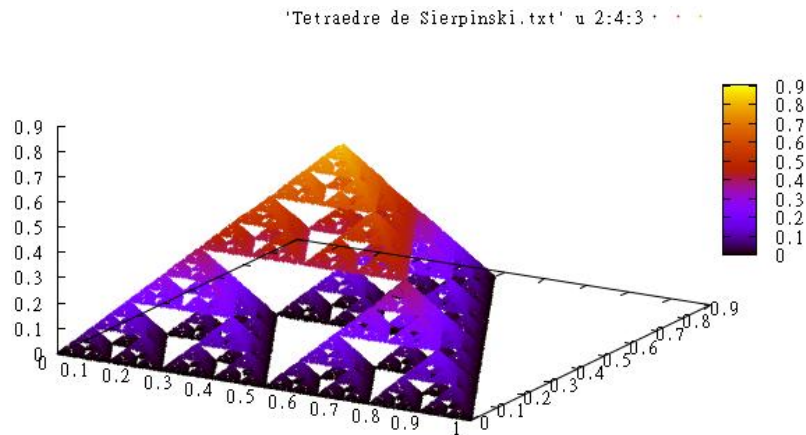
```
'Tetraedre de Sierpinski.txt' u 2:4:3
```



`gnuplot> set pm3d` //Activem el paquet *pm3d* que ens permet acolorar els punts pel valor de la seva altura (eix Z).

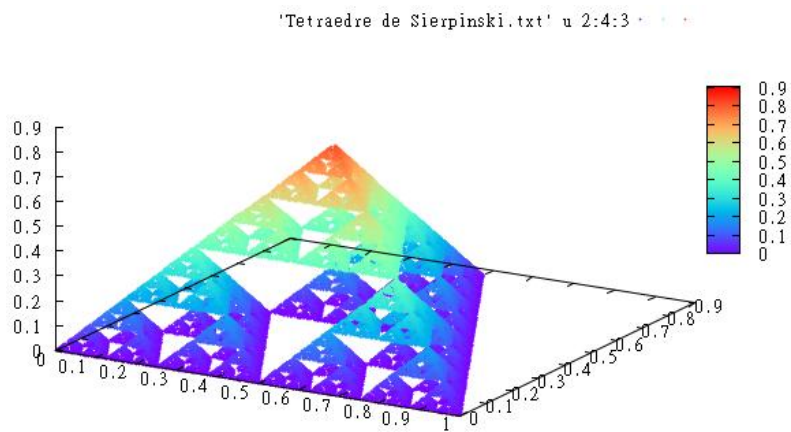
`gnuplot> splot 'Tetraedre de Sierpinski.txt' u 2:4:3 w p palette ps 0.1` //Dibuixem en 3D (*splot*) el mateix fitxer de text en els eixos de coordenades. Però utilitzem una paleta (*palette*) predeterminada per acolorir els punts (*p=points*) de grandària (*ps=pointsize*) molt petita (*ps 0.1*), com si fos un ínfim punt farcit.

`gnuplot> set hidden3d` //Definim una representació més opaca per apreciar millor l'efecte 3d.



`gnuplot> set palette rgb 33, 13, 10` //Definim la *paleta rainbow* (colors de l'arc iris) amb una escala degradada de diferents colors (*rgb*): blau, verd, groc, vermell.

`gnuplot> replot` //Tornar a dibuixar-lo.



De fet podríem continuar jugant amb els colors, el punt de visió i la gradació per obtenir gràfics 3D molt sorprenents.

