De l'astronomia de l'antiguitat a un viatge a la Lluna

Hermite

Índex

Abstract

The aim of this piece of work is to comprehend the paths of celestial bodies. From a historical introduction of science that study them, the Astronomy, to a theoretical understanding of the trajectories of heavenly bodies in the sky. Including calculations, some of them easy to program on various astronomical phenomena and other not so easy treating questions of celestial dynamics, such as the determination to go to orbit the Moon. These have been calculated with a computer. The skills used are known by a student of the scientific way of Batxillerato. If this research is useful to perceive in depth the structure of the cosmos, the author will be fully rewarded.

El tema d'aquest treball de recerca és la comprensió dels moviments dels cossos celestes. Des d'una visió històrica de la ciència que se n'ocupa d'estudiar-los, l'astronomia, fins a una enteniment teòrica del curs dels astres al cel. Incluint càlculs, alguns fàcils de programar sobre diversos fenòmens astronòmics i altres no tan fàcils tractant qüestions de dinàmica celeste, com per exemple la determinació d'una òrbita per anar a la Lluna. Aquests han estat computats amb un ordinador. Els coneixements que s'utilitzen són intel·ligibles per a un estudiant de Batxillerat que estigui interessat per les ciències. Si aquesta obra serveix al lector per percebre d'una manera més profunda el funcionament del cosmos, l'autor es sentirà plenament recompensat.

Introducció

Sobre com ha progressat l'obra

La resposta a la pregunta sobre com ha anat progressant aquesta recerca no es respon amb brevetat. Ho intentaré redactar de manera ordenada la forma com es va anar redirigint la idea que en un principi era el germen d'aquest treball.

Tot va començar amb la desviació de la meva atenció cap a la teoria de la Relativitat General d'Einstein. M'intrigava el fet que fos una cosa abstracta, la dimensió espai - temps, i a la vegada que expliqués un sistema del món aparentment simple. Però no hauria estat possible fer una recerca completa, ja que feien falta coneixements matemàtics que no tenia. Aleshores el meu oncle (Vicenç Companys Ferran) em va suggerir investigar sobre la Gravitació Newtoniana. Encara que no sigui un sistema tan perfecte com el d'Einstein, al nostre sistema Solar no difereix molt de les prediccions de la seva teoria. I això sí, la física del Newton és molt més simple, senzilla d'utilitzar i d'entendre que la de l'Einstein. Però cal dir que, al començament, jo tenia un concepte d'aquesta molt diferent al que tinc ara, no creia que fos una ciència on les matemàtiques fossin imprescindibles.

Encoratjat pel Vicenç vaig intentar llegir els Principis Matemàtics de Filosofia Natural del Newton, prèviament havent comprès els Elements d'Euclides, ja que la gran obra de física utilitza la geometria com a mitjà per a demostrar les proposicions a partir d'uns axiomes. I podem dir que vaig haver-ho de deixar també, va arribar un punt en què no seguia el fil de cap de les maneres, tot i que són un dels meus objectius per llegir encara que sigui una versió més moderna. El que vaig fer amb la Gravitació de Newton va ser entendre-la per mitjà de l'àlgebra, una rama més coneguda per a mi.

La matèria nova que vaig conèixer va ser l'astronomia, iniciant-me amb la pàgina web d'astronomia de la Universitat de Nebraska-Lincoln recomanada per Julian Pfeifle (professor de matemàtiques de la UPC). En ella vaig trobar una gran quantitat de material per a introduir-me en aquest món. A la vegada vaig començar a aprendre un llenguatge de programació, el *Python*, que em serviria després per als càlculs astronòmics.

Una vegada tenia assimilats uns coneixements previs, vaig llegir la història de l'astronomia de Francesc Nicolau. Aquesta em va apropar als científics que van iniciar la ciència. I amb ella em vaig plantejar algun problema d'astronomia que després resoldria amb el *PyEphem*, juntament amb d'altres.

També vaig donar un repàs a la Gravitació amb un opuscle de Javier Tarrío. En aquests moments ja estava preparat per plantar cara als problemes de dinàmica celeste. Propagar òrbites, fonamentalment amb el programa *Mathematica*, que és amb el que vaig poder fer possible el càlcul de la trajectòria a la Lluna. Això de la física no és un món, en són molts, i aquí només hi ha un granet d'arena enmig d'un desert de coneixements.

Tenint totes les rames del treball en ple funcionament, vaig descobrir unes classes d'astronomia gravades amb vídeo i penjades a Internet. Eren impartides per Joan Girbau Badó, catedràtic del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) i un gran aficionat als rellotges de Sol. Destaquen pel seu contingut sistemàtic, amb uns temes estructurats de manera que es vagin assolint cadascun al seu moment òptim. Aquests van recolzar tot el que sabia, i hem van permetre conèixer nous matisos de la ciència. Sol em va donar la vida de veure i escoltar-ne un parell, però de veritat recomano aquest material, molt bo, com una introducció a la ciència.

Finalment, he acabat de donar els últims retocs per a concloure aquest treball.

Per què vaig fer aquest treball?

Les matemàtiques, entre d'altres coses, donen eines per a manipular correctament el càlcul de quantitats. Aquesta ve de la nostra capacitat intel·lectual de comptar. I amb ella podem expressar lleis físiques, com la llei de Gravitació Universal de Newton (secció 3.4.), que diu que la força d'atracció deguda a la gravetat entre dos cossos és directament proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa. Una relació entre quantitats.

Que això sigui possible calcular-ho, ens obra una infinitat d'aplicacions a la vida real. I de la manera tan perspicaç que s'exposa, m'ha atret a decantar-me a estudiar-la. La Relativitat d'Einstein és més exacta que aquesta, com he dit, però no tan intuïtiva.

Quan més t'endinses en el món de la física i la astronomia, més t'agrada. Que una persona hagi trobat una llei de la rotació dels cels, encara que sigui empírica, és una revolució científica. El seu ser, que ha sapigut cavil·lar i no descansar fins arribar a descobrir el que no canvia, és un fet extraordinari. I això és el que anhelem conèixer, encara que sapiguem que, com deia Einstein, que tots els perquès no els arribarem a saber mai en aquesta vida.

També té la finalitat de complementar i unificar tots els coneixements que té un estudiant de Batxillerat, ja que podem arribar a saber moltes coses, però fent-les servir es com s'arriba a apreciar i aprendre millor els conceptes.

En resum, el perquè del treball rau en el meu gust per les ciències, en especial les matemàtiques, la astronomia i la física, sense aquest no hagués tingut mai la paciència de fer-lo.

La manera com està organitzat

Els continguts del treball els podem classificar en dos blocs, un el teòric (capítols 1, 2 i 3) i l'altre el pràctic (capítols 4 i 5).

El bloc teòric comença amb una iniciació a l'astronomia, inclou: les coordenades terrestres (longitud i latitud), les coordenades equatorials celestes (anàlogues a les terrestres, però per a donar coordenades a un punt de l'espai, respecte la Terra), una explicació del cicle de les estacions, diferents conceptes del temps i les coordenades de l'observador (el que nosaltres veiem) amb una càlcul aproximat a l'hora de predir els moviments dels astres que veiem des de la Terra.

Al capítol de l'astronomia el segueix el de la història d'aquesta ciència. Des dels primers astrònoms de la prehistòria fins a Newton. És un resum de la història dels astrònoms que han aportat més, ja que si aprofundíssim més ens sortiríem dels objectius d'aquesta recerca.

Per acabar el bloc tenim un capítol que recull un conjunt de lleis i conceptes físics relacionats amb la Gravitació. Iniciem el capítol amb les lleis de Newton, és el fonament de tota la física newtoniana. Després exposo la demostració de la seva llei de Gravitació Universal a partir de les lleis de Kepler, imprescindible per a tractar els problemes de mecànica celeste. I acabo el capítol amb la definició dels conceptes centre de masses i moment angular, útils per als problemes posteriors.

El bloc teòric té els coneixements necessaris per a després resoldre alguns problemes d' astronomia i de mecànica celeste, amb els programes *Mathematica* i *Python*, aquests els exposem al bloc pràctic. Per a programar i entendre els programes s'ha de conèixer algun llenguatge. No pretenc fer un manual de programació, però intento escriure en tot moment el programa acompanyat amb una explicació que fa més clara la comprensió, per a qui sap programar o no en sap, del que realitza el programa. Si el lector vol aprofitar l'oportunitat per a aprendre un llenguatge de programació, només li fa falta un ordinador i un manual, que es pot trobar en molts llocs web. I també moltes ganes de ser instruït en aquesta nova disciplina. De totes maneres podeu reproduir, o fins i tot, ampliar els càlculs i programes que he fet, per experimentar i conèixer els temes que es tracten des del vostre ordinador. Només cal que disposeu un intèrpret de *Python*, un programa lliure, i *Mathematica*, el qual el podeu comprar a la pàgina web de la companyia Wolfram Research.

El primer capítol del bloc tracta bàsicament de calcular i entendre problemes relacionats amb l'astronomia, tot i que en té un de dinàmica celeste (la integració numèrica d'una trajectòria). Tots aquests estan resolts amb el *Python*. Entre d'altres, hi ha el càlcul de l'efecte retrògrad dels planetes, quants satèl·lits GPS hi ha visibles en un moment i lloc concrets, etc. Ens limitem a entendre els moviments que veiem, però no sabem quina trajectòria portarà un cos si el llancem, això ho tractarem al capítol següent.

Al darrer capítol, amb el *Mathematica*, trobem una trajectòria per anar a la Lluna. D'aquest últim si que hem de fer una menció especial a l'ajuda de l'ordinador a l'hora de calcular les òrbites. L'home no hauria pogut anar a la Lluna, o li hauria costat molts anys de calcular, sense la potència de computació dels ordinadors. Si Newton hagués disposat d'un ordinador, i un coet, potser l'Apollo 11 ja no seria la primera missió que va portar l'home a la Lluna amb èxit.

Programes que he utilitzat

Són: el *Mathematica 7.0*, per a escriure el treball i realitzar els càlculs del viatge a la Lluna; el *Python 2.6* i el *PyEphem 3.7.3.4*, per a computar diferents problemes d'astronomia; el *Geogebra 3.2*. per a dibuixar les figures dels capítols 3, 5 i alguna del capítol d'història, va molt bé ja que et permet dibuixar figures geomètriques amb molta facilitat; i el *XEphem 3.7.4*, que hem va servir per a ensenyar quins són els plans orbitals dels satèl·lits GPS (capítol 4).

Agraïments

Agraeixo en primer lloc a la meva família. Dintre d'ella destaco el cop de mà, més d'un per això, que m'ha donat el Vicenç que treballa per a l'Agència Espacial Europea (ESA), a l'European Space Operation Center (Darmstadt, Alemanya). Ell va ser qui em va suggerir el càlcul de l'òrbita translunar, i no sols això sinó em va aconsellar en molts casos en què no sabia quin camí triar dels molts que es presentaven. A Julian Pfeifle, professor del Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), que m'ha donat el seu suport amb qüestions sobre astronomia i programació amb el *Python*. També al Sr. Brújula, professor del col·legi Terraferma, que m'ha revisat el treball al llarg del seu procés.

He de reconèixer que sense l'ajuda d'aquesta gent, no seria el que és aquest treball científic.

CAPÍTOL 1

Coordenades astronòmiques i astronomia

Aquest capítol és indispensable per a poder realitzar càlculs astronòmics amb el llenguatge de programació *Python* i el seu mòdul *PyEphem* del capítol 4. També servirà per a poder entendre millor en què treballaven tots els astrònoms citats al capítol següent de la història de l'astronomia.
S'ha de dir que l'astronomia per si sola ja és suficient apassionant com per gaudir practicant-la. Aquí ens dedicarem més a comprendre alguns trets importants d'aquesta que a ensenyar imatges impressionants de l'espai com es fa als llibres divulgatius.
Per assimilar millor els conceptes en alguns casos, es recomana o bé dibuixar-se les figures, o bé entrar a la pàgina web *www.astro.unl.edu* (referència [10]) i manipular algunes de les aplicacions que hi ha allà. Aquesta tasca ajuda a compendre alguna idea més difícil d'entendre del text.
Gairebé totes les imatges d'aquest capítol s'han extret de la referència [10].

1.1. SISTEMES DE COORDENADES BÀSICS I LES ESTACIONS

Encetem el capítol amb les coordenades terrestres i les celestes. Després exposarem perquè es produeixen les estacions.

1.1.1. COORDENADES TERRESTRES

1.1.1.1. UNITATS DE LONGITUD I LATITUD

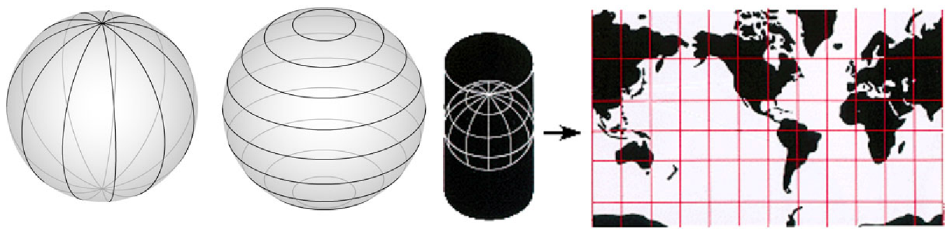


Figura 1.1: D'esquerra a dreta: meridians, paral·lels, i els meridians i els paral·lels en una projecció cilíndrica.

Longitud

La demarcació del tipus de coordenada terrestre, longitud, ve donada per les semicircumferències imaginàries que van de pol a pol, anomenades meridians. Els valors que pren la longitud poden anar de 0º fins a 180º est o de 0º fins a 180º oest. L'angle es mesura des del centre de la Terra.
El punt zero de longitud es troba al meridià de Greenwich, Anglaterra anomenat Primer Meridià. A 180º del Primer Meridià trobem la Línia Internacional de Canvi de Data. A diferència del Primer Meridià, no és una línia recta.

Latitud

La demarcació del tipus de coordenada terrestre, latitud, ve donada per les línies imaginàries paral·leles a l'equador, anomenades paral·lels. L'equador és la intersecció de l'esfera terrestre amb un pla perpendicular a l'eix i que passa pel centre. Els valors que pren la latitud poden anar de 0º a l'equador fins a +90º N al pol nord o fins a -90º S al pol sud, on els angles són mesurats des del centre de la Terra.

Unitat de mesurament i conversió de les unitats

S'utilitza la notació sexagesimal per a mesurar els respectius angles de la longitud i latitud. La unitat preponderant són els graus (º). Hi ha 360º de longitud i 180º de latitud. Cada grau pot ser expressat amb minuts, 1 grau és equivalent a 60 minuts; i cada minut pot ser expressat amb segons, 1 minut és equivalent a 60 segons.

1.1.1.2. CERCANT LA LATITUD I LA LONGITUD

Els astrònoms antics utilitzaven els mètodes escrits a l'apartat següent per a saber les coordenades on ens trobem. La mesura dels angles es duia a terme gràcies al sextant. Existeixen maneres per a fer els càlculs a qualsevol hora, i més exactes, però aquí no els explicarem ja que ens separaríem de la nostra fita. Tots aquests procediments han estat substituïts pel Sistema de Posicionament Global (GPS), que ens permet obtenir les dades amb una precisió molt més exacta.

Determinant la latitud

Hom pot determinar fàcilment la latitud. En el cas que ens trobem en l'hemisferi nord, es realitza mesurant l'angle que forma l'horitzó amb l'estrella Polar o del nord. Aquest angle equival a la latitud del punt on ens trobem.

En el cas que ens trobem en l'hemisferi sud, es realitza mesurant l'angle que forma l'horitzó amb l'estrella Octantis o Polaris Australis. Encara que al ser una estrella de cinquena magnitud, no visible a ull nu, si volem podem utilitzar la constel·lació de la Creu del sud per a localitzar el pol sud celeste i poder mesurar la latitud.

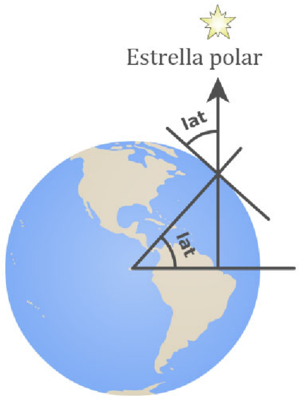


Figura 1.2: Mètode per a mesurar la latitud. Es basa en la igualtat dels angles que tenen els dos costats d'un perpendiculars als dos costats de l'altre.

L'error comès per considerar l'estrella a buscar com si romangués exactament perpendicular a l'equador i damunt nostre és petitíssim i es pot menysprear, ja que les estrelles estan molt lluny de nosaltres.

Determinant la longitud

Aquesta mesura si la computem amb l'hora sidèria és molt més exacta, i de moment, com que encara no hem vist el concepte ho farem amb l'hora que marca el nostre rellotge, suposant que un dia té 24 hores solars. Un rellotge sideri el podem obtenir amb el programa que hi ha al capítol dels càlculs amb el *Python* (el 4), però això ja arribarà més endavant.

Gràcies a que la Terra gira 360º sobre si mateixa en 24 hores aproximadament (en realitat són 23 h. 56 min. i 04 seg.) podem utilitzar l'hora per a calcular la longitud. Una hora de variació de temps correspon a 15º de longitud $\left(\frac{360\,°}{24\text{ hores}} = 15\,°/\text{hora}\right)$. Suposem que un observador ajusta el seu rellotge de manera que a les 12:00 a Greenwich sigui el migdia, quan el Sol passa pel meridià, i viatja una llarga distància. Llavors l'observador s'adona que el Sol es troba al punt més alt quan són les 16:00 en el seu rellotge. Quan era migdia a Greenwich el rellotge marcava 12:00, però no ha estat fins a les 16:00 quan ha estat migdia on era l'observador. Això vol dir que pel moviment de rotació de la Terra, que gira d'oest a est, ha rotat durant 4 hores per a que el Sol es posicioni en el meridià, que és equivalent a dir que ha rotat 60º a l'oest. Per tant, l'observador sap que és a la longitud de 60º O (4 hores x 15º/hora = 60º).