FALGUERA DE BARNSELY EN C

Un important exemple que hem d'utilitzar per fractals que comportin alguna rotació o repartiment de probabilitats, mitjançant l'assignació diferent de variable i repartint equilibradament les probabilitats, ja que en cada sentència hem de rotar les coordenades del mateix punt de manera recursiva:

$$x = ax_n + by_n + e$$

$$y = cx_n + dy_n + f$$

```
/*
  Autor: Robert Florido Llinàs
  Programa: Fractals: Falguera de Barnsley
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define n 100000

int main(void)
{
  int i, k;
  double x, xn, y, yn; //Declarem les variables input (xn, yn) i output (x, y)

  srand((unsigned)time(NULL));

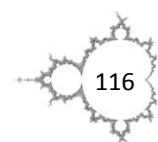
  FILE *pf;
  pf = fopen("Falguera de Barnsley.txt","w");
  if(pf == NULL)
  {
    printf("No es pot obrir el fitxer");
    exit(1);
  }

  xn = 0.5;
  yn = 0.5;
  /*
  Escriuim un punt inicial qualsevol com a input pel nostre "Joc del Caos"
  */

  for(k=1; k<=n; k++)
  {
    i = rand () % 100 + 1; //Generem un nombre aleatori entre 1 i 100, com si fos un dau zocchieder

    if (i<=77) //Sentència condicional si el valor "i" és més petit o igual que 77
    { //Probabilitat = 77%
      x = 0.85*xn + 0.04*yn;
      y = -0.04*xn + 0.85*yn + 1.6;
      /*
      Escriuim les equacions de la 2a transformació (fulla principal)
      */
    }
    if (i>77 && i<=88) //Sentència condicional si el valor "i" és més gran que 77 i més petit o igual a 88
    { //Probabilitat = 11%
      x = 0.2*xn - 0.26*yn;
      y = 0.23*xn + 0.22*yn +1.6;
      /*
      Escriuim les equacions de la 3a transformació (fulla dreta)
      */
    }
    if (i>88 && i<=99) //Sentència condicional si el valor "i" és més gran que 88 i més petit o igual a 99
    { //Probabilitat = 11%
      x = -0.15*xn + 0.28*yn;
      y = 0.26*xn + 0.24*yn + 0.44;
      /*
      Escriuim les equacions de la 4a transformació (fulla esquerra)
      */
    }
    if (i==100) //Sentència condicional si el valor "i" és igual a 100
    { //Probabilitat = 1%
      x = 0;
      y = 0.16*yn;
      /*
      Escriuim les equacions de la 1a transformació (tija)
      */
    }
    if(k>100)
    {
      fprintf (pf, "%d \t %+.81e \t %+.81e\n", k, x, y);
    }

    xn = x;
    yn = y;
    /*
    Assignem els valors output (x, y) com a input (xn, yn) pel següent pas del bucle
    */
  }
  fclose(pf);
  return 0;
}
```

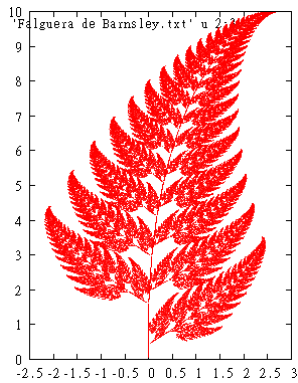
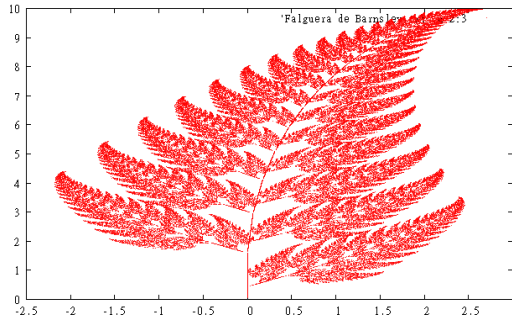


FALGUERA DE BARNSELEY EN GNUPLOT

Per tant, també podem dibuixar els fractals naturals en el GNUPLOT:

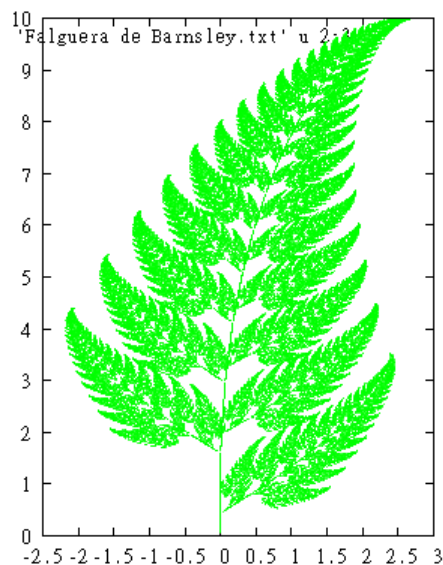
```
gnuplot> cd 'C:\Dev-Cpp\Robert-Fractals'
```

```
gnuplot> plot 'Falguera de Barnsley.txt' u 2:3 w d
```



```
gnuplot> set size 0.5, 1 //Definim la grandària (size) del dibuix. En aquest cas, per equilibrar el dibuix l'altura és el doble de l'amplada per tal de mantenir la proporcionalitat entre els eixos X i Y.
```

```
gnuplot> plot 'Falguera de Barnsley.txt' u 2:3 w d lc rgb 'green' //Dibuixem altre cop la falguera de Barnsley, però amb un color (lc=linecolor) dels punts que sigui verd (en aquests casos es pot escriure directament el seu nom en anglès green, en lloc de la seva notació rgb corresponent).
```



El resultat també és una molt bona aproximació gràcies al color verd. Amb tots aquests aprenentatges podem programar pel nostre compte tots els altres fractals naturals i molt més!

6.2. ENTREVISTA A LA DRA. NÚRIA FAGELLA

A continuació adjunto l'entrevista que em va concedir molt amablement la Dra. Núria Fagella, professora titular del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona. Totes les seves respostes i coneixements m'han estat de gran profit pels objectius del meu treball de recerca.

1. Per què va decidir doctorar-se en matemàtiques amb una tesi en dinàmica complexa? Els fractals van tenir alguna importància en aquesta decisió?

Aquesta decisió va venir tard. Els fractals eren atractius i fan que aquesta àrea de les matemàtiques sigui visual i atractiva.

2. D'on neix el seu interès pel món fractal? Em podria explicar alguna experiència, anècdota o moment en que aquesta nova manera de veure el món li va captivar, i quina va ser la causa principal de la posterior dedicació al tema?

Vaig aprendre sobre fractals quan ja estava als Estats Units, de la mà del que després seria el meu director de tesi. Ell feia xerrades per alumnes de secundària i jo ajudava. Allà vaig començar a trobar aquest món fascinant.

3. En quant a l'àmbit teòric, com definiria de forma general i divulgativa la geometria fractal? Hi ha moltes definicions sobre els fractals, tant matemàtiques com visuals, però quina creu que és la més adient?

Intuïtivament un fractal és aquell on detectem estructures complexes que es repeteixen a totes les escales. Però l'única bona definició és la matemàtica: la dimensió fractal ha de ser fraccionària, o més gran que la dimensió habitual.

4. Em podria parlar sobre el naixement dels primers "monstres matemàtics"? Creu que la geometria fractal és una invenció de Benoît Mandelbrot, o sempre ha estat entre nosaltres esperant que algú topés amb ella? Suposo que aquest descobriment no ha estat obra únicament d'aquest ment privilegiada, em podria citar altres científics que mereixin ser reconeguts per les seves grans aportacions a la teoria fractal?

Començant per Cantor, molts altres van parlar de fractals, potser sense donar-los aquest nom. La pregunta de si els fractals existeixen o s'inventen és una pregunta filosòfica, aplicable a tots els objectes matemàtics i fins i tot a les matemàtiques en general. Jo personalment penso que sempre han estat allà, i que els matemàtics només les anem descobrint poc a poc. Però és clar, no puc demostrar-ho.

5. En quant al camp de la dinàmica complexa, ens podria parlar com sorgeix la idea de fer fractals al pla complex i la base de construcció dels misteriosos conjunts de Julia?