1.1.2. COORDENADES EQUATORIALS CELESTES

Veurem que les coordenades equatorials celestes tenen uns conceptes anàlegs a les terrestres. Els avantatges d'aquest sistema per a l'observació d'estrelles són: és independent de l'observador i la posició de les estrelles canvia molt poc al llarg del temps. Els desavantatges: si estem observant el cel des de la Terra ens serà més difícil trobar un astre amb les coordenades celestes, ja que no està orientat als observadors que es mouen contínuament amb la Terra.

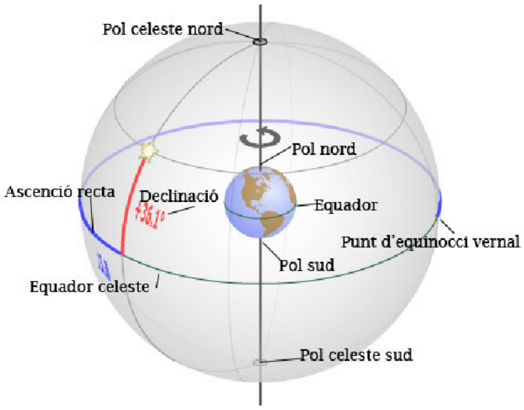


Figura 1.3: Esfera celeste imaginària.

L'esfera celeste

El sistema de coordenades equatorials és un tipus de coordenades celestes que està basat en el concepte de l'esfera celestial. Al capítol següent, d'història, veurem que els grecs l'utilitzaven, concretament Èudox de Cnidos la va fer servir per a explicar el seu sistema del món (geocèntric).

L'esfera celestial és una esfera imaginària de radi infinit que envolta la Terra. Les posicions dels objectes al cel estan projectades en aquesta esfera infinita. Tot i que és impossible representar-la, normalment la dibuixarem com una esfera celestial de radi finit.

L'esfera celestial roman immòbil respecte la resta de l'univers. La seva orientació no canvia. Com que el moviment de rotació de la Terra és d'oest a est, com hem dit abans, un observador que estigui a la Terra veurà que l'esfera celestial rota d'est a oest.

Per a localitzar un punt en l'esfera celestial necessitarem dos tipus de coordenades, com fèiem amb les coordenades terrestres. Els pols i l'equador de la Terra seran projectats a l'esfera celeste, i seran uns punts de referència. Amb altres paraules: El pol celeste nord es troba just damunt del pol nord de la Terra, i el pol celeste sud just sota el pol sud de la Terra. L'equador celeste és un gran cercle a l'esfera celeste al mateix pla que l'equador i, per tant, perpendicular a l'eix de rotació de la Terra.

Declinació

La declinació és l'angle que forma l'astre, projectat a l'esfera celeste, amb l'equador celeste. És el concepte anàleg de la latitud. La mesurem des del equador celeste. Els valors que pren la longitud poden anar de 0° a l'equador celeste fins a +90° al pol nord celeste de 0° fins a -90° al pol sud celeste. La lletra grega δ s'usa per a indicar que un angle qualsevol correspon a la declinació.

Ascensió recta

La segona coordenada al sistema equatorial celeste és l'ascensió recta. És el concepte anàleg de la longitud. Enlloc del meridià de Greenwich projectat, s'ha agafat per a l'ascensió recta el punt d'Àries o punt d'equinocci vernal com a punt de referència. Mesurarem l'ascensió recta de 0h fins a 24h en direcció a l'est del punt d'Àries. Per tant, l'est és la direcció en què avança l'ascensió recta. Es sol representar amb la lletra grega α.

S'agafa aquesta direcció i unitats perquè la Terra rota per si mateixa una vegada cada 24h siderals. Pel lector que no sàpiga que són les hores siderals, més endavant s'explicarà amb més deteniment. L'esfera celeste o volta celeste com veurem al darrer punt del capítol ens permetrà posicionar els cossos celestes al nostre cel.

Els semicercles celestes dibuixats de pol a pol i perpendiculars a l'equador celeste els anomenem Cercles Horaris. Els cercle horari que passa pel punt d'Àries l'anomenem Cercle Horari Zero.

1.1.3. L'ECLÍPTICA I LA LLUM DEL SOL

El pla orbital - l'Eclíptica

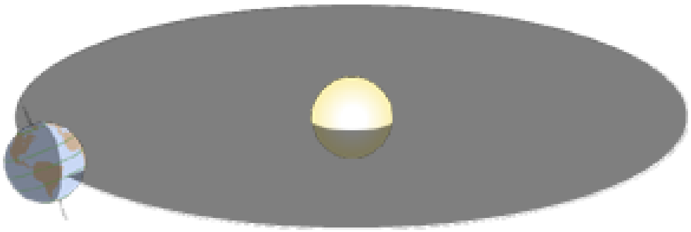


Figura 1.4: Pla orbital del moviment de translació de la Terra al voltant del Sol.

La Terra orbita al voltant del Sol. El pla d'aquesta òrbita s'anomena eclíptica. Seria equivalent dir que és l'òrbita del Sol a l'esfera celeste. Aquest pla no és coplanari amb l'equador de la Terra o l'equador celestial, ja que el moviment de rotació de la Terra s'efectua en un eix inclinat respecte del pla perpendicular a l'eclíptica. Aquesta inclinació del pla orbital l'anomenarem obliqüitat de l'eclíptica. Tots els planetes del nostre sistema solar tenen obliqüitat de l'eclíptica diferent de 0°. La Terra té 23,5° d'obliqüitat de l'eclíptica. No és del tot constant, posteriorment s'explica que aquest angle va variant pel fenomen de la nutació (secció 1.2.).

Efectes de la inclinació del pla orbital

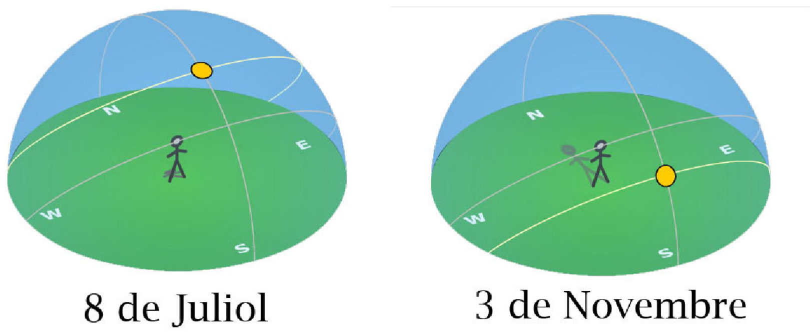


Figura 1.5: Diferents declinacions del Sol al migdia en una latitud propera a +60° N.

Com que l'eix de rotació de la Terra és oblic respecte el pla orbital de la Terra-Sol en el moviment de translació, alguns cops la Terra està inclinada amb el pol nord més proper al Sol, d'altres està inclinada amb el pol sud més proper al Sol, i dos cops el pol nord i el pol sud estan a la mateixa distància del Sol al llarg de l'any. Al migdia, quan el Sol passa pel meridià, la declinació del Sol va variant al llarg dels dies.

Els rajos de llum

Si nosaltres agafem una lupa i fem que els rajos de la llum del Sol es focalitzin en un punt, veurem que en aquell punt la temperatura és molt més alta que on no toca el raig de llum concentrat. Les estacions enlloc de per la concentració dels rajos de llum amb una lupa, depenent de l'espargiment dels rajos de llum del Sol sobre la superfície terrestre.

L'angle dels rajos solars del Sol amb la superfície de qualsevol planeta és anomenat angle d'incidència. L'angle zero el formen els rajos que són perpendiculars a la superfície terrestre, són els rajos més directes i intensos, la quantitat de rajos per metre d'unitat de superfície és la més alta. La resta d'angles poden anar de -90° fins a +90°, exclòs el zero. Com més lluny es trobin de l'angle zero, els rajos seran espargits en una àrea major, i per tant, la intensitat dels rajos serà menor.

1.1.4. EQUINOCCIS I SOLSTICIS

El que exposarem a continuació són els equinoccis i solsticis que es produeixen a l'hemisferi Nord. A l'hemisferi Sud els equinoccis i els solsticis seran a les mateixes dates, però com sabem, les estacions són les oposades. Per exemple, si aquí passem de l'hivern a la primavera (equinocci de primavera), allà passen de l'estiu a la tardor (equinocci de tardor).

Equinoccis

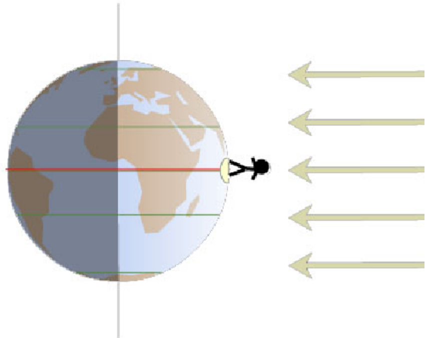


Figura 1.6: Equinocci, els rajos del Sol incideixen perpendicularment a l'equador.

S'anomena equinoccis als moment de l'any en què el Sol, en el seu moviment aparent sobre l'eclíptica, passa per l'equador celeste i en què el dia i la nit són d'igual durada en tots els punts de la Terra.

Succeeix dos cops cada any: cap al dia 21 de març (equinocci de primavera) i cap al dia 22 de setembre (equinocci de tardor).

Solsticis

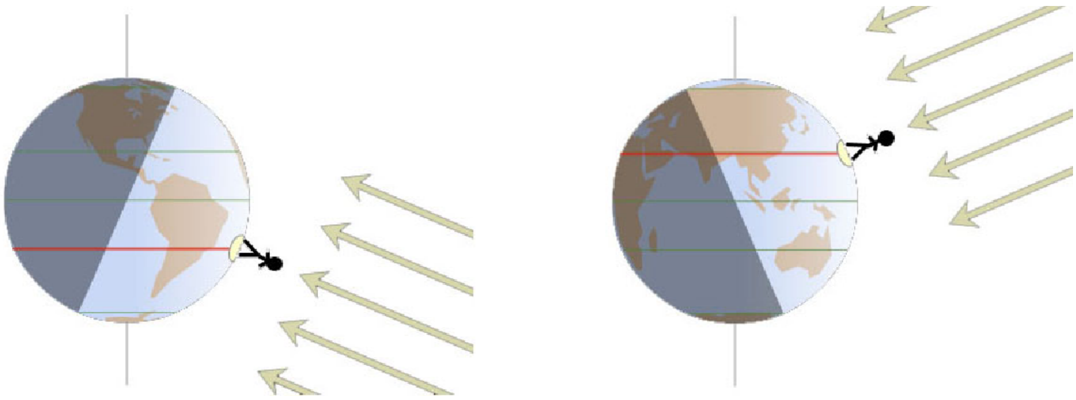


Figura 1.7: De esquerra a dreta: solstici d'hivern i solstici d'estiu.

S'anomena solsticis als moments de l'any en què el Sol en el seu moviment aparent sobre l'eclíptica, passa pel punt de l'eclíptica separat 90° sobre el pla d'aquesta del punt d'equinocci.

Succeeix dos cops cada any: per allà el 21 de juny (solstici d'estiu) i per allà el 21 de desembre (solstici d'hivern).

A la figura 1.7 podem veure els paral·lels on els rajos del Sol incideixen perpendicularment en els diferents solsticis. Aquests paral·lels reben el nom de Tròpic de Càncer el del solstici d'estiu, i Tròpic de Capricorn el del solstici d'hivern. Es troben a uns 23,5° de l'equador, ja que la Terra té 23,5° d'obliqüitat a l'eclíptica. També podem observar que als pols hi ha dos cercles, el Cercle Polar àrtic i el Cercle Polar Antàrtic a 66,5° de l'equador els dos. Aquests paral·lels contenen les zones dels pols on hi ha dies que el Sol no surt.

Que el Sol es pon sempre per l'oest és mentida, s'ha de precisar que a vegades ho fa pel nord-oest i d'altres pel sud-oest. A la figura 1.7 podem apreciar que quan el Sol es pon pel nord-oest a l'hemisferi nord tenim els dies més llargs de dotze hores. Si es pon pel sud-oest tenim els dies més curts de dotze hores. A l'hemisferi sud, com podem raonar, és a l'inrevés.

1.2. PRECESSIÓ DELS EQUINOCCIS I NUTACIÓ

Precessió dels equinoccis

Si prolonguem l'eix de la Terra en les diferents posicions d'aquesta sobre l'eclíptica al transcurs de l'any, aquest eix sempre hauria de tocar la nostra estrella polar. Però no sempre ha estat la mateixa, degut a un moviment que té aquest eix de revolució entorn un con que té com a eix central la direcció perpendicular a l'eclíptica. Per això, les estrelles polars han anat canviant al llarg de la història. També canvien les posicions de les estrelles per a qualsevol observador, però molt poc ja que varia amb un període de 26000 anys. La direcció de l'eix de la Terra va girant amb un moviment molt lent. El provoca la força gravitatòria que efectuen els cossos externs com el Sol i la Lluna sobre la Terra.

Nutació

Aquest con que hem definit abans no té un angle entre l'eix i la generatriu constant. L'angle canvia entre 24,5º i 22,1º. Aquesta oscil·lació periòdica s'anomena nutació i té un període de 18,6 anys. També es produeix per les forces externes d'atracció gravitació entre la Lluna i el Sol amb la Terra. Aquesta oscil·lació és semblant al moviment d'una baldufa quan està a punt de parar-se.

Encara que variï poc al llarg dels anys, s'ha de tenir present quan es vol posicionar estrelles al cel amb precisió.

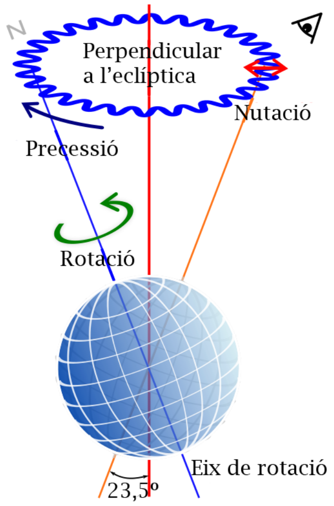


Figura 1.8: Dibuix que representa la Terra amb els seus diferents moviments.

1.3. CONCEPTES DIVERSOS DEL TEMPS

1.3.1. ELS INTERVALS DE TEMPS SIDERALS I ELS SINÒDICS

Tenim un concepte d'any referit al cicle de les estacions, i de dia segons el pas del Sol al nostre cel. Però com ho fa l'astronomia per a definir un any o un dia? N'hi ha algun més? Com s'ha calculat quan dura un dia, i un any? Ara ho sabrem.

Hi ha dos tipus de formes per a mesurar-ho. El sideral, que es basa en mesurar l'interval de temps que tarda un cos a tenir la mateixa posició respecte les estrelles. I el sinòdic en mesurar el temps que tarda un cos per a tornar a estar alineat amb un altre (segons el significat de la paraula grega). A l'elegir-ne un o un altre tindrem una manera de comptar els dies o els anys, o una altra.

1.3.1.1. TIPUS DE DIES

Sideral

Per a un observador de la Terra és l'interval de temps entre dos passos consecutius d'un mateixa estrella pel seu meridià. O, el període de temps que tarda la Terra en donar una volta de 360°. Dura 23 hores 56 minuts i 4,09 segons aproximadament (de temps solar mitjà).

Sinòdic o solar

Per a un observador de la Terra és l'interval de temps que està la Terra per a què el Sol torni a estar al mateix meridià, o que tornin a quedar alineats.

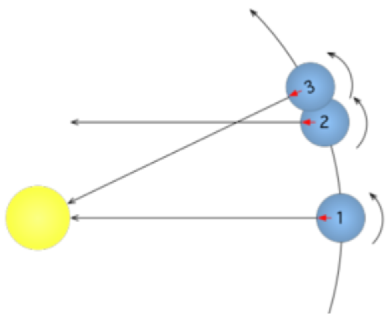


Figura 1.9: Diferència entre dia sideral i dia sinòdic. El sideral correspon a l'interval de temps per a què la Terra realitzi el moviment del punt 1 al punt 2. El sinòdic és el que dura per a passar del punt 1 al punt 3. Les posicions no són reals, ja que els angles són molt més petits, gairebé 1 grau, i no s'apreciaria visualment la diferencia de duració.

1.3.1.2. TIPUS D'ANYS

Sideral

És el temps que passa per a què el Sol torni a estar a la mateixa posició respecte les estrelles. L'any sideral és 20 minuts aproximadament més llarg que l'any tropical a causa de la precessió dels equinoccis.

Sinòdic o tròpic

És el període de temps entre dos passos consecutius del Sol pel punt Àries. És variable, però una durada mitjana seria 365,2421988 dies solars. Cal dir que varia poc.

És el que marca el cicle de les estacions i el que concorda amb els nostres calendaris, aplicant-hi la modificació de l'any de traspàs.

Anys de traspàs

Al ser aquesta la durada de l'any Tròpic, per a mantenir els anys amb un nombre enter de dies, i que l'equinocci vernal estigui a prop al 21 de Març es va afegir l'any de traspàs. Segons la regla dels anys de traspàs del calendari gregorià: Un any és de traspàs si és divisible per 4, excepte el darrer de cada segle (que és divisible per 100), tret que sigui divisible per 400. Això fa que s'aproximi molt a l'any Tròpic, el gregorià dura $365\,dies + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365{,}2425$.

1.3.2. DERIVATS DELS SIDERALS I ELS SINÒDICS

Una vegada hem definit els intervals de la subsecció anterior, podem entendre els diferents períodes de temps existents que són alguns idèntics i d'altres una variació dels anteriors.

1.3.2.1. TEMPS SOLAR

Es basa en el dia solar, agafa com a origen l'instant en què el Sol passa per l'antimeridià (és un meridià exactament oposat a qualsevol meridià de referència) d'on estem, instant que equival a la mitjanit solar. A partir d'aquest moment es conten les hores en intervals de 24 parts fins que completen el cicle diürn.

Com que el Sol no té un moviment regular al llarg de l'any i l'obliqüitat de l'eclíptica és diferent de 0º, el temps solar es divideix en dos subclasses:

Temps solar aparent

És l'interval de temps entre dos passos consecutius del Sol pel meridià. Pot ser mesurat per un rellotge de sol.