La dinàmica complexa ve motivada per l'estudi del mètode de Newton - els fractals apareixen de manera natural quan estudies sistemes dinàmics complexos.

6. Ens podria parlar dels aspectes o propietats més interessants del Conjunt de Mandelbrot? Creu que és l'objecte matemàtic més complex creat per l'ésser humà fins avui dia? I considera que és el més bell per l'univers meravellós que amaga al seu interior?

EL conjunt de Mandelbrot té multitud de propietats interessants, especialment si no et fixes només en la part estètica, sinó en les matemàtiques que hi ha al darrere. Aquí crec és on està l'interès real. Hi ha

moltes preguntes que encara no s'han respos sobre aquest conjunt: propietats topològiques, relacions amb altres branques de les matemàtiques. Des de el punt de vista estètic, és impressionant que cada augment et reporti un paisatge diferent... fins l'infinit.

7. En tot llibre dedicat al tema queda molt present la relació entre els fractals i la natura, em podria donar la seva opinió? Donat que els fractals de la natura no compleixen estrictament les propietats fractals matemàtiques, no s'haurien d'anomenar de manera diferent?

Certament la natura no té fractals. Els fractals són un bon MODEL per molts objectes naturals.

8. Una altra relació molt interessant és la dels fractals amb el caos. Podria donar-nos alguns dels exemples que consideri més sorprenents? Pot comentar el significat del famós títol d'un article de Lorenz "¿Puede el batir de las alas de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas?". Fins a quin punt la variació de les condicions inicials pot modificar completament un sistema?

Als sistemes dinàmics (complexos o no) apareix constantment la idea de caos. Aquesta frase de Lorenz es refereix al fenomen "sensibilitat respecte a condicions inicials" que és un dels ingredients del caos, no l'únic. Si les condicions inicials es troben en regions estables (com el conjunt de Fatou, per exemple), la variació no afecta al resultat. Si es troben als conjunts inestables (com el conjunt de Julia), aleshores petites variacions alteren dramàticament l'evolució del sistema.

9. La geometria fractal ha obert noves aplicacions en tots els àmbits científics, quines en destacaria per la seva innovació o utilitat?

Jo no en sóc experta. Però crec que les aplicacions més rellevants es troben a la medicina, on la dimensió fractal ha esdevingut un element de diagnosi habitual en molts camps.

Valora per igual l'aportació fractal al món artístic? Quina opinió li mereixen els paisatges, la música o la literatura fractal?

Els fractals són bonics, i per tant em sembla fantàstic que s'utilitzin al món artístic.

10. L'evolució dels fractals ha estat possible gràcies al desenvolupament dels ordinadors, en destacaria la seva potència de càlcul, o la de representació? Em podria parlar dels mètodes més utilitzats per la programació dels fractals, tant geomètrics com complexos?

Sense ordinadors no haguéssim gaudit mai dels fractals com es fa ara. Els algorismes per programar-los són molt diversos. El que és interessant és que hi ha algorismes molt senzills que funcionen molt bé.

En relació al meu treball, opina que el "Joc del Caos" aporta un algoritme aleatori molt senzill, però de gran eficàcia? Des del seu punt de vista, em podria explicar com sorgeixen imatges fractals a partir d'aquest tipus de jocs aleatoris, i quina explicació matemàtica amaguen?

Això és degut a un teorema no trivial, que diu que en iteracions d'aquesta mena, sempre hi ha un conjunt que atrau totes les condicions inicials.

11. Pel que fa l'àmbit educatiu, quins projectes, conferències o tallers de divulgació matemàtica porta a terme, tant per la Facultat de Matemàtiques de la UB com per altres centres? [A part d'atendre i ajudar amb molt interès a estudiants de batxillerat curiosos com jo (que ens hem aventurat a escollir els fractals pel treball de recerca), cosa que personalment li voldria tornar a agrair.]