Temps solar mitjà

La duració del temps solar aparent va variant al llarg de l'any. Això es deu al fet que el Sol no es mou amb una velocitat constant al llarg de l'any i per l'obliqüitat de l'eclíptica. Suposem que el Sol es mou a velocitat constant i l'obliqüitat de l'eclíptica és 0º, llavors el temps solar aparent coincidirà amb el temps solar mitjà. Es coordina amb el Temps Mitjà de Greenwich.

La raó per la qual el Sol no es mou amb velocitat constant és que, per la 2a llei de Kepler (subsecció 3.1.2.2.), els planetes escombren àrees iguals en temps iguals, i per tant, al ser l'òrbita una el·lipse, la velocitat no és constant.

1.3.2.2. TEMPS SIDERI

És idèntic al dia sideri menys en una aspecte, enlloc de mesurar-lo amb les estrelles es fa amb el punt d'Àries. L'origen de les hores sidèries, l'hora 0, és defineix com el moment en què el punt Àries passa per damunt del meridià del lloc on ens trobem. Si el punt d'Àries es mogués igual que les estrelles a l'esfera celeste, seria indiferent tan agafar una estrella com aquest, però el punt d'equinocci vernal es mou per la precessió dels equinoccis.

És molt útil per a localitzar estrelles al cel. Un dia sideri es divideix en 24 hores i una hora sidèria en 60 minuts sideris i un minut sideri en 60 segons sideris.

1.3.2.3. TEMPS MITJÀ DE GREENWICH

És el temps solar mitjà en l'Observatori Real de Greenwich. S'abreuja amb les sigles GMT.

1.3.2.4. TEMPS UNIVERSAL COORDINAT

Quan van sortir els primers rellotges atòmics va canviar la forma en què s'actualitzava els valors correctes de la nostra hora. A partir de l'1 de gener de 1972 el Temps Universal Coordinat (UTC) va substituir al Temps Mitjà de Greenwich.

El Temps Universal Coordinat, o temps civil, és el temps de la zona horària de referència (al meridià zero) respecte de la qual es calculen les altres zones del món. La mesura del temps es basa en els rellotges atòmics, ja que la rotació de la Terra s'endarrereix respecte del temps atòmic.

A Catalunya ens trobem dins de l'anomenada Central European Time, llavors canviem l'hora dues vegades l'any (avancem una hora a la primavera i l'endarrerim a la tardor), a l'estiu, el nostre fus horari equival a UTC+2, mentre que a l'hivern equival a UTC +1.

S'admet que l'UTC i el GMT són correctes si la seva diferència no és de més de 0'9 segons. Si ho és s'afegeix o es treu un segon als rellotges atòmics.

1.3.3. DIFERÈNCIA DEL DIA SIDERI RESPECTE DEL DIA SOLAR MITJÀ

Ho farem a partir de la mesura d'un any solar amb dies solars (= 365,2421988 dies solars aprox.). Agafem com a origen la Terra, llavors el Sol gira al voltant d'aquesta. En un dia sideri la Terra girarà 360º i el Sol s'haurà avançat uns quants graus. Al final de l'any tropical s'haurà avançat 24 hores mesurades amb l'ascensió recta. Volem saber quan s'avança cada dia solar mitjà. Només cal fer la divisió següent:

$$\Delta\alpha_{\text{mitjana}} = \frac{24\,h}{365,\,2\,421\,988\; dies\; solars} = 3\; min.,\; 56.555360480980667\; seg,$$

amb unitats de temps sideri.

1.4. MIRANT EL NOSTRE CEL

1.4.1. COORDENADES HORITZONTALS

Les coordenades horitzontals situen els astres al cel que podem veure nosaltres des de la Terra en un determinat instant. Facilita l'observació dels objectes degut a que totes les coordenades horitzontals estan orientades al espai que tenim visible en un determinat instant. Els inconvenients són que les coordenades horitzontals d'un astre varien segons la posició del observador.

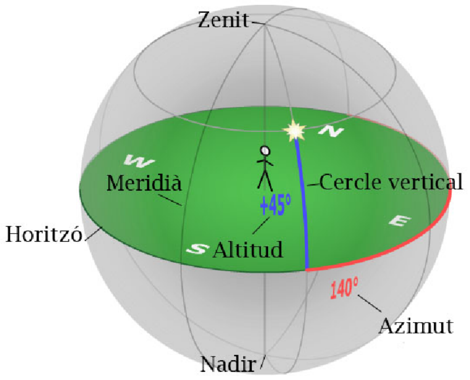


Figura 1.10: Sistema de coordenades horitzontals.

El pla horitzontal

El sistema de coordenades horitzontals és un sistema de coordenades celestes, el definim respecte a l'horitzó d'un observador i a la seva vertical. L'horitzó astronòmic no és el mateix que l'horitzó que veiem a la Terra. Aquest és un model ideal, sense cap mena d'efectes geogràfics com muntanyes, valls, o la corba de la Terra. Per tant, és un pla paral·lel a la tangent de la superfície on es troba l'observador i toca al centre de la Terra. De manera que, un observador només pot veure la meitat de l'esfera celeste en un instant concret. Considerar que es troba al centre de la Terra portaria errors als càlculs si calculéssim posicions i angles d'objectes que es trobessin a una distància de l'observador comparable a la del radi de la Terra, però al treballar amb cossos molt més llunyans l'error és menyspreable.

Hi ha tres punts de referència al sistema de coordenades horitzontals. El pla horitzontal és un, on la direcció la donem respecte els punts: nord, est, sud, i oest. Dels altres dos un es situa exactament sobre el cap de l'observador, anomenat zenit, i l'altre sota els peus de l'observador, anomenat nadir.

Azimut

L'azimut és l'angle mesurat sobre l'horitzó que formen el punt cardinal nord i la projecció vertical de l'astre sobre el pla horitzontal de l'observador. L'azimut pot anar de 0º fins a 360º on el zero es troba al nord i va augmentant en direcció est. Els astres amb el mateix azimut s'assenten en un arc que va del zenith travessant l'astre fins al nadir, perpendicular al pla horitzontal, estan sobre un cercle vertical.

Com que la Terra rota al voltant d'un eix alineat amb els seus pols, el cel es mou d'est a oest, però no de nord a sud. El meridià de l'observador va del nord de l'horitzó fins al sud passant pel zenit. Aquest meridià és un punt de referència important, ja que els astres que s'estacionin en ell estaran en el punt més alt de la seva òrbita en el cel de l'observador.

Altitud

L'altitud és la coordenada que defineix les direccions per sobre o per sota del pla horitzontal, és a dir, l'angle mesurat des del pla horitzontal fins a l'astre. L'altitud de l'horitzó és 0º, la del zenit és 90º, i la del nadir és -90º. Si l'altitud és positiva podrem veure l'astre al punt on es situï en la coordenada donada en un instant concret.

L'altitud del pol nord celeste és igual a la latitud de l'observador. Això es pot comprovar fàcilment observant la forma amb què buscàvem la latitud en les coordenades terrestres: la latitud era l'angle de l'estrella Polaris (el pol nord celeste aproximadament) amb l'horitzó, i aquesta mesura és igual a l'altitud de l'estrella Polaris. Per tant, la latitud terrestre és el mateix que l'altitud del pol nord celeste en les coordenades horitzontals (si ens trobem al hemisferi sud l'altitud del pol celeste sud és igual a la latitud canviada de signe).

L'altitud de l'equador celeste és igual a:

$$90° - latitud\ de\ l'observador.$$

1.4.2. TRETS IMPORTANTS A L'HORA D'OBSERVAR EL CEL

1.4.2.1. LA SINGLADA DE LES ESTRELLES

La rotació del cel

Figura 1.11: La singlada de les estrelles observades des de la Terra, deguda a la rotació del nostre planeta.

Com que la terra rota, el cel que observem des de la Terra també rota. El que veiem és el moviment de la volta celest. Un observador qualsevol de la terra veu els objectes del cel moure's d'est a oest (en sentit de les agulles del rellotge si estem a l'hemisferi nord i en sentit contrari de les agulles del rellotge si estem a l'hemisferi sud). La singlada de les estrelles observada depèn de la latitud de l'observador. Les estrelles no estan completament fixes en aquesta esfera, però es mouen molt poc. Aquests moviments són provocats per la precessió dels equinoccis i la nutació. Com veurem hi ha tres tipus les que estaran sempre visibles, les mai visibles, i les que veurem de tant en tant.

Estrelles circumpolars

S'anomenen estrelles circumpolars aquelles que per estar molt a prop del pol, sempre el de l'hemisferi on ens trobem, descriuen un cercle complet al voltant seu sense tallar l'horitzó, de manera que sempre són visibles. A l'equador totes les estrelles surten i es ponen, per tant, no hi ha estrelles circumpolars. I als pols totes les estrelles visibles són circumpolars.

Estrelles que mai surten

Són aquelles que per estar molt a prop del pol, sempre el contrari a l'hemisferi on ens trobem, descriuen un cercle complet al voltant seu sense tallar l'horitzó, mai són visibles, per tant, mai surten. A l'equador no hi ha estrelles que mai surten.

Estrelles que surten i es ponen

El mateix nom ens defineix aquest tipus d'estrelles, durant la rotació de la terra algunes estrelles surten, sempre a l'est de l'horitzó, i es ponen, sempre a l'oest de l'horitzó. L'angle que formen aquestes estrelles amb l'horitzó és el mateix per a totes les estrelles que surten i es ponen. Que podem deduir que sempre serà igual a:

$$90° - latitud\ de\ l'observador.$$

1.4.2.2. LOCALITZACIÓ D'ASTRES PER LES FRANGES DEL CEL

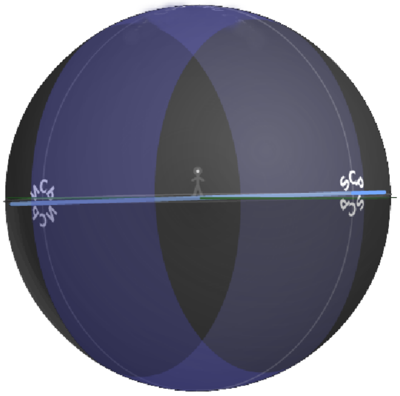


Figura 1.12: La franja del Sol en una latitud 0º, a l'equador.

Tal l'equador celeste i els pols ens serveixen com a punts de referència per identificar posicions dels objectes a l'espai, també podrem posicionar-los en diverses latituds a la Terra amb les franges de declinació.

Per exemple, el Sol estaria en una franja de 47º d'amplitud centrada a l'equador celeste (figura 1.12), ja que l'obliqüitat de l'eclíptica és de 23,5º i la declinació del Sol és sempre entre +23,5º al solstici d'estiu i -23,5º al solstici d'hivern.

Les òrbites d'altres astres al sistema solar les especifiquem amb relació a l'eclíptica. Per exemple l'òrbita de la Lluna està inclinada 5º aproximadament del pla orbital Terra-Sol, per tant la Lluna estaria en una franja d'uns 60º centrada a l'equador celeste. La inclinació dels altres planetes és semblant a la de la Lluna, excepte la de Plutó, per tant, les podem considerar que estan a la mateixa franja que la Lluna.

1.4.3. LOCALITZAR UN ASTRE AL CEL

Avui en dia, s'estan substituint tots els antics càlculs astronòmics amb programes d'ordinador que redueixen considerablement el temps per a realitzar-los. Però hem de saber com es fan, almenys els més bàsics, i entendre els càlculs que fa l'ordinador per dintre, sinó ens perdem una part important de l'astronomia. Exposaré la manera de saber on està un astre al nostre cel a partir d'un anuari astronòmic, el qual ens proporcionés l'ascensió recta i la declinació de l'astre en un moment concret a la nostra posició, i un rellotge sideri. Després si volguéssim comprovar que efectivament és cert necessitaríem algun aparell per a mesurar angles i un a nit amb el cel destapat.

El temps sideri és indispensable per a posicionar les estrelles i els planetes al nostre cel. Abans a cada observatori hi havia un rellotge que marcava el temps sideri. Ara, si nosaltres en volem tenir un, només cal que realitzem un traductor de Temps Universal a hora sidèria i a l'inrevés. El Temps Universal és l'hora del nostre rellotge (menyspreant els errors de precisió) restant-li una hora o dos en funció de si estem a l'estiu (UTC+2) o al hivern (UTC+1). Al capítol 4 n'hem fet un que funciona amb el llenguatge *Python*. Sempre que ens referim a l'hora durant aquest apartat, serà la sidèria.

Al girar l'esfera celeste d'est a oest, el punt d'Àries també gira d'est a oest. Si mirem el rellotge quan tinguem el punt d'Àries sobre el nostre meridià seran les 0 hores. Passada una hora, el punt d'Àries es trobarà a l'oest del nostre meridià. Per tant, les hores sidèries locals del nostre rellotge marcaran quantes hores han transcorregut des de l'últim pas del punt d'Àries pel nostre meridià. És com si el nostre meridià tingués una estrella lligada a ell, l'ascensió recta d'aquesta marcaria l'hora.

Ara, si coneixem l'ascensió recta d'un astre en un moment concret, sabrem quantes hores està separada del punt d'Àries. És a dir, l'ascensió recta d'un cos celeste coincideix amb l'hora en què el cos passa pel meu meridià. Aquí ens adonem de la importància que la unitat dels angles de l'ascensió recta siguin les hores sidèries, facilita molt els càlculs (l'equivalència recordem que és 1 hora sidèria = $\frac{360°}{24 \text{ hores sidèries}} = 15°$). La declinació sempre serà la mateixa a qualsevol moment del dia. Per tant, ja el tenim localitzat.

Definim una nova mesura, l'angle horari, que és l'arc comprès entre el meridià de l'observador i el cercle horari de l'astre. Serà positiu si l'astre està a l'oest del meridià i negatiu si està a l'est del meridià. Està comprès entre els valors -12 hores i 12 hores. El podem calcular així:

Angle horari = Hora sidèria – Ascensió recta

Amb aquest podem calcular l'azimut de l'astre fàcilment. Podem donar un significat equivalent al del temps sideri: és l'angle horari del punt d'Àries.

Finalment, observem uns dibuixos que reprodueixen el pas del temps i el moviment de l'esfera celeste d'un observador. L'angle grog indica l'angle horari, l'angle roig la declinació i l'angle blanc l'ascensió recta. Hi ha el meridià de l'observador que és de color blau. El cercle horari que va de pol a pol i és de color grog és el cercle horari zero, al dibuix 1.13 està alineat amb el meridià i es confon. Per últim l'equador, que també és de color grog.

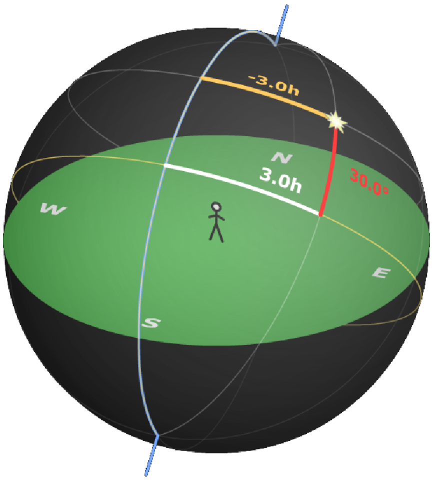


Figura 1.13: Posició d'una estrella tres hores sidèries abans que estigui al meridià de l'observador. Temps sidèri: 00:00.

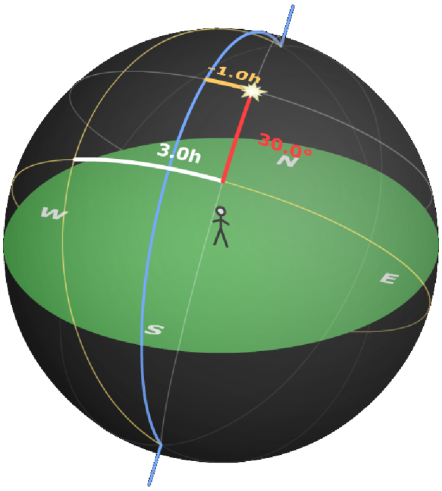


Figura 1.14: Posició d'una estrella 1 hora sidèria abans que estigui al meridià de l'observador. Temps sidèri: 02:00.

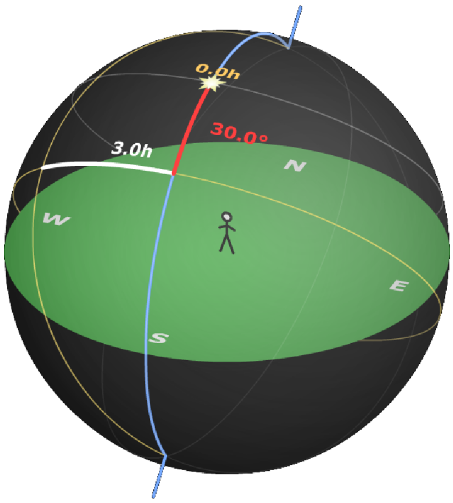


Figura 1.15: Posició d'una estrella en el meridià de l'observador. Temps sidèri: 03:00.

CAPÍTOL 2

Història de l'astronomia

*A*quest capítol inclou un bocí de la història dels científics (de l'edat Antiga fins a l'edat moderna) que s'han dedicat a investigar com és el curs dels astres. He seleccionat als més importants fins a Newton, no vull menysprear els altres, però sinó ens separaríem de l'objectiu d'aquesta obra. Gràcies a les elucubracions de tots els astrònoms de la història hem pogut heretar tots els coneixements d'avui en dia. Cadascun ha posat el seu granet de sorra per afavorir la nostra compren sió del cosmos. Com veurem, els primers sobretot, destaquen pel seu enfocament pràctic, però poc a poc, s'ha tendit a buscar la raó i la llei per la qual està regit l'univers.

Vull donar al lector una visió de l'evolució d'aquesta ciència que va ser indispensable per la gran obra de Newton. Amb Newton donarem per acabat aquest fragment de la història de l'astronomia. En la seva llei de la Gravitació Universal es basa tot el capítol de la propagació d'òrbites d'aquest llibre.

La història permetrà reconèixer tots els coneixements d'astronomia i física no com a simples descobriments, sinó com a un procés de milers d'investigadors que han anat inventant i polint el llegat que ens han entregat.

També inclou alguns càlculs que van fer els astrònoms, n'hi ha de més exactes i de no tan exactes, però tots tenen molt mèrit pel que fa a la seva originalitat.

2.1. L'ASTRONOMIA DE L'EDAT ANTIGA

2.1.1. ASTRONOMIA DE LA PREHISTÒRIA

Els prehistòrics tenien la necessitat de mesurar el temps, si volien mesurar-lo amb els astres havien de tenir un coneixement del curs del Sol i la Lluna. L'astronomia va ser el que els va permetre satisfer aquesta necessitat, això ho sabem per les troballes fetes que ja les podem considerar ciència perquè mostren un coneixement sistemàtic i raonat.

De l'època megalítica ens han arribat representacions gravades en pedra d'algunes constel·lacions celestes, com: la Óssa Major, la Menor i les Plèiades. Tot i que d'entre tots els monuments prehistòrics de contingut astronòmic sobresurt una formació megalítica d'Anglaterra, situada a una plana de Salisbury, prop d'Avebury, al comtat de Wilt. Consta de tres construccions. La primera és una gran plataforma de terra circular de 97,5 metres de diàmetre, envoltada de 56 petites fosses que s'anomenen sots d'Aubry, pel nom del seu descobridor, i que guarden relació amb un menhir solitari seprat del cercle a una certa distància. Aquest menhir, anomenat Heelstone, s'ha comprovat que és l'indicador del punt per on surt el Sol el dia del solstici d'estiu si es mira des del centre del cercle. Aquesta primera és probablement del 2000 o 2100 aC.

Joseph Norman Lockyer (1836-1920) va ser un astrònom anglès que va fer el primer estudi amb rigor científic. Mostra que és un gegantó rellotge-calendari de Sol, aquest senyalava amb gran exactitud l'inici de les estacions. Després Gerald Hawkins (1928 - 2003), professor d'astronomia de Boston i Fred Hoyle (1915-2001), Plumian Professor, van publicar diversos articles a la revista Nature fent notar que els 56 sots d'Aubry permetien determinar els eclipsis de Sol i Lluna, podent establir el començament del cicle lunar amb unes direccions fixades. Stonehenge II i Stonehenge III es creu que tenien una connotació religiosa.

Figura 2.1: Stonehenge l'any 1997

2.1.2. ELS EGIPCIS CULTIVADORS DE L'ASTRONOMIA

Dels egipcis en sabem moltes coses des del tercer mil·lenni abans de Crist. El seu imperi va durar fins la conquesta d'Alexandre Magne el 333 aC. La llengua egípcia antiga oblidada es va poder tornar conèixer gràcies a la troballa de la pedra Rosetta, que gràcies a els egiptòlegs hem pogut arribar a llegir el contingut de papirs i jeroglífics. Ara sabem pels documents quins coneixements astronòmics havien aconseguit. També es van desenvelar representacions astronòmiques en alguns sarcòfags.

En totes les cultures el calendari es basa en el moviment dels astres Sol i Lluna, però els egipcis hi tingueren en compte un tercer: l'estel que anomenaven Sothis (el que excel·leix). Aquest marcava amb la seva sortida helíaca (que vol dir poc després de pondre's el Sol) quan començaven les inundacions del Nil, de les quals depenia tota l'agricultura egípcia, a part de l'altra que veurem referida al calendari.

Van distribuir l'any en 12 mesos de 30 dies cada un i com que no lligava prou amb la realitat, per fer els 365 dies n'afegien 5 al final. I com que no intercalaven anys de 366 dies, per quadrar del tot es veien obligats a afegir un altre mes de 30 dies cada 120 anys. Si ho feien així Sothis no els marcava el començament de l'any, ja que si un any començava amb la sortida de Sothis el següent ja hi havia una petita diferència que anava creixent fins arribar a un any en què tornava a coincidir. La coincidència de l'any civil amb l'astronòmic es feia cada 1456 anys, i sabent això els astrònoms han calculat quan van començar a fer servir el calendari: havia de ser el 2773 o el 4229 abans de Crist.

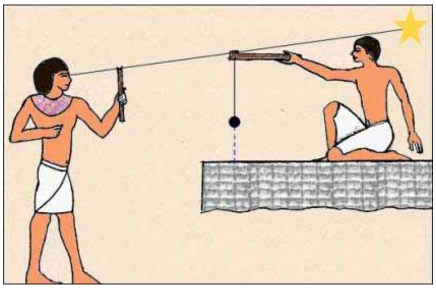


Figura 2.2: D'esquerra a dreta: clepsidra i merkhet. Aparells utilitzats per a mesurar el temps.

A part de l'estructuració del calendari, els egipcis sabien d'astronomia: la direcció del pol nord celeste (orientació de les piràmides de Keops i Kefrèn), classificaven les estrelles en fixes i erràtiques, feien llistes de sortida i postes d'estrelles i construïen instruments per a saber l'hora o mesurar el temps. D'aquests últims hi ha el merkhet que servia per determinar l'hora de nit per l'observació d'una determinada estrella segons l'època de l'any, i per mesurar el temps la clepsidra (rellotge d'aigua) de forma troncocònica.

2.1.3. L'ASTRONOMIA DE L'ANTIGA MESOPOTÀMIA

Els documents escrits més antics són dels sumeris de la Mesopotàmia. L'escriptura que inventaren s'anomena cuneïforme. Els primers textos es daten de cap al 2500 aC. Després els acadis, dominaren aquella regió assimilant-ne la cultura sumèria. I seguiren altres pobles que anaren ocupant-la: els hitites, els hurrites, els cassites, etc. No cal detallar més ja que s'explica en els textos d'història. De vegades Mesopotàmia és anomenada Caldea i per "caldeus" els seus habitants.

En els documents hem trobat una astronomia força elaborada, a més cal dir que eren bons calculadors i això els va facilitar les precisions que feien d'astronomia de posició. La precisió també es deu als seus instruments: l'alidada, que servia per mesurar la distància angular entre dos astres; el gnomon, que era una vara plantada verticalment per observar-ne l'ombra que quan és al mínim diari és migdia i quan és al mínim anyal senyala el solstici d'estiu i al màxim anyal el d'hivern; la clepsidra (com la dels egipcis); el polos, que era una semiesfera buida de gran diàmetre amb la concavitat cap al cel amb una bola suspesa en el seu centre, l'ombra de la seva bola senyalava la posició del Sol i el seu moviment.

El seu calendari era bàsicament lunar. I com que 12 mesos lunars fan un any de 365 dies per ajustar-lo al moviment del Sol cada 19 anys calia afegir-hi 7 mesos més, perquè 325 mesos lunars són 19 anys solars, que corresponen a 19 vegades 12 mesos lunars i 7 mesos més. Aquest període de temps s'anomenà cicle de Metó. Hi ha unes tauletes que contenen les "efemèrides lunars" i s'hi descriu la posició del sol segons els mesos de l'any. El calendari requeria precisió, això els portà a predir eclipsis amb molt poc error i van descobrir el període que anomenaren Saros, que és el temps que transcorre perquè es repeteixin molt aproximadament els mateixos eclipsis i és de 223 lunacions (18 anys, 11 dies i 8 hores). També van trobar la periodicitat dels planetes a base de determinar les aparicions, desaparicions i aturades (l'efecte retrògrad, quan canvia el sentit de la marxa).

Els caldeus utilitzaven el sistema de numeració de base 12, enlloc de base 10. Sembla que van agafar 12 perquè tenim els dits dividits en 3 segments cadascun i en total sumen 12 en una mà si els contem amb el polze. Els Babilònics van heretar aquesta idea del 12 i van marcar el recorregut de l'any amb les 12 constel·lacions del Zodiac. A més a més ells usaven el sistema de base 60 i van dividir el cercle en 360° i cada grau en seixanta minuts i cada minut en seixanta segons. I també la del dia en 24 hores i la de l'hora dividida com els graus. Els grecs primer i després els romans ho prengueren d'ells i passà a nosaltres. Van ser ells els que inventaren la setmana que els jueus van adoptar.

2.1.4. ELS ANTICS XINESOS TAMBÉ ESTUDIAREN ELS ASTRES

Els xinesos em molts casos algunes troballes científiques seves eren anteriors i de vegades superiors als descobriments i estudis fets pels mesopotàmics i més tard pels europeus. Per exemple, en l'astronomia, des del 2697 aC ja es coneixia el pol celeste, que no coincidia amb l'estrella que ara senyala (degut a la precessió dels equinoccis, explicació al punt 1.2.) i hem anomenat polar, fins i tot es van adonar del període Saros observant la Lluna (2155 aC).

Del segle VIII aC es conserva un catàleg de 1464 estrelles reunides en 284 constel·lacions, obra de tres astrònoms: Txeu Txen (de Tsi), Kan To (de Wei) i Wu Hien (no en sabem l'origen). En ell podem notar-hi que els graus xinesos són 1/365,5 de circumferència. La regió equatorial estava dividida en 28 parts i els cercles que els punts de divisió amb el pol eren els meridians (per ells sieu, que vol dir aixopluc). La posició de l'estrella sempre es referia al primer meridià que tenia a la dreta.

Tenien instruments per mesurar el temps: el gnomon i la clepsidra. Posen la durada de l'any de 365,25 dies (l'any tròpic té 365,242 dies), això ho van fer després de dividir la circumferència, ja que sinó l'haguessin dividit en aquestes parts i haurien reduït l'error que cometien, força petit per això. A més a més, coneixien el cicle de Metó i el curs dels planetes.

2.1.5. ELS INDIS TAMBÉ ES VAN INTERESSAR PELS ASTRES

A la civilització de les terres de l'Índia desenvolupada a partir del segle XV aC hi trobem també el cultiu de les ciències físiques i no hi podia faltar l'estudi dels astres. L'astronomia d'aquest immens país se sol dividir amb dos períodes:

L'astronomia vèdica i brahmànica

Se sap que cap el 1500 aC arribaren a les regions que ara anomenem Índia els adis o indoeuropeus procedents del centre d'Europa. Quan iniciaren la història del país, els autòctons encara no tenien escriptura. Part de l'astronomia es troba en els llibres dels Veda (també tenien himnes i fórmules sacrificials religioses, entre el 1500 i el 1000 aC). El calendari dura 360 dies repartits en 12 mesos de 30 dies, intercalaven un tretzè més de tant en tant. L'altra part es troba en els llibres Brahmana, que tenen més indicacions astronòmiques afegides al que deien els Veda. El mes que s'intercala és de 25 o 26 dies i té la regularitat de cada cinc anys (el període rep el nom de yuga).

Figura 2.3: La muntanya altíssima Meru, que és el resultat de la interpretació dels brahmànics del cosmos (molt poc científica).

A l'època clàssica

A partir del 519 aC començà una nova època, India es conquerida pels perses que es relacionaran amb els savis hindús. L'astronomia hindú es troba ara descrita en els cinc Siddhanta (= solucions), dels quals només se'n conserva un, el Suryasiddhanta (solució del Sol). Conté regles per a mesura el temps, una taula trigonomètrica del sinus (la més antiga que es coneix), tracta dels meridians, punts cardinals, equinoccis i solsticis, eclipsis de Sol i Lluna, dels moviments dels planetes, de les sortides helíques dels astres, dels moviments relatius de Sol i Lluna, de l'astrologia i hi ha un "sistema del món" no gaire diferent dels brahmànics. No s'acaba aquí la saviesa astronòmica dels hindús, la que segueix forma part de la història recent.

2.1.6. EL SISTEMA DEL MÓN DELS GRECS

S'ha anomenat "Ciència hel·lènica" la que es desenvolupà en el poble grec des del segle VI aC fins al IV dC. Les regions que formaren la Grècia clàssica es van anar formant en ondades successives d'immigrants provinents del centre d'Europa. És una ciència racional, cerca la raó, el logos, o sigui esbrina perquè les coses són com són. El secret de l'avenç ràpid de la ciència grega va ser que eren estudiosos de la matemàtica, això els donà racionalitat.

El fundador de l'Escola Jònica, Tales de Milet (aprox. 630-540 aC) d'origen fenici i un dels set savis de l'antiga Grècia, va donar una explicació al cosmos per mitjà d'un arkhé (=principi, cosa que roman intacta i constituent de tot) que és l'aigua. L'estructura del món diu que és com un plat allargat que està surant sobre l'aigua inferior, mentre que els astres es troben en aigües superiors i el cel és com una gran bombolla semiesfèrica que ens rodeja. Dos milesis, deixebles de Tales, Anaximandre (aprox. 610-545 aC) i Anaxímenes (aprox. 585-524 aC) van donar una concepció diferent del cosmos. Anaximandre reconeix la curvatura de la Terra i diu que està suspès en l'espai, l'arkhé és un àpeiron que ho conté tot. Anaxímenes diu que l'arkhé ha de ser quelcom eteri, etern i inextingible; però en canvi torna a la idea de Tales per explicar el món. Es nota que tots aquests tenien ganes de fer ciència, encara que no trobem una ciència rigorosa.

2.1.7. L'ESCOLA PITAGÒRICA I ELS SEUS PRIMERS ASTRÒNOMS

Pitàgores va néixer a l'illa de Samos, rival comercial de la ciutat de Milet. Viatjà per Egipte i intervingué en la política de la seva pàtria fins que, quan tenia 40 anys, va fugir-ne per no acceptar la tirania de Polícrates i es refugià a la Magna Grècia (sud d'Itàlia). A Crotona (Calàbria) fundà una associació de caràcter mistico-religiós que tingué èxit. Els deixebles tenien obligació de guardar secret de les doctrines de l'escola. Tenien el mestre com un profeta. Més tard aparegué l'autèntic esperit científic. D'ell es l'anècdota que un dia que l'anomenaren savi contestà que no ho era pas sinó un simple philósophos (=amant de la saviesa). D'aquí ve el nom de "filosofia".

L'univers era anomenat cosmos (=ordre), un ordre universal que sorgia de l'harmonia entre contraris. Dins un esperit limitat es formà el món esfèric, limitat i compacte. Al voltant de l'esfera terrestre, immòbil, hi ha les esferes celestes transparents de la Lluna, Mercuri, Venus, Sol, Mart, Júpiter i Saturn, amb aquestes astres encastats, situades a unes distàncies proporcionals a les relacions que existeixen entre cordes sonores harmòniques, amb regularitat matemàtica, produint una simfonia celestial que no percebem per causa d'estar-hi acostumats des del néixer. L'esfericitat de la Terra sembla que per als primers pitagòrics ja era un dogma, com també que eren esferes els astres, no discs com deia Anaximandre. Tot i que també en tenien de proves com aquestes: tots els planetes són esfèrics, per tant la Terra també ho és; la forma que els vaixells desapareixen a l'horitzó; l'augment de l'horitzó visible amb l'ascensió de l'observador; i la ombra de la Terra en els eclipsis.

Quatre pitagòrics hi diuen la seva: Filolau de Tarent, cap a final del segle V aC va dir que la Terra esfèrica girava al voltant d'un foc central (Hestia), i que existia una Antiterra, que era el cos més pròxim al centre i que no podem veure per trobar-se en oposició a nosaltres; Arquies de Tarent (apr. 430-365 aC) gran matemàtic i amic de Plató, va participar de les idees de Filolau; Hicetes de Siracusa (s. V aC) que va identificar l'Antiterra com la Lluna; i Heràclides del Pont (apr. 388-312 aC) només admet el moviment de la Terra sobre el seu eix i la posa al centre de tot, no hi ha Antiterra i les estrelles fixes són immòbils, a més el Sol i la gairebé tota la resta de planetes es mouen al voltant de la Terra (menys Mercuri i Venus que giren al voltant del Sol).

Aquests autors no van tenir gaires seguidors i la teoria geocentrista s'ha anat afermant cada vegada amb més força fins que arribaren les teories heliocentristes, però això ja ho veurem més endavant.

2.1.8. ÈUDOX APLICA LES MATEMÀTIQUES AL MOVIMENT DELS PLANETES

El filòsof Plató (427-347 aC), que segons es diu, havia fet inscriure al frontispici de l'entrada de la seva Acadèmia: "Que no entri ningú que no sàpiga geometria", ja que volia trobar l'expressió matemàtica que demostrés que el moviment dels astres era un moviment circular i uniforme. Llavors, un alumne de l'Acadèmia al cap de poc presentava un model del sistema del món que complia els dos requisits:

Èudox de Cnidos (408-355 aC) era fill d'un tal Esquines. Havia nascut a l'antiga ciutat de Cnidos. Ja havia estudiat matemàtiques, medicina i astronomia quan arribà a Atenes i s'interessà per la filosofia de Plató. En parlen com del matemàtic més excel·lent dels seus temps.

La solució que hi donà va ser la teoria, que esdevingué famosa, de les esferes homocèntriques. Considera la Terra suspesa en el cosmos i ocupant el centre d'un conjunt d'esferes. L'esfera més gran és la de les estrelles fixes que gira segons l'eix que travessa la Terra de nord a sud, i fa una volta cada dia en el seu moviment diürn. A l'interior d'aquesta esfera hi ha set grups d'esferes, totes amb el mateix centre que la primera, o sigui homocèntriques, una dintre de l'altra, però girant entorn d'eixos amb inclinacions diferents que tenen els punts extrems fixats en l'esfera immediatament superior. L'esfera superior gira en sentit contrari de la inferior. Per explicar el moviment que veuen els nostres ulls i fer que es compleixi que totes giren amb moviment circular i uniforme cal posar més d'una esfera per a cada astre. Exactament tres esferes per a la Lluna i tres per al Sol, i quatre per a cada un dels cinc planetes coneguts. O sigui 26 en total que sumades a la de les estrelles fixes fan 27 esferes còsmiques. Cada sistema de tres o quatre embolcalls esfèrics és independent dels altres; no hi ha contacte entre les esferes d'un planeta i les d'un altre, però es troben solidàries les que corresponen a un mateix astre que es troba encastat en una d'elles. No cal dir que les esferes són transparents. Com que giren alhora amb eixos diferents ja es veu que per uniforme que sigui el moviment de cada una el resultat serà una trajectòria més aviat complicada que és, deia Èudox, la que realment es veu.