Durant molts anys he estat coordinadora de les Xerrades-Taller de la UB, unes xerrades de divulgació matemàtica per alumnes de Batxillerat. També vaig engregar el programa de suport a Treballs de

recerca, on designàvem alumnes de la Facultat per assessorar estudiants en els seus treballs. Ara aquestes activitats les porten altres companys de la Facultat.

Des de la seva gran faceta divulgativa, a quin públic i per què creu que s'hauria de fer conèixer aquest món dels fractals? Quina és la millor manera per fer-ho?

Els fractals tenen una particularitat molt difícil de trobar en matemàtiques: són moderns (és a dir descoberts fa molt poc) però al mateix temps són molt assequibles - no es necessita saber grans matemàtiques per a poder-los disfrutar. Si per poder-los entendre completament, i de fet encara no els entenem del tot. Però un alumne de Batxillerat com tu pot arribar força endavant, fins i tot arribar a entendre algunes dels grans reptes en els que es treballa.

12. Personalment, quin és el fractal que més li agrada pel que fa la seva part matemàtica o artística? Perquè?

Òbviament el conjunt de Mandelbrot. Per la seva bellesa i per la seva universalitat - tots els demés en contenen còpies!

13. Per finalitzar, quins projectes d'investigació sobre fractals està desenvolupant? Quines són les seves ambicions i aspiracions en un futur proper?

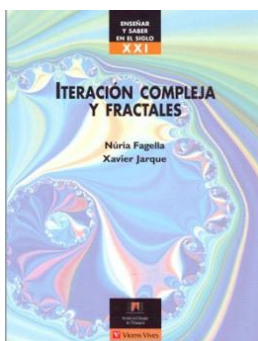
Jo no treballo específicament en fractals - faig sistemes dinàmics complexos, i allà m'apareixen fractals. Ara mateix estic treballant en funcions semblants a l'exponencial i la tangent, i mirant quines són les particularitats que les diferencien, a nivell de sistemes dinàmics, dels polinomis.

Com veu la geometria fractal en 10 anys? Cap a on anem en aquest camp? Que es necessitaria perquè es complissin aquestes expectatives?

La geometria fractal no és un camp que jo conegui gaire. Sobre dinàmica complexa, crec que s'avança cap a estudiar sistemes dinàmics en dimensió més alta.

14. Hi ha alguna pregunta que troba a faltar o que li hauria agradat respondre? Voldria afegir algun comentari o conclusió addicional?

Estic molt contenta de veure l'interès que desperta aquesta matèria en alumnes joves, que els fa adonar-se de que les matemàtiques són vives. Aquesta és una altra de les propietats dels fractals que els fa realment útils per la societat.



Per finalitzar, voldria tornar a agrair immensament el seu temps i atenció, i espero comptar amb la seva gran experiència per si em sorgeixen més dubtes fractals en el meu futur acadèmic. També em va fer molta il·lusió que em dediqués personalment el seu llibre "*Iteración Compleja i Fractales*".

7. BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

LLIBRES SOBRE FRACTALS

- M. BARNSELY, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1993, ISBN:978-01-2079-061-6. 0120790610.
- M.I. BINIMELIS, *Una nueva manera de ver el mundo: La geometría fractal*, RBA Libros, 2011, Barcelona, ISBN: 978-84-9867-941-0.
- J. CHOATE, R.L. DEVANEY, , FOSTER, A., *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities*, Key Curriculum Press, United States, 2000, ISBN: 1-55953-355-2.
- N. FAGELLA i X. JARQUE, *Iteración Compleja y Fractales*, Editorial Vicens Vives, Barcelona, 2007, ISBN: 978-84-316-0996-5.
- K. J. FALCONER, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Inc., England, 1990, ISBN: 0-471-92287-0.
- M. LIVIO, *La proporción Áurea: La historia de phi, el número más enigmático del mundo*, Editorial Ariel, Barcelona, 2009, ISBN: 978-84-344-4495-X.
- B. B. MANDELBROT, *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets Editores, Barcelona, 2009, ISBN: 978-84-8310-549-8.
- H. -O PEITGEN, H. JÜRGENS i D. SAUPE, *Fractals for the Classroom: Part One: Introduction to Fractals and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1991, ISBN: 0-387-97041-X.
- H. -O. PEITGEN, H. JÜRGENS i D. SAUPE, *Fractals for the Classroom: Part Two: Complex Systems and Mandelbrot Set*, Springer-Verlag, New York, 1992, ISBN: 0-387-97722-8.

LLIBRES SOBRE PROGRAMACIÓ

- M. A. ACERA GARCÍA i A.M. SANZ SIERRA, *Manual Imprescindible de C/C++*, Anaya Multimedia, Madrid, 2010, ISBN: 978-84-415-2614-3.
- B. DOUGLAS i M. PARR, *C# para estudiantes*, Pearson Educación, México, 2011, ISBN: 978-607-32-0328-9.

DICCIONARIS I ENCICLOPÈDIES

- K. CHANG, *Encyclopedia of RF and Microwave Engineering: Volume 2*, John Wiley & Sons Inc., United States, 2005, ISBN: 0-471-65448-5.
- J. MAJÓ I ROCA, R. MATEU MARTÍNEZ, M. TORRAS I CONANGLA, *Diccionari de Matemàtiques i Estadística*, Universitat Politècnica de Catalunya i Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 2002, ISBN: 84-412-2792-6.
- M. SAGRISTÀ I ARTIGAS, J. TORRAS I RODERGAS, *Diccionari manual de la llengua catalana*, Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 2004, ISBN: 84-412-0011-4.

PÀGINES WEB [DATA DE CONSULTA: DE 11/07/2011 A 11/01/2012]

P. BOURKE, *Fractals and Chaos*, <<http://paulbourke.net/fractals/>> [Data de consulta: Octubre 2011]

N. FAGELLA, *Models Matemàtics i Sistemes Dinàmics*, Grau de Matemàtiques UB, <<http://campusvirtual.ub.edu/course/view.php?id=24789>>

FRACTAL FOUNDATION, *Inspiring Interest in Science, Math & Art*, <<http://fractalfoundation.org/>>

FRACTINT, *Freeware Fractal Generator*, <<http://fractint.org/>>

M. FRAME, B. B. MANDELBROT i N. NEGER, *Fractal Geometry*, Yale University, <<http://classes.yale.edu/fractals/>>

D. M. JONES, *Benoît Mandelbrot: Fractal Art Contest 2011*, <<http://www.fractalartcontests.com/2011/>>

B. LUQUE i A. AGEA, *Fractales en la red*, <<http://www.dmae.upm.es/cursofractales/index.htm>>

J. A. PÉREZ, *Fractales*, <<http://www.dlsi.ua.es/~japerez/fractal/>>

L. RIDDLE, *Classic Iterated Function Systems*, Departament of Mathematics Agnes Scott College, <<http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/ifs.htm>>

E. WEISSTEIN, *Complex Systems*, Wolfram Research, <<http://mathworld.wolfram.com/topics/ComplexSystems.html>>

T. WILLIAMS i C. KELLEY, *Gnuplot 4.4: An Interactive Plotting Program* <http://www.gnuplot.info/docs_4.4/gnuplot.pdf>

WIKIPEDIA, *The Free Encyclopedia (en català, castellà i anglès)*, <<http://www.wikipedia.org/>>

VÍDEOS

E. PUNSET, *No todo es liso en la vida, 2007*, <<http://www.eduardpunset.es/425/charlas-con/no-todo-es-liso-en-la-vida>>

YOUTUBE, *Benoît Mandelbrot - The Nature of Roughness in Mathematics, Science and Art, 2006*, <<http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=YTxn39bH2aY&feature=endscreen>>