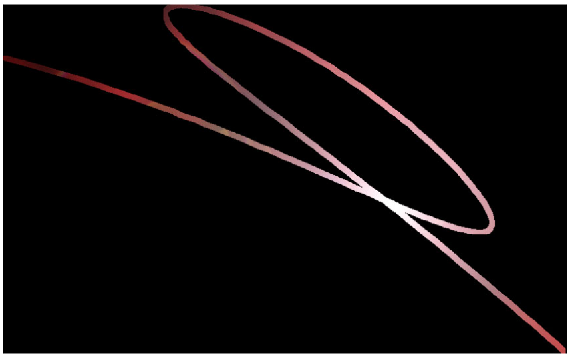


Figura 2.4: Efecte de la òrbita de Mart que veiem sobre el fons estel·lar. El gràfic està extret amb el Python, en la secció 4.2. exposem com. Està calculat des de l'octubre fins al maig.

Per saber l'òrbita que va voler simular Èudox hem de conèixer el desplaçament aparent dels planetes al nostre cel. Quan, durant uns mesos, s'observen els planetes com ara Mart, Júpiter i Saturn, es veu que es desplacen en un sentit, l'anomenat sentit directe. Després disminueixen la velocitat, s'aturen i inverteixen el sentit de la marxa; es diu que van en sentit retrògrad. A continuació, tornen a fer el mateix i acaben desplaçant-se, novament, en el sentit directe. Així, indefinidament. El sorprenent efecte és degut al fet que la Terra gira entorn del Sol més de pressa que els planetes d'òrbites exteriors. Mentre que la Terra triga un any per donar-hi una volta, Mart en triga gairebé dos, Júpiter dotze, Saturn trenta, etc. Això fa que, quan es contemplen projectats sobre les estrelles, els planetes semblin oscil·lar ara endavant, ara endarrere.

2.1.9. ARISTÒTIL I LA SEVA CONCEPCIÓ DEL MÓN

El deixeble més insigne de Plató en l'explicació del moviment dels astres va adoptar substancialment el sistema d'Èudox corregit per Calip de Cízic (aquest, per aconseguir una exactitud més gran va afegir-hi 6 esferes homocèntriques). Ho exposa en el seu tractat "Sobre el Cel" i també en parla al cap. 8 de "Metafísica XII". Considera que la Terra, esfèrica i suspesa al cosmos, és el centre de l'univers, perquè és el seu lloc "natural", i que tots els altres objectes celestes són en esferes homocèntriques girant al seu entorn. Va afegir 14 esferes al sistema de Calip, en total sumaven 47 esferes.

Pel que fa a la constitució del món, Aristòtil admet la teoria dels quatre elements d'Empèdocles (terra, aigua, aire i foc) i hi afegeix un cinquè element, una "quinta essència", que és l'èter, com a constituent dels astres. La raó que dóna és que són incorruptibles i no poden ser fets dels elements que conformen el món sublunar que és mòbil, alterable i corruptible. L'impuls que havien de rebre les esferes celestes per girar com ho fan exigeix l'existència d'un Primer Motor immòbil, causant del moviment etern dels cels. Les esferes es mouen sense canviar de lloc ni alterar-se ni corrompre's. El moviment circular i regular, com ja deia Plató, és el més perfecte i no n'hi pot haver cap altre que li sigui contrari. No cal dir que la influència d'Aristòtil en els autors posteriors va ser gran.

2.1.10. L'ESCOLA D'ALEXANDRIA I ELS SEUS PRIMERS ASTRÒNOMS

La ciutat d'Alexandria d'Egipte va ser fundada per Alexandre el Gran el 332 aC. Els amants de la ciència formaren la que s'anomenà "Escola d'Alexandria", eren estudiosos que s'aplegaven per canviar impressions i aprendre els uns dels altres. Això va fer d'Alexandria el centre científic més important del món grecoromà durant cinc segles. La història de l'astronomia durant aquest període és, pràcticament, la història dels astrònoms que ensenyaren o estudiaren a Alexandria.

Aristarc de Samos (apr. 310-230 aC)

Havia nascut a Samos, com Pitàgores, però és a Alexandria on va realitzar la seva obra científica. S'havia format a Atenes, al Liceu. Ben aviat decidí traslladar-se a Alexandria on visqué i ensenyà la resta de la seva vida. Va ser el primer a aplicar un mètode geomètric al càlcul de les distàncies dels astres. Va considerar l'angle format per les visuals dirigides al Sol i a la Lluna quan aquesta es troba en un quart, creixent o minvant, i li resultà de 87º (en realitat és de 89º 50') i com que en aquell moment el triangle Terra-Lluna-Sol és rectangle, amb el vèrtex de l'angle recte a la Lluna, per semblança de triangles es pot saber quantes vegades és més lluny el Sol que el nostre satèl·lit. Per l'ombra de la Terra sobre la Lluna quan hi ha eclipsi calculà que el diàmetre lunar és 0,35 del terrestre (la realitat és 0,27). La distància de la Lluna a nosaltres la mesurà en 39,54 diàmetres terrestres (quan és de 30,1). Aquests valors tan aproximats superaven de molt les mesures que es tenien per probables a la seva època.

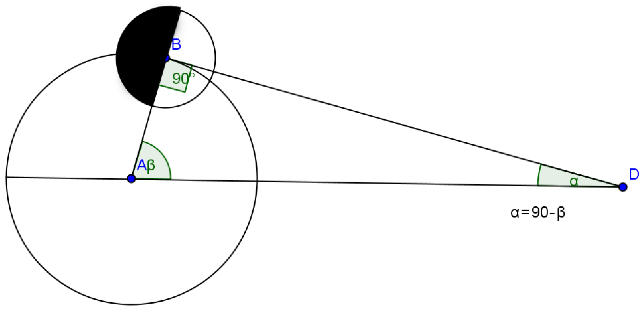


Figura 2.5: Construcció d'Aristarc per saber quantes vegades és més lluny el Sol que el nostre satèl·lit. En realitat és de 400 vegades, ho podem comprovar corregint l'angle β amb pel seu valor correcte 89º 50'.

$\beta = 87\,^{\circ}$

AB serà igual a la distància Terra − Lluna

AD serà igual a la distància Terra − Sol

$h = \dfrac{\text{AD}}{\text{AB}}$ serà igual a les vegades és més lluny el Sol que el nostre satèl·lit.

$h = \dfrac{1}{\cos(\beta)} = 19,1$ vegades

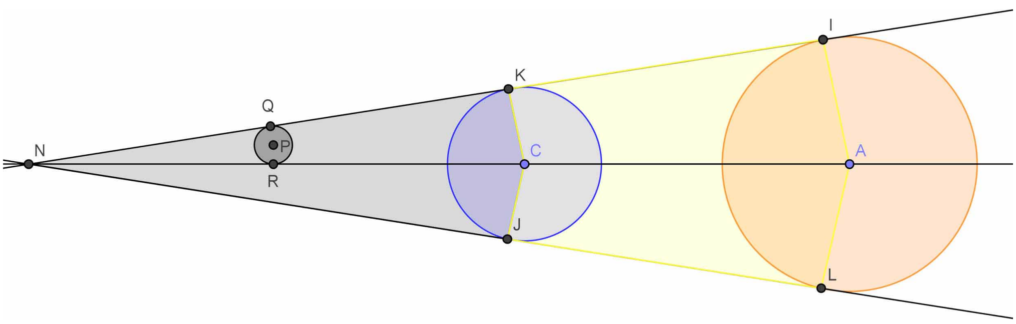


Figura 2.6: Posició estimada dels planetes en el eclipsi Lunar. La Lluna, la Terra i el Sol corresponen als colors gris, blau i taronja respectivament. La zona grisa és la eclipsada per la Terra i la groga la il·luminada pel Sol.

Aristarc va observar un eclipsi lunar de màxima duració i va mesurar el temps que tardava la Lluna a estar completament coberta per l'ombra de la Terra, també va mesurar quan durava l'eclipsi total de Lluna, que li resultà el doble de l'anterior. Llavors va dir que la distància de l'ombra era dos vegades el diàmetre de la Lluna. I al ser la Lluna de la mateixa grandària que el Sol aparentment, vist des de la Terra, va dir que el radi del Sol era 19 vegades el de la Lluna, basant-se en la relació que hi ha de les distàncies a la Terra.

Gràcies a que va mesurar quan tardava la Lluna per ser tapada per l'ombra de la Terra (1 hora aprox.) i al conèixer que el cicle Lunar dura 29,5 dies, va dibuixar un polígon regular de 708 costats circumscrit a la trajectòria de la Lluna (29,5 dies $\cdot$ 24 hores= 708 hores i cada hora és el que tarda a recórrer la Lluna un diàmetre lunar). Té una velocitat angular de $\frac{360}{708}$°/hora. Per trigonometria i observant el polígon sabem que: $\tan\left(90 - \frac{360}{708\cdot 2}\right) = \frac{\text{distància Terra–Lluna}}{\text{radi Lunar}} = 225,4.$

Ara el problema d' Aristarc rau en trobar la relació del radi Lunar PQ i la distància a la Lluna CR amb el radi de la Terra. Aquí exposo el càlcul que va fer, molt aproximat. I, com veureu, hi ha un error matemàtic: considerar els triangles NQR i NCK semblants.

Anomenem $NR = x, PQ = l, CR = r, CK = t, CA = 19\,r, IA = 19\,l.$

De la semblança de triangles NRQ, NCK, NAI (en realitat sol són semblants els últims dos) :

$$\frac{x}{2\,l} = \frac{x + r}{t} = \frac{x + 20\,r}{19\,l}$$

Considerem les següents propietats de les proporcions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Aplicant-les, podem escriure d' una altra forma les relacions de semblança :

$$\frac{r}{t - 2\,l} = \frac{20\,r}{17\,l}$$

I operant trobem quantes vegades és més gran el radi de la Terra que el de la Lluna. :

$$\frac{17\,l}{20} = t - 2\,l$$

$$\frac{t}{l} = \frac{57}{20} = 2,85$$

$$\left(\frac{l}{t} = 0,35\right)$$

I quantes vegades és més gran la distància Terra -Lluna que el radi de la Terra :

$$r = 225,4\,l = 79,08\,t$$

$$\frac{r}{t} = 79,08$$

$$\left(\frac{r}{2\,t} = 39,54\right)$$

Va inventar la scaphé, que era un quadrant solar perfeccionat. Constava d'una semiesfera posada horitzontal amb un estilet vertical al centre. Com que el raig solar diari descriu un con que talla la semiesfera segons un cercle d'ombra que té per pol la línia polar de Terra, s'hi poden llegir les posicions del Sol al migdia tots els dies de l'any i les hores corresponents diàries.

I per Arquimedes (287-212 aC) sabem que Aristarc va ser l'autor de la teoria heliocèntrica ("el Copèrnic de l'edat antiga" s'ha dit) proposant una alternativa al moviment dels astres, dient que: "Les estrelles fixes i el Sol són immòbils, és la Terra la que gira sobre el seu eix i al voltant del Sol, descrivint un cercle el centre del qual és ocupat pel Sol, que és també el que fan els planetes". Cal afirmar la seva originalitat, ja que ni Filolau que posava un foc central, que no era el Sol, ni Heràclides del Pont, que només afirmava el gir de la Terra sobre el seu eix sense moure's de lloc i en posició central en el cosmos, poden citar-se com precursors de la idea. I no sabem cap més autor que tingués una concepció semblant. El geocentrisme seguí sent tingut per cert fins al temps de Copèrnic, ja que la teoria havia de tenir capacitat de predicció i la d'Aristarc no s'adequava molt bé a la realitat, era poc precisa.

Eratòstenes de Cirene (apr. 276-194)

Havia nascut a Cirene i estudiat a Atenes, però s'establí a Alexandria fins a la seva mort. Va fer-hi de director de la famosa biblioteca des del 225 aC. Geògraf, filòsof, músic i matemàtic, també es dedicà a un càlcul astronòmic: el de les dimensions de la Terra. El mètode que fou servir ens pot semblar senzill però a l'època fou un avenç important. Alexandria i Siena (l'actual Assuan) són dues ciutats que es troben pràcticament sobre el mateix meridià (uns 794 km, perquè l'estadi egipci era de 157,5 metres). Com que Siena es troba sobre la línia del tròpic el 21 de juny els raigs solars hi cauen perpendiculars. Això ho observà Eratòstenes veient el Sol reflectit en l'aigua del fons d'un pou de la ciutat un 21 de juny que hi anà. I a Alexandria el mateix dia de l'any i tenen una inclinació de 7º 12' que es podien mesurar per l'ombra d'un obelisc. Admetent l'esfericitat de la terra això ens diu que l'angle que fan els radis terrestres d'extrems Siena i Alexandria també és de 7º 12', i aquest angle és una cinquantena part de 360º, per consegüent la longitud del meridià sencer serà de 50 vegades els 5040 estadis o 794 km que hi ha entre les dues ciutats, o sigui 39.700 km. Aquests fou el resultat d'Eratòstenes. Com que en realitat són 40.000 km, l'error comès era petit.

A part d'això, calculà l'obliqüitat de l'eclíptica per la diferència entre les altituds del Sol en els solsticis d'estiu i d'hivern. També va escriure Geographica, l'obra de la qual ens n'han arribat fragments, i Constellationes, que no ens ha arribat i que contenia diuen un catàleg de 675 estrelles, a més d'obres filosòfiques i matemàtiques.

2.1.11. DEDUCCIÓ DEL SISTEMA HELIOCÈNTRIC

Passar del sistema geocèntric al sistema heliocèntric va ser un gran pas, i encara que no tingués molta popularitat en el seu temps, Aristarc va seguir uns passos raonats per a sostenir la seva conclusió.

El sistema del món tenia la Terra al centre, i tots els altres planetes i el Sol orbitant al voltant d'aquesta. Ho expressaven seguint aquest esquema:

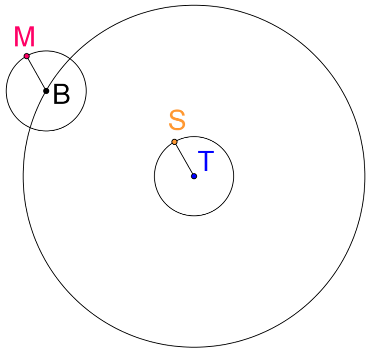


Figura 2.7: Sistema geocèntric.

Els planetes que estan més a prop del Sol (S) que la Terra (T) estarien orbitant al voltant del Sol amb una òrbita circular. La resta ho faria com el planeta Mart (M), on M gira al voltant de B i B gira al voltant de T, agafant distàncies diferents per a cada planeta. Van partir que $MB = ST$. I ST és paral·lel a MB sempre.

Una demostració equivalent a la que va fer Aristarc seria aquesta: Com que la distància *BT* és constant, llavors la distància *MS* també, ja que és igual a *BT* per ser un paral·lelogram. Si col·loquem el Sol a l'origen de coordenades tindrem que el planeta Mart gira al voltant d'ell seguint una trajectòria circular amb radi *BT*.
Dic que la trajectòria de Mart no tindrà canvis de sentit. Imaginem-nos que el punt *B* està quiet. Llavors si Mart i el Sol giren amb la mateixa velocitat angular en les seves circumferències, respecte el Sol, Mart no es mourà. Ara si comencem a moure el punt *B*, Mart tindrà una trajectòria circular, i no tindrà canvis de sentit com volíem demostrar.
La Terra vogirà al voltant del Sol amb una òrbita circular de radi *ST*. Per últim queden els planetes que estan més a prop del Sol que la Terra, però aquests, com hem dit abans orbitaran al voltant del Sol seguint una trajectòria circular.

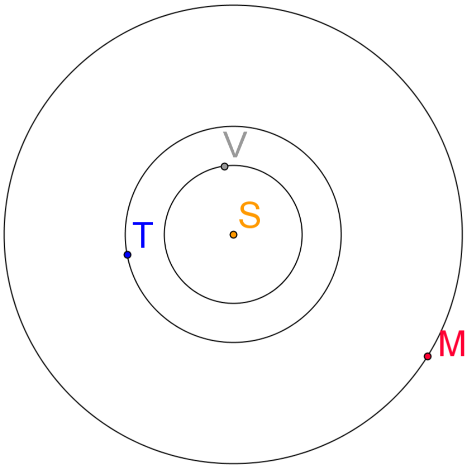


Figura 2.8: Teoria heliocèntrica.

I d'aquesta manera podem deduir que el sistema geocèntric implica el heliocèntric.

Per a una demostració de les teories de Copèrnic i Ptolomeu a partir de la Gravitació Universal de Newton (està clar que la de Ptolemeu i la de Copèrnic no són equivalents amb la de Newton, però sí, fins a un primer ordre d'aproximació) vegeu la referència [2]. Exposa la teoria de Newton i obté les altres a partir d'una degradació d'aquesta

2.1.12. ASTRÒNOMS PRECURSORS DE PTOLEMEU

Apol·loni de Perga (apr. 262-190 aC)

Ha passat a la història com un gran matemàtic. Però també es dedicà a l'astronomia. Va néixer a Perga Pamfília (sud de l'Àsia Menor), i després va estudiar i ensenyar a Alexandria gairebé tota la vida. El seu tractat sobre les seccions còniques consta de vuit llibres, dels quals s'ha perdut el darrer. Va ser ell qui donà nom a les còniques: ellipsis, hiperbole i parabole. Poc pensava ell que feia l'estudi de corbes que, segons la llei de Newton, segueixen els astres per l'atracció gravitatòria.
És precursor de Ptolemeu perquè abans que ell ja va explicar la teoria dels cicles i els epicicles per explicar el moviment dels planetes. El sistema de les esferes homocèntriques d'Èudox no explicava un detall que la visió acurada mostrava, ja que segons aquest sistema tots els astres són sempre a la mateixa distància de la Terra i el diàmetre aparent d'aquests planetes es veu variar al llarg de l'any i això vol dir que de vegades són més a prop i altres vegades més lluny. Apol·loni proposà prescindir de les esferes i posar només cercles. Cada planeta es mouria descrivint un petit cercle, que tindria el seu centre en una circumferència més gran que tindria per centre el de la Terra, de manera que el centre de l'epicicle recorregués el cercle gran. Que Apol·loni deia tot això ho sabem pel mateix Ptolemeu.

Hiparc de Nicea (apr. 180-125 aC)

Va néixer a Nicea Bitínia i va viure gairebé tota la vida a Rodes, on féu totes les seves observacions. Només es conserva una de les seves obres que resulta ser un Comentari a un poema astronòmic d'Arat de Soles. Hi ha un historiador que diu que Ptolemeu es pot considerar com un simple plagiari de Hiparc.

Hiparc tingué un precedent: el mesopotàmic Berossos i això va fer que els grecs s'assabentessin de moltes descobertes dels caldeus. Va aprendre el que ja sabien els babilonis i es va posar a fer observacions personalment. La precisió és una de les característiques d'aquest científic. Va inventar un dispositiu molt enginyós per poder mesurar les variacions de diàmetre del Sol i de la Lluna. Va construir el primer astrolabi per mesurar l'altura dels astres sobre l'horitzó per orientar-se, en la navegació sobretot; i una esfera armil·lar zodiacal. Amb tot això va fer uns càlculs molt exactes del mes sinòdic lunar i de l'any tròpic. Se'n va adonar que el Sol trigava cada any per arribar al mateix punt del zodíac una mica més de 16 minuts que el que trigava per trobar-se al punt exacte de l'equinocci de primavera (el valor real és de 20 minuts i 40 segons). I va esbrinar la precessió dels equinoccis (secció 1.2). L'angle de variació anual de l'eix segons Hiparc resultava ser de 36", metre que en realitat és de 50,29".

Amb el seu mètode de mesurar el diàmetre aparent del Sol arribà a la conclusió que la distància de la Terra a aquest astre varia al llarg de l'any i en tragué la conclusió que la teoria de l'excèntrica era certa. Per als planetes va dir que tant l'excèntrica com la dels epicicles d'Apol·loni podien ser veritat. Tot això ho recollirà Ptolemeu.

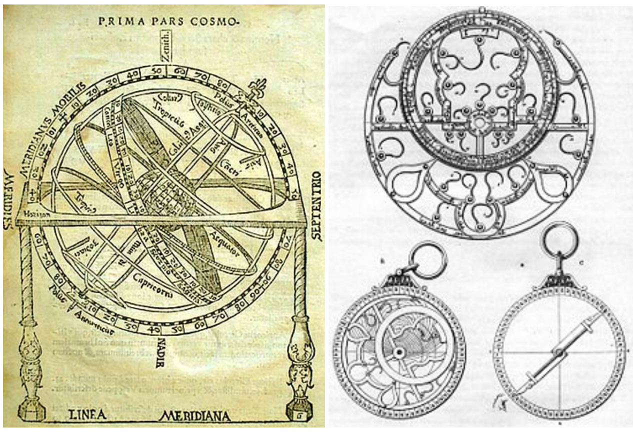


Figura 2.9: De esquerra a dreta: esfera armil·lar zodiacal i astrolabi.

2.1.13. PTOLEMEU, L'ASTRÒNOM MÉS FAMÓS DE TOTA L'EDAT ANTIGA

Claudi Ptolemeu va viure aproximadament entre 90 i 186 dC. A la mort d'Hiparc, a finals del segle II o inicis del I aC, l'astronomia entrà en una fase de decadència que durà més de dos segles. De la seva obra en tenim infinitat de còpies i referències, però desconeixem gairebé tot de la vida de l'autor. Unes referències força segures ens diuen que va néixer a Ptolemaida Hèrmia (Alt Egipte), que va viure gairebé tota la vida a Alexandria, i que va morir a Canop.

La seva obra omple la història de l'astronomia fins a l'edat moderna. El títol primer que se li posà era Syntaxis Mathematica, que es tradueix per "Composició matemàtica". Era un recull de tots els coneixements d'astrònoms precedents amb les pròpies observacions i correccions. Es començà a designar amb l'afegit de la "Gran" o "Grandíssima" Sintaxi, i en grec "grandíssima" es diu megiste i aquesta apel·lació, substantivada, es transmeté al llarg de generacions. Quan els àrabs en feren la traducció hi posaren l'artile al- i, vocalitzant diferent, resulta Al-mageste, o Almagestus en passar al llatí, nom que passà a totes les llengües europees; en català diem Almagest.

Aquesta obra comprèn tretze llibres. El primer és de contingut purament matemàtic. Conté un teorema trobat per ell (el teorema de Ptolemeu: el producte de les diagonals d'un quadrilàter inscriptible en una circumferència és igual a la suma dels productes dels costats oposats). Els altres dotze són càlculs astronòmics.

També va escriure altres llibres: una Optica (que exposa, correctament, la formulació correcta de la reflexió i refracció de la llum), una Geographia, els Harmònics (exposa diverses teories numèriques de la música del seu temps) i el Tetrabiblon (que és un llibre d'astrologia).

L'Almagest no considera acceptable el sistema heliocèntric d'Aristarc de Samos. I en dóna la raó: si veiem exactament iguals les estrelles durant tot l'any no pot ser que la Terra es traslladi (Ptolemeu no comptava amb l'enorme llunyania de les estrelles fixes). Hi ha tota la tradició astronòmica de Plató, Aristòtil, Èudox, Apol·loni i Hiparc que no ha de ser substituïda per l'opinió d'un de sol.

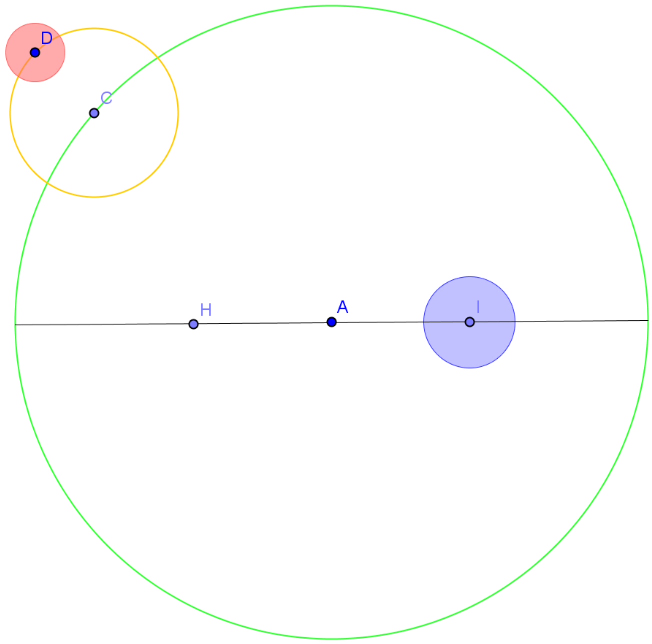


Figura 2.10: Sistema del Món de Ptolemeu.

Conserva les condicions que Plató va posar a Èudox: que l'explicació del moviment dels astres ha de tenir en compte que sigui circular i uniforme. La solució per als planetes serà: cercles deferents, que tindran per centre un punt desplaçat de la Terra (a la figura 2.6 el centre és el punt A i la Terra està separada); i epicicles, cercles que recorreran els planetes amb el centre desplaçant-se al llarg del cercle deferent (al dibuix el punt C es va movent pel cercle verd i el planeta Mart és mou per la circumferència groga). Per a fer que les observacions coincidissin del tot, Ptolemeu va desplaçar el centre de l'epicicle a una velocitat angular constant, entorn d'un punt anomenat equant. L'equant estava situat a un punt oposat al centre de la Terra, respecte del centre deferent. D'aquesta manera l'epicicle anava més de pressa sobre el cercle deferent que quan era prop de la Terra que quan era lluny (al dibuix l'equant és al punt H).

2.2. L'ASTRONOMIA DE L'EDAT MITJANA

2.2.1. ELS ÀRABS CONTINUEN L'OBRA DE PTOLEMEU

A l'Edat Mitjana quasi ningú no fa res per a millorar el contingut de l'Almagest. Caldrà esperar ben bé set segles per tornar a trobar-nos amb astrònoms que facin progressar la ciència dels astres amb noves observacions i recerques. I sortiran d'un poble que fins ara no havia intervingut en el progrés de la ciència: els àrabs. L'astronomia àrab es va fer en dependència de l'Almagest, va corregir, ampliar i millorar moltes coses del que s'hi deia. Realitzà un gran treball amb observacions directes i meticuloses, i les novetats descobertes guanyaran en exactitud les de Ptolemeu. Azarquiel va ser un dels que intervingué: va idear nous instruments (modificacions de l'astrolabi), va escriure diversos tractats sobre astronomia i taules astronòmiques. I Abu Abd Al·lah Muhammad Al-Battani (858-929) l'astrònom més famós d'aquesta època, va fer: un catàleg d'estrelles fixes, el càlcul de la inclinació de l'eclíptica amb un error de mig minut d'arc, els punts dels equinoccis de primavera i tardor amb un de només una hora, i la durada de l'any tròpic amb un d'inferior als tres minuts (ja es veu la gran precisió dels objectes). Va ser en conjunt, certament, un autèntic progrés per a l'astronomia.

2.2.2. ASTRONOMIA ALS PAÏSOS CRISTIANS DE L'EUROPA DELS SEGLES XII-XIII

Seria exagerat afirmar que només els àrabs van fer astronomia durant l'edat mitjana. La seva obra va ser important, no es pot negar, però això no vol dir que els cristians d'Europa deixessin arraconada aquesta ciència. També es cert que a partir del segle XII hi hagué una clara preocupació generalitzada pel seu estudi, va ser en gran part motivada per la influència àrab, però bastant abans ja trobem que, per exemple, San Beda el Venerable (673-735), quan els àrabs encara no havien començat a construir observatoris ni a compondre taules de posicions d'estrelles, feia observacions de caire astronòmic: observa que l'equinocci de primavera ja s'ha avançat tres dies respecte del calendari oficial i ho fa notar; explica que les marees són degudes al moviment de la Lluna (caldrà esperar Newton per tenir-ne una explicació completa).

Els coneixements d'astronomia àrabs entren a Europa per mitjà de traductors que s'apleguen a l'ombra d'una institució, que pot ser un monestir o una escola episcopal. El no dependre dels àrabs va motivar una revisió i elaboració de les taules astronòmiques amb les "Tablas Alfinsíes". L'impulsor de les noves taules va ser el rei de Castella i Lleó Alfons X el Savi. Les Tablas Alfonsíes, que es van anar obrint pas a partir del 1272, contenien cursos mitjans, al llarg de l'any, del Sol, de la Lluna i de tots els planetes; la declinació del Sol; còmput del temps i molts altres detalls. El 1280 ja es publicava, sota la seva protecció, els Libros del saber de Astronomía, que contenien la descripció de les esferes celestes, l'enumeració de les estrelles amb les seves coordenades i l'estudi dels principals instruments astronòmics.

2.2.3. L'ASTRONOMIA A EUROPA ALS SEGLES XIV I XV

Arribem a la Baixa Edat Mitjana. És certament el període de decadència per a la ciència en general. Per això l'astronomia se'n veié afectada. Les causes són ben conegudes: comença una època de fam motivada per les males collites de 1331 fins a l'any 1375 que fou el pitjor de tots, agreujada amb la irrupció de la pesta negra que s'inicià a l'Extrem Orient cap al 1346, arribà a Constantinoble el 1347 i a l'any següent ja s'havia estès a tots els països europeus i al nord de l'Àfrica per la via adels ports, principalment Marsella i Gènova. Així i tot, enmig d'una tribulació tan generalitzada, no cessà pas del tot el cultiu de la ciència. La universitat de París va mantenir l'ensenyament amb els professors no afectats per la pesta.

I en ple segle XIV ens trobem amb un autor que no s'acontenta amb dir que la Terra gira sobre ella mateixa, sinó que ja parla de la possibilitat d'un moviment de translació a l'entorn del Sol: Nicolau de Cusa (1401-1464). Va ser un home de vida eclesiàstica molt intensa, i també un apassionat de la ciència. Pel que es refereix a cosmologia diu que l'espai és finit (cosa que repetiran Descartes i Newton més endavant) i afirma que és més probable que la Terra giri al voltant del Sol que no pas que sigui el Sol que ho faci a l'entorn de la Terra. I en dóna la raó: la Terra no és millor ni pitjor que els altres astres. Ara bé, com que el cosmos és finit, i no hi ha diferència entre espai sublunar i supralunar, i l'estructura del món no es basa en una uniformitat o exactitud, no té sentit que hi hagi concordança en totes les coses, però funcionen harmoniosament. Llavors diu que no hi ha cap dificultat a pensar que la Terra gira al voltant del Sol. En el que diu es declara més pitagòric (harmonia numèrica) que no pas aristotèlic. Quan Copèrnic exposarà l'heliocentrisme reconeixerà que segueix un camí que ja d'altres havien fressat.

2.2.4. ASTRONOMIA DELS JUEUS MEDIEVALS

A part dels àrabs i del món cristià, durant l'edat mitjana hi hagué també cultivadors de la ciència dins del poble jueu que, dispersat per Àsia, nord d'Àfrica i Europa, sobretot a la península Ibèrica, convivint amb musulmans i cristians, no volgué romandre enrere en l'aspecte cultural. I hi hagué jueus que es dedicaren a la filosofia, a la medicina, a les ciències naturals i també a l'astronomia. Destacarem una sola obra, l'Almanach Perpetum. Va ser escrit per Abraham ben Samuel Zacut (apr. 1450-1520, va néixer a Salamanca) i José Vizinho, portuguès, la va retocar. Era una col·lecció de taules per cal·lcular la situació dels planetes en un dia determinat amb gran rapidesa, mentre que amb les taules habituals un astrònom competent necessitava una mitja hora de feina. Abraham Zacut les havia fet seguint la tècnica d'Azarquiel que considerava els cicles d'un nombre enter d'anys solars per a cada planeta i aplicant-hi les Tablas Alfonsíes donaven amb poc càlcul, com hem dit, la posició d'un planeta el dia que fos.

2.3. L'ASTRONOMIA DE L'EDAT MODERNA

2.3.1. NICOLAU COPÈRNIC (1473-1543)

En arribant el segle XVI l'astronomia es diu que fa la "revolució copernicana". La revolució que va fer Copèrnic va ser dir que no és la Terra el centre de l'univers, sinó que és ella la que gira al voltant del Sol i no el Sol a l'entorn de la Terra. Però cal subratllar que no va ser Copèrnic el primer a dir-ho. Ja Aristarc de Samos, al segle III aC, ho va suggerir i també Nicolau de Cusa al segle XV. El mèrit d'aquest astrònom del segle XVI va ser exposar-ho amb càlcul matemàtic detallat que mostrava que tot resultava més senzill si al centre de tots els moviments planetaris, amb la inclusió de la Terra com un planeta més, s'hi posava el Sol (heliocentrisme) que no pas si s'hi posava la Terra (geocentrisme).

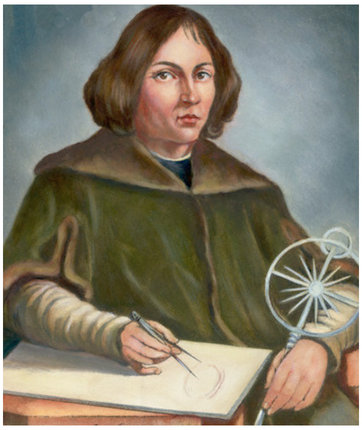


Figura 2.11: Nicolau Copèrnic (1473-1543)

La vida de Copèrnic

Va néixer el 19 de febrer de 1473 a Tourn (en alemany Thorn), ciutat de la riba del Vístula que aleshores pertanyia a Polònia. El seu pare va morir el 1484 i ell fou posat sota la tutela del germà de la seva mare Lucas Watzelrode, canonge -i després bisbe, a partir de 1498- de Frauenburg (Fornbork) a la regió de Warmia (Ermland). Copèrnic, el 1491, sota el guiatge del seu oncle ingressava a la universitat de Cracòvia. Hi cursà estudis fins al 1495. No s'ha conservat la llista dels cursos que hi seguí, però sabem del cert que una assignatura va ser la de matemàtiques. Amb vint-i-dos anys va anar a estudiar dret canònic, filosofia i grec a Itàlia a la universitat de Bolonya. Allà conegué l'astrònom Domenico de Novara i hi col·laborà en les seves observacions. El 1501 tornà a Frauenburg. Fet canonge entrà a l'estament eclesiàstic. El 1503, tornat a Itàlia amb permís del Capítol, es graduà de dret canònic a Ferrara, després d'estudiar medicina a Pàdua. El seu oncle bisbe li donà el càrrec de methe personal seu. L'oncle va morir el 1512. Aleshores Copèrnic va haver de fer administrador de la diòcesi. Publicà De arte monetae cudendae ratio (Mètode per encunyar moneda). Quan els Cavallars Teutònics declararen la guerra a Polònia per recuperar-la, Copèrnic es refugià a la fortalesa d'Olsztyn (Allenstein) fins que es firmà l'armistici el 1520. I tot això ho feu sense deixar de dedicar-se a l'astronomia, per la qual tenia més tirada que per fer d'administrador o comissari.

Sembla que ben aviat, després d'haver-se llegit l'Almagest de Ptolemeu i contrastat amb els pitagòrics i Aristarc de Samos, veié clar que s'havien de deixar de banda els cercles deferents, els epicicles i els superepcicles, perquè tot es feia més senzill posant el Sol al centre amb tots els planetes i la Terra girant al seu voltant. Només la Lluna era clar que ho feia a l'entorn de la Terra. El 1509 ho exposà en un opuscle que només va circular entre els amics, De hypothesibus motuum coelestium a se consitutis commentariolus. Era el germen de la obra que li ocuparia més de vint anys. El 1532 ja la té enllestida, però no es decideix a publicar-la. Fins que el 1539 Joachim von Lauchen, de Tirol, creu en la veritat del sistema heliocèntric i convenç a Copèrnic per que en publiqui un informe-resum (Narratio Prima). I després de l'èxit d'aquesta el 1543, Andreas Osiander supervisa la impressió de Nuremberg, i li porten el primer exemplar a Copèrnic, però ell havia patit una hemorràgia, i poques hores després finava.

El maig de 1543 sortia de la imprenta de Johannes Petreius de Nuremberg el llibre de Copèrnic De revolutionibus orbitum coelestium, libri VI (Sobre les revolucions dels orbes celestes, 6 llibres). Osiander havia escrit un pròleg, sense firmar, que deia, entre d'altres coses, que la teoria copernicana era com una hipòtesi i prou. Copèrnic ho veia d'una altra manera.

Les innovacions introduïdes per l'obra de Copèrnic

Al llibre primer hi ha la descripció de tot l'univers, hem d'entendre el que es aleshores es considerava com univers: el sistema solar, amb el "cel" de les estrelles fixes com a fons. De fet Copèrnic no diu res del conjunt dels estels que considera com un orbe més, el darrer dels orbes que rodegen el Sol, centre de tot. Les afirmacions que fa al llibre I, per explicar l'univers són aquestes:

1. El món (l'univers) és esfèric, i esfèrics també tots els cossos celestes.

2. La Terra també és esfèrica. Muntanyes i valls no modifiquen la rodonesa de la Terra en conjunt.

3. La Terra amb l'aigua fa un sol globus.

4. El moviment dels cossos celestes és perpetu, uniforme i circular. Dient això copèrnic manté la tradició que arrenca des de Plató: al cel tot ha de ser perfecte i, en conseqüència, els moviments dels astres són circulars, perquè la circumferència és la corba més perfecta, i uniformes (a velocitat constant) perquè així no hi haurà imperfecció.

5. A la Terra li correspon un moviment circular. I no tan sols gira sobre si mateixa fent una volta cada dia, sinó que no és el centre del món, "el fet que els planetes es veuen unes vegades més a prop de la Terra i altres més lluny demostra que el centre de la Terra no és el centre dels seus cercles".

6. El cel és immens en relació amb la magnitud de la Terra, ja que els cercles limitadors o horitzons tallen tota l'esfera en dues parts com si la Terra només fos un punt en comparació de l'esfera de les estrelles fixes. I hi afegeix que seria estrany que una immensitat tan gran, com és la de tot el món, fes una volta a l'espai de vint-i-quatre hores que no pas que ho faci la Terra.

7. Els antics es pensaven que la Terra s'estava quieta al mig del món com al seu centre basant-se en la gravetat. Creien que si la Terra es movia es notaria en la caiguda dels objectes i en els núvols que sempre anirien vers l'occident. Però les raons que tenien eren insuficients per a demostrar la immobilitat de la Terra. Per exemple, en una nau solcant el mar els objectes per als mariners bé es veuen parats respecte de la nau, quan aquesta llisca sobre la mar serena.

8. Es poden atribuir a la Terra molts moviments de manera que es pot considerar com un planeta més.

9. L'ordre dels orbes celestes és: el Sol al centre i en cercles concèntrics a continuació: Mercuri, Venus, Terra (amb la Lluna al seu voltant), Mart, Júpiter, i Saturn i l'orbe de les estrelles fixes immòbil.

10. La Terra té tres moviments: el diurn, sobre el seu eix, l'anyal, al voltant del Sol, i el de declinació. Aquest tercer moviment creia Copèrnic que s'havia d'introduir per explicar el manteniment de l'eix paral·lel a si mateix, però és del tot innecessari; es manté per inèrcia.

Tot això era ben nou per a la mentalitat que hi havia en aquella època. Per això Copèrnic no volia publicar, provocaria un impacte molt gran, tot i que al final va passar molt desapercebut. Va ser més tard, ben entrat ja el segle següent quan van tenir importància els seus descobriments.

2.3.2. TYCHO BRAHE (1436-1601)

Figura 2.12: Tycho Brahe

Era danès. De família noble. Va néixer el 14 de desembre de 1546 a Knudstrup (Escània), fill del governador del castell de Helsinburg, Otto Brahe. Aquest tenia un germà, Jörgen, que no tenia fills i abans que Tycho tingués dotze mesos, va passar a viure a casa seva. Als tretze anys va entrar a la universitat de Copenhaguen. El 24 d'agost de 1560, amb un eclipsi de Sol va conèixer l'astronomia i es va posar a estudiar-la, juntament amb el que feia de dret. El 1569 mor el pare i amb el que hereta decideix realitzar el seu somni de fabricar-se instruments de precisió. Va a viure a casa del seu oncle Steen Bille.
L'onze de novembre de 1572 s'adonà que brillava a la constel·lació de Cassiopea una estrella que no havia vist mai. Si fos una estrella llavors el cel no seria immutable, però no era res més que allò. Ho comunicà i els astrònoms M. Mästlin de Tübingen i T Digges de Anglaterra ho verificaren. La resplendor va anar augmentant fins superar la de Venus i després minvà, s'anà apagant i es féu invisible al cap de quinze mesos. Llavors Tycho publica el resultat de les seves observacions el 1575 De nova stella, afegint-hi unes taules astronòmiques calculades per ell. Amb la fama aconseguida el rei Federic II li cedeix un observatori a Hven. El 1577 va fer una troballa interessant: un cometa, que ell demostrava que passava molt més enllà que la Lluna, cosa ben nova per als astrònoms de l'època que, seguint Aristòtil, creien que els cometes, per ser mutables, eren del món infralunar. Això demostrava que més enllà de la Lluna hi poden haver canvis.
Va donar a conèixer, com a fruit de les seves observacions, coses noves que eren a l'abast de tothom. Va ser un bon observador, però no tan bon teòric, Tycho no va admetre l'heliocentrisme de Copèrnic. Creia que el Sol era el centre de les òrbites dels cinc planetes i que girava, com la Lluna, a l'entorn de la Terra que havia de ser el centre del cosmos. Més tard se n'anà al castell de Banatsky, després que el nou rei Cristian IV el fes fora del castell i l'acollís Rudolf II emperador d'Alemanya. Allà conegué Kepler i morí al cap de dos anys, el 1601, per una urèmia aguda causada per no voler orinar a casa d'un noble (per no faltar l'educació). Amb Kepler van està fent les taules astronòmiques Tabulae Rudolphinae, publicades el 1627.

2.3.3. JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Figura 2.13: Johannes Kepler

Va néixer el 27 de desembre de 1571 a Weil der Stadt (Württemberg, Suàbia) de família humil. Als quatre anys havia patit una malaltia greu que l'havia deixat mig tolit d'una mà, curt de vista i delicat de salut. Als tretze anys amb la protecció dels ducs de Württemberg, ingressà al seminari d'Adelberg. El professor M. Mästlin li explicà la teoria de Copèrnic i s'hi adherí. Als vint anys es graduà a la facultat de teologia de Tübingen. El 1594 fou proposat per a la càtedra de matemàtiques a Graz i ell l'acceptà. El 1595 es proposa de resoldre el problema de les distàncies dels planetes al Sol. El 9 de juliol li sembla haver vist la sol·lució: els cinc "sòlids perfectes" (els cinc poliedres regulars) es poden encaixar entre les orbes dels planetes (o sigui les esferes que contenen les òrbites), el cub entre Saturn i Júpiter, el tetraedre entre Júpiter i Mart, el dodecaedre entre Mart i la Terra, l'icosaedre entre la Terra i Venus i l'octaedre entre Venus i Mercuri, de tal manera que cada cos geomètric està inscrit en un orbe i circumscrit a l'altre. D'això en fa un llibre, Prodromus dissertationum mathematicarum continens mysterium cosmographicum (Introducció d'unes dissertacions matemàtiques que conté el misteri cosmogràfic). És el llibre que, publicat el 1596, llegirà Brahe i farà que el cridi a viure amb ell. Així esdevenia hereu de les precises observacions dels planetes fetes per Brahe, quan aquest morí. Kepler s'adonarà, més tard, del poc fonament que hi havia al seu Prodromus i establirà uns altres principis per a les distàncies planetàries.

Les lleis de Kepler

En morir Tycho Brahe, es trobà Kepler amb la llista d'observacions que l'astrònom danès havia fet del planeta Mart. I es posà a treballar-hi. Com a bon matemàtic va voler esbrinar a quina mena de trajectòria corresponia el moviment d'aquest planeta. Però no era fàcil resoldre el problema. Li calgueren sis anys per trobar una cosa nova, diferent dels sistemes del món coneguts com el de Ptolemeu, Tycho i Copèrnic. Ho publicà en l'Astronomia Nova (1609) i Harmonices Mundi (1619). Al primer hi ha les dos primeres lleis i al segon la tercera llei. Són aquestes:

1a Giren tots al voltant del Sol, com deia Copèrnic, però no fent un cercle, com deien Plató i els seus seguidors, sinó descrivint una el·lipse, i no amb el Sol al centre sinó en un dels focus d'aquesta el·lipse.

2a No tenen un moviment uniforme, la seva velocitat no és constant sinó que varia en dependència a la seva distància al Sol. El planeta va més de pressa quan hi és a prop i més lent quan n'està més lluny. Matemàticament: el radi vector que uneix el planeta al Sol descriu (o escombra) àrees iguals en temps iguals. És la "Llei de les àrees".

3a Els quadrats dels temps que triga cada planeta per fer la volta completa al Sol són proporcionals als cubs dels semieixos majors de les el·lipses que descriuen al seu entorn.

Les tres lleis de Kepler establien uns principis matemàtics per al curs dels astres que, tot i tenir base observacional, no van tenir l'acceptació deguda per part dels astrònoms de l'època. També va publicar Dipotrice (1611), tractat d'òptica, i Epitome Atronomiae Copernicanae (1618-21). Els mèrits de Kepler no foren prou reconeguts pels seus contemporanis. Va morir pobre a casa d'un estrany, als 59 anys d'edat, a causa d'un constipat que agafà cavalcant a ple hivern per anar a Ratisbona per cobrar dotze mil florins que li devia el monarca per les classes que impartia com a càtedra de matemàtiques de Linz.

2.3.4. GALILEO GALILEI (1564-1642)

Figura 2.14: Galileu Galilei

Galileo Galilei (en català Galileu) va néixer a Pisa. De jovenet s'educà al monestir de Vallombrosa. Als disset anys entrà a la universitat per estudiar medicina com volia el seu pare. Però un dia anà a sentir una conferència de geometria i s'hi entusiasmà. Demanà al seu progenitor que li deixés estudiar matemàtiques i ciències. Així es feu. Però no va poder acabar els estudis perquè arribà un moment que li negaren la beca i hagué de tornar a casa. Però això no l'impedí d'estudiar pel seu compte. El 1583 publicava la troballa que havia fet de l'isocronisme del pèndol en fixant-se en el balanceig d'unes làmpades de la catedral. El 1604 va formular la llei de la caiguda dels cossos. Com que era difícil de mesurar el temps en caigudes verticals va fer servir plans inclinats i com a rellotge feia servir el propi pols, un instrument semblant a una clepsidra, o mitjançant la interpretació d'una partitura en la qual sabia quin fragment de partitura havia tocat. I trobà que l'espai recorregut era proporcional al quadrat del temps emprat per recorre'l. Era un mètode experimental i hipoteticodeductiu: formulava una hipòtesi a partir d'uns fets i comprovava si eren vàlides les conclusions que se'n deduïen.

El 1608 llegeix un informe portat a Itàlia per un tal Giovanni della Porta sobre la troballa que s'havia fet a Holanda d'un joc de dues lents que multiplicaven l'augment de la visió. S'interessa i se'n fa un. En diu occhiale. Era un telescopi molt senzill de 32 augments. I comença a mirar el cel per veure com són els astres. Per senzill que fos aquell instrument li aportà moltes novetats:

1a Que la Lluna no és perfectament rodona i té muntanyes semblants a les de la Terra i formacions circulars (circs). I dibuixà un primer esbós del mapa lunar.

2a Que hi ha "taques" al Sol. No era el primer a adonar-se'n (el P. Scheiner ja les havia vistes) però si el primer a publicar-ho. I en deduí, a més, que el Sol gira sobre ell mateix cada 25 dies aproximadament i que el seu eix de rotació és lleugerament inclinat, no vertical del tot respecte l'eclíptica.

3a La troballa més important: el planeta Júpiter té quatre "estrelletes" que giren al seu voltant. O sigui satèl·lits. Marius els va anomenar amb noms mitològics: Ió, Europa, Ganimedes i Cal·listo.

4a Que el planeta Venus presenta fases com la Lluna. Això vol dir que no té llum pròpia, cosa que també va passar amb els altres planetes.

5a Que hi ha al cel moltes més estrelles que les que es veuen a simple vista. La Via Làctia no és un núvol sinó una gran concentració d'estels més llunyans. L'univers es més gran del que es creia.

6a Que el planeta Saturn no és una esfera com els altres sinó "triple" (no va copsar els seus anells i li va semblar que era com una esfera amb dues esferetes als costats, cosa que el deixà molt intrigat).

Tot això ho publicà el 1610 en un opuscle de 60 pàgines, Siderus Nuncius magna longeque mirabilia spectacula pandens (Missatger astral que mostra grans i admirables espectacles). A partir d'aquí esclatar la fama de Galileu. El duc de Toscana el fa venir a Florència a fer de Primario matematico e filosofo. El 1611 entra en l'Accademia dei Lincei, i rep felicitacions dels papes, primer de Pius V i després d'Urbà VIII. Però ja sabem què passà quan es posà a defensar l'heliocentrisme. El 1616 el cardenal Bellarmino li féu prometre que no ho faria més. I ell obeí, però només per un temps. El 1632 publicava el seu famós Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, que li causa una condemna que el va recloure a la seva vida d'Arcetri els darrers anys de la seva vida. Hem de dir que el seu heliocentrisme no era correcte, va rebutjar les lleis de Kepler. Creia en les òrbites circulars de Copèrnic.

2.3.5. ISAAC NEWTON (1642-1727)

Newton va fer avançar notablement els coneixements científics en quatre camps importants: en òptica (establint les balances de l'òptica moderna), en mecànica (va enunciar-ne les lleis fonamentals amb les seves conseqüències), en matemàtiques (amb la invenció del "càlcul de fluxions") i en astronomia (amb la formulació de la llei de la gravitació universal, que donava l'explicació de tots els moviments dels astres). Hi ha qui diu que Newton ocupa el lloc més important de tots en la història de la ciència.

Figura 2.15: Sir Isaac Newton

Va sobrepassar els 84 anys encara que havia nascut prematur i malaltís. Va néixer a Woolsthorpe (Linconshire) el dia de Nadal del mateix any de la mort de Galileu. El seu pare havia mort uns mesos abans i quan ell tenia tres anys la mare es tornà a casar i el deixà a casa l'àvia. Començà a anar a escola, a Grantham, quan ja tenia onze anys. Pel seu compte llegia i anotava coses, procedents de la petita biblioteca del farmacèutic Clark i dedicava molt del seu temps a construir aparells mecànics de joguet posant en ells grans dosis d'observació i d'habilitat mecànica. Al cap de quatre anys la mare torna a enviudar i l'en tragué perquè prengués cura de les feines de la finca que ella havia heretat del segon marit. Un oncle seu, després de trobar-lo resolent un problema de geometria i veient les aptituds del noi, convencé a la mare que l'enviés a estudiar a Cambridge. Hi va ingressar com a servidor. Newton es graduava el 1665 als vint-i-tres anys. Aquell mateix any la pesta féu tancar les portes de la universitat. Newton tornà a casa, però no va interrompre els seus estudis. Més encara, segons ell mateix, el temps que hagué de passar a Woolsthorpe va ser l'època de la plenitud de les seves facultats creadores. Moltes de les descobertes publicades posteriorment ja les havia fet ara.

Tornà a Cambridge el curs 1666-67, i dos anys després el professor Barrow, que l'hi havia fet classes, renunciava a la càtedra lucasiana que posseïa a favor del jove Newton de vint-i-sis anys, que és lliurà totalment a la ciència. No es va casar mai. El 1672 fou elegit membre de la Royal Society, que fins a la mort de Hooke, el 1703, no va ser-hi com a president, càrrec que exercí fins a la mort. El 1693 va ser el seu annus horribilis, perquè va tenir una caiguda mental que ratllava la bogeria. Les causes van ser l'esgotament per l'excés de treball i poc descans. El 1696 el feien interventor de la Casa de la Moneda i hagué de deixar la càtedra. El 1699 n'era el director. El 1705 rebia un títol nobiliari. I va morir apreciat de tothom el 20 març de 1727, als vuitanta-quatre anys i tres mesos.

La seva obra: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Principis matemàtics de filosofia natural)

Per "filosofia natural" a aquell temps s'entenia gairebé el mateix que el que ara anomenem física. Newton va escriure aquesta obra a instàncies d'Edmund Halley (1656-1742, astrònom). El 1684 Halley havia parlat amb Hooke sobre el tema de les òrbites planetàries i anà a trobar a Newton, amb qui s'avenia prou, per preguntar-li com hauria de ser la trajectòria dels planetes en el cas que entre els cossis hi hagués una força que minvés com el quadrat del a distància .Newton contestà al moment: "En òrbites el·líptiques". Ja ho havia calculat l'any de la pesta. Halley li demanà que ho publiqués i Newton digué que havia de refer els càlculs que ja no tenia. Halley l'animà a fer-ho i Newton al cap de tres mesos lliurava a Halley un escrit Propositiones de Motu Corporum in gyrum que es presentà a la Royal Society. Se li demanà aleshores que ho exposés en un llibre tot allò que allí es trobava en germen. I finalment accedí. Així sorgia l'obra dels Principia que li ocupà quinze mesos de feina. Es pogué publicar el 1687 gràcies a l'ajuda econòmica de Halley.

A la tomba de Newton s'hi posà la inscripció (de Faito): "Alegrin-se els mortals que hagi existit un tal i tan gran ornament del llinatge humà", pel gran mèrit d'haver reduït una sola llei tots els moviments dels astres.

CAPÍTOL 3

Alguns fonaments físics per a estudiar el moviment del cosmos

Aquest capítol inclou tots els conceptes que s'han de saber per a poder esbrinar i calcular la trajectòria que portarà un cos, a partir de la seva posició i velocitat inicials. Els utilitzarem al capítol 5 i a un problema del capítol 4 (el d'integració numèrica d'una trajectòria).

3.1. LES LLEIS DEL MOVIMENT DE NEWTON

3.1.1. PRIMERA LLEI

"Qualsevol cos conserva el seu estat de repòs o de moviment rectilini uniforme tret que se l'obligui a canviar per mitjà d'alguna força."

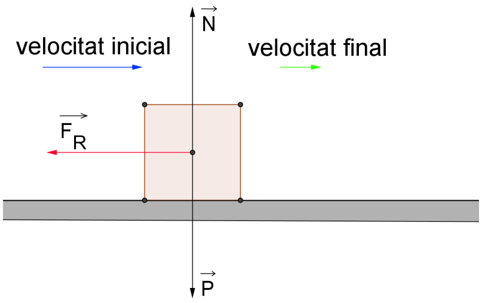


Figura 3.1: El cos té una força de fregament, la seva velocitat final canvia, té un M.R.U.A. (moviment rectilini uniformement accelerat).

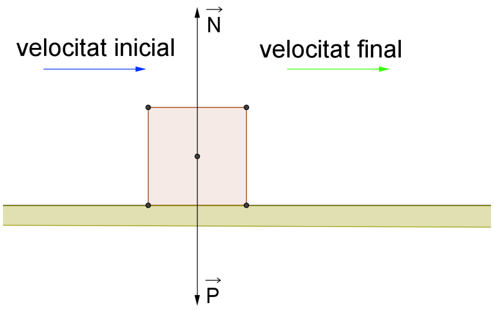


Figura 3.2: El cos no té força de fregament (superfície ideal), la seva velocitat final no canvia, M.R.U. (moviment rectilini uniforme).

És a dir, si no apliquem cap força a un cos, aquest no canvia el seu estat. El cas en què el cos està quiet, és evident, però si porta un moviment rectilini uniforme ja és més difícil de convèncer-se. Per a entendre'l suposem que tenim un cos que es mou amb una velocitat inicial en dos superfícies diferents, la que tardarà més en parar-se serà la que tingui menys fregament (vegeu la figura 3.1.). Si tinguéssim una superfície ideal que no hi hagués fregament, aleshores el cos no pararia (figura 3.2.). Per això, si no hi ha cap força exterior el cos conserva el seu estat inicial.
També es coneguda com a llei de la inèrcia. Amb inèrcia es refereix a la resistència dels cossos a variar el seu estat si no se'ls aplica una força.

3.1.2. SEGONA LLEI

"El canvi de la quantitat de moviment d'un cos és proporcional a la força."

Aquesta llei és coneguda també com llei fonamental de la dinàmica. Derivant la quantitat de moviment $\vec{p}$ respecte del temps, l'expressió matemàtica és:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{\left(m \cdot \vec{v}\right)} = \dot{m} \cdot \vec{v} + m \cdot \dot{\vec{v}},$$

on, $\vec{F}$ és la força resultant, m la massa i $\vec{v}$ la velocitat del cos.
Si tractem amb casos en què la massa és constant, aleshores $\dot{m} = 0$. I podem escriure la força amb l'expressió que coneixem de l'escola:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

L'evidència d'aquesta llei és pot trobar experimentalment. Considerem una persona que està estirant un carro amb una corda a la superfície de la Terra, com més força faci més accelerarà el carro, o el que és el mateix, com més vulgui accelerar el carro, més força haurà de fer.
Si la massa varia, com en un coet, aquesta expressió no és certa.
El sistema de referència cal que sigui inercial, és a dir, que no estigui accelerat.

3.1.3. TERCERA LLEI

"Per a qualsevol acció sempre hi ha una reacció oposada i igual; o de manera semblant, les accions de dos cossos que s'oposen són sempre iguals i sempre de direcció oposada."

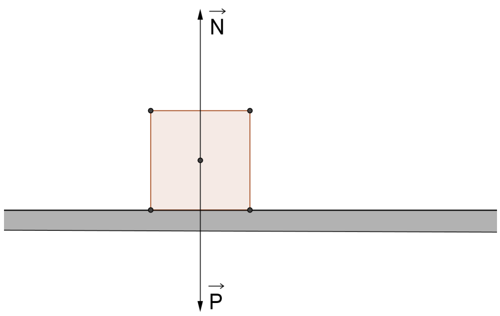


Figura 3.3: El cos exerceix una força (acció) sobre el terra ($\vec{P}$) i el terra exerceix una força (reacció) sobre el cos ($\vec{N}$).

També és coneguda com la llei d'acció i reacció. Dit d'una altra manera: si una partícula A exerceix una força sobre B, la partícula B exerceix sobre A una altra força igual en mòdul i direcció, però de sentit contrari.
Segons aquesta llei les forces mai apareixen soles sinó de dos en dos. Hem de tenir en compte que cada una d'aquestes forces s'exerceix a cossos diferents. D'aquesta manera s'entén que cada variació de velocitat d'un objecte ha de provocar la variació de velocitat d'un altre, per petita que sigui.

3.2. COORDENADES POLARS I CÒNIQUES

3.2.1. COORDENADES POLARS

A física s'utilitzen diferents tipus de coordenades segons l'adequació d'aquests amb els problemes a tractar. En aquest cas utilitzarem les coordenades polars.

Les coordenades polars es defineixen en un pla a partir de la distància des de l'origen de coordenades fins al punt elegit (el vector que uneix aquests dos punts s'anomena radi-vector) i l'angle que formen aquest radi-vector amb l'eix d'abscisses d'un sistema de referència cartesià aleatori.

Per a referir-nos a un sistema de coordenades en un pla necessitarem dos versors (vectors unitaris) que donin una base, és a dir, linealment independents entre si. S'elegeix un dels components de la base el versor dirigit en la direcció del radi-vector i que anomenem versor radial ($\overrightarrow{u_r}$), i l'altre l'elegim girant el versor radial $\pi/2$ radians en el sentit del gir, és el versor transversal ($\vec{u_t}$).

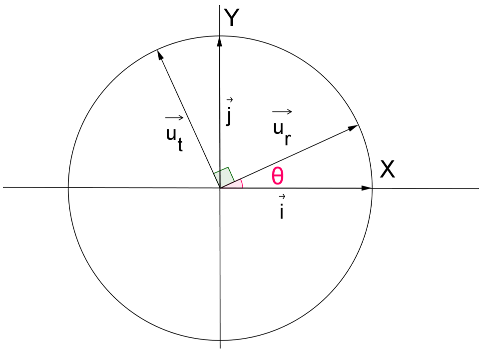


Figura 3.4: Coordenades polars i versor radial i transversal.

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\overrightarrow{u_t} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{j}$$

Els versors polars varien amb la posició del punt, de manera que si aquest depèn d'un paràmetre t, aleshores el versor radial (i també el transversal) també variaran. Calculem com són aquestes variacions:

$$\dot{\overrightarrow{u_r}} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_t},$$

$$\dot{\overrightarrow{u_t}} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r},$$

on $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ és la derivada respecte del paràmetre t.

Per tant, veiem que la derivada d'un versor polar és linealment dependent de l'altre versor, cosa que és un avantatge ja que fa innecessari el càlcul de la derivada segona dels versors, que trobarem al desenvolupament de la teoria gravitatòria.

3.2.1.1. LA DERIVADA PRIMERA I SEGONA DE LA POSICIÓ AMB POLARS

Tenim que, per definició, el vector de posició d'un punt en polars té la forma $\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$ on r és el mòdul o distància i $\overrightarrow{u_r}$ el versor radial. Anem a veure com és el vector velocitat:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_t}.$$

El primer terme de la suma equival a la velocitat radial i el segon a la velocitat transversal (existeix si varia l'angle θ, és a dir, si no és un moviment en una dimensió).

En el cas de l'acceleració tenim:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_t} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_t} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{u_t}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_t}.$$

El primer terme equival a l'acceleració radial i en ell es pot diferenciar el terme corresponent a l'acceleració del cos i a l'acceleració centrífuga (que s'oposa a ell); el segon terme equival a l'acceleració tangencial i es diferencia entre l'acceleració de Coriolis i l'acceleració angular.

3.2.1.2. CONVERSIÓ DE COORDENADES POLARS I RECTANGULARS

Serà útil conèixer com convertir de coordenades rectangulars a polars i viceversa per a la secció següent, on deduirem l'equació en forma polar de les còniques.

Conversió de coordenades polars a rectangulars

Amb un angle θ sobre l'eix x, i la seva distància r al centre de coordenades definim un punt en coordenades polars, aleshores les coordenades rectangulars seran:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Conversió de coordenades rectangulars a polars

Amb les coordenades rectangulars definim un punt (x, y), llavors la coordenada polar r és:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(aplicant el Teorema de Pitàgores)}$$

Per a deduir les equacions polars no utilitzarem la coordenada angular θ.

3.2.2. CÒNIQUES

Són imprescindibles per a saber com són els moviments dels cossos quan en el sistema n'hi ha dos.

Aquestes corbes a l'antiguitat ja es coneixien, a la subsecció 2 .1.11. hem citat a un matemàtic que es va dedicar a elles, Apol·loni de Perga. Les corbes còniques són el resultat de l'intersecció d'un con amb un pla. Depenent de la posició del pla respecte del con generarem diferents còniques:

3.2.2.1. EL·LIPSE

Quan el pla no és paral·lel a cap generatriu del con, la cònica serà una el·lipse. I es pot demostrar que aquesta és el lloc geomètric dels punts del pla els qual tenen la suma de les distàncies a dos punts fixos anomenats focus constant (=2a). Sabent això podem deduir la seva equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ amb coordenades rectangulars, on a i b són els semieixos major i menor; l'eix menor coincideix amb l'eix d'ordenades i el punt mig de l'eix major està a l'origen de coordenades. L'excentricitat és la raó entre la distància d'un punt al focus i a una recta anomenada directriu. La de l'el·lipse és igual a $e = \frac{c}{a}$, com $c < a,\ 0 < e < 1$. I també podem veure que $b^2 = a^2 - c^2$ pel Teorema de Pitàgores.

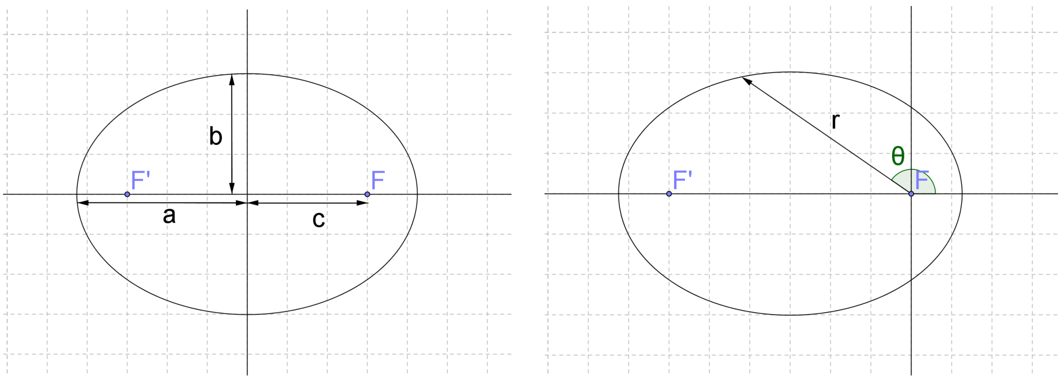


Figura 3.5: D'esquerra a dreta: el·lipse on l'origen de coordenades coincideix amb el punt mig dels focus i el·lipse centrada en un dels focus.

Amb coordenades polars, on r és la distància del focus F al punt i θ és l'angle comprès entre r i l'eix x en sentit antihorari. Pel Teorema de Pitàgores:

$$r^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 + b^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2 = (a - ex)^2,$$

aquí podem agafar $r_{F'} = ex - a$ o $r_F = a - ex$. Com que ha d'estar centrada en el focus F, $x - c = r\cos\theta$. Si $x = a$, $a - c = r$. Per tant, el valor correcte és r_F. Finalment, fem unes quantes operacions per obtenir r:

$x - c = r\cos\theta \to x = c + r\cos\theta$

$$r = a - ex = a - ec - er\cos\theta \to r = \frac{a - ec}{1 + e\cos\theta} = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta}.$$

I la distància del punt *a* cada focus serà :

$r_F = a - ex$, $r_{F'} = a + ex$, $r_1 + r_2 = 2a$,

on r_F és la distància del punt al focus F i $r_{F'}$ la distància del punt al focus F'.

3.2.2.2. HIPÈRBOLA

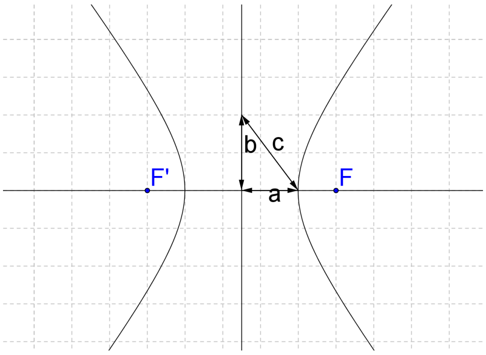


Figura 3.6: Hipèrbola.

Quan el pla d'intsersecció amb el con és paral·lel a dos generatrius. Es pot demostrar que és el lloc geomètric dels punts del pla els quals la resta de les distàncies a dos focus és constant (=2a). Amb això traiem l'equació amb coordenades cartesianes que la defineix $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. On a és igual al semieix major, b al semieix menor (imaginari) i c a la distància de l'origen als focus. Té l'origen de coordenades centrat en el punt mig dels dos focus. El sentit del nombre b el dóna Teorema de Pitàgores, $b^2 = c^2 - a^2$. L'excentricitat és $\frac{c}{a}$, com $c > a$, $e > 1$. Passem-ho a coordenades polars, on r és la distància del focus F' al punt i θ és l'angle comprès entre r i l'eix x en sentit antihorari. Pel Teorema de Pitàgores:

$$r^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 - b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 - b^2 = e^2x^2 + 2eax + a^2 = (a + ex)^2,$$

el valor de r pot ser $a + ex$, o $-(a + ex)$. Quan $x = -a$, $-a + c = r\cos 0$. Per tant, el valor que agafarem és $r = -(a + ex)$. Fem els últims càlculs per obtenir l'equació polar:

$r = -(a + ex)$, $x + c = r\cos\theta$

$$r = -a - e(r\cos\theta - c) \to r = \frac{ec - a}{1 + e\cos\theta} = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{1 + e\cos\theta}$$

I la distància del punt a cada focus serà :

$r_{F'} = -(a + ex)$, $r_F = -(ex - a)$, $|r_1 - r_2| = 2a$,

on $r_{F'}$ és la distància del punt al focus F' i r_F la distància del punt al focus F.

3.2.2.3. PARÀBOLA

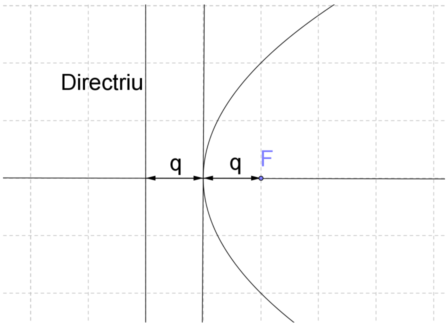


Figura 3.7: Paràbola.

Quan el pla d'intersecció amb el con és paral·lel a una generatriu. Això equival a dir que és el lloc geomètric dels punts del pla els quals equidisten a una recta fixa anomenada directriu ($x = -q$) i un punt fix anomenat focus. L'equació amb coordenades cartesianes és $y^2 = 4qx$. On q és la distància de l'origen al focus. L'excentricitat és igual a 1. Anem a deduir la seva fórmula amb polars col·locant la directriu $x = 2q$ i el focus a l'origen. Pel teorema de Pitàgores:

$$r^2 = (-(x-q))^2 + y^2 = x^2 - 2qx + q^2 + 4qx = (x+q)^2,$$

obtenim que $r_{F_1} = x + q$ o $r_{F_2} = -(x+q)$. Al valor d'abscissa $x = 0$, $q = r\cos 0$. Per tant, el vàlid en aquest cas és r_{F_1}. I si substituïm i aïllem r:

$$r = x + q \rightarrow r = \frac{2q}{1+\cos\theta}$$

Si comparem les equacions polars de les còniques podem veure que totes són de la forma: $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, on el paràmetre p depèn de la cònica.

3.3. FORMULACIÓ DE LES LLEIS DE KEPLER AMB MATEMÀTIQUES

Per a poder treballar amb les lleis de Kepler (exposades a la subsecció 2.3.3. juntament amb el resum de la biografia de Kepler), necessitem expresar-les matemàticament.

3.3.1. LLEI DE LES ÒRBITES

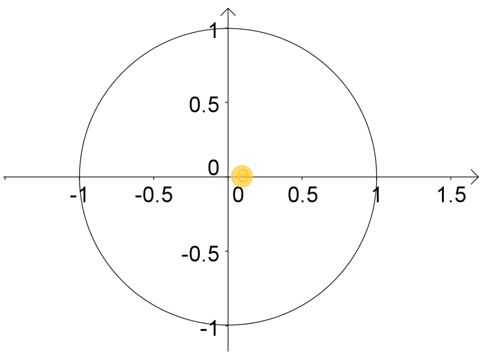


Figura 3.8: Òrbita de Mart amb el Sol en un dels focus, l'excentricitat és molt poca (0.093315), per això té tan merit el descobriment de Kepler. L'origen de coordenades marca el punt mig dels dos focus.

Els planetes descriuen òrbites el·líptiques al voltant del Sol amb aquest en un dels focus. Si situem el Sol en un dels focus i anomenant r a la distància entre el Sol i el planeta tenim que:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

on p és el paràmetre de la cònica (si és una el·lipse, $p = a\left(1-e^2\right)$) i θ és l'angle comprès entre el radi vector (vector que uneix el Sol i el planeta) i el periheli (punt de la òrbita d'un planeta més proper al Sol).

A la realitat, aquesta llei es pot generalitzar dient que si al sistema solament hi ha dos cosos, els cossos descriuen trajectòries còniques. Si sapiguéssim resoldre equacions diferencials ho podríem demostrar a partir de la fórmula de la Gravitació Universal i les lleis de Newton.

3.3.2. LLEI DE LES ÀREES

El radi vector descriu (o escombra) àrees iguals en temps iguals.

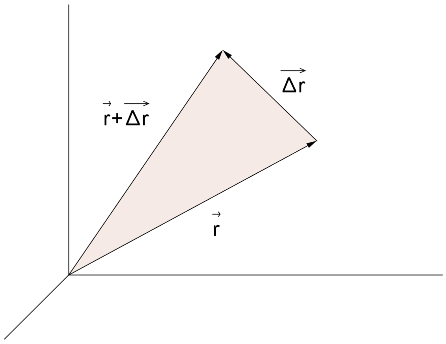


Figura 3.9: Àrea d'un triangle i els vectors laterals.

Per a calcular l'àrea del triangle de la figura 3.9 necessitem el producte vectorial de dos vectors, aquest dóna el doble del vector superfície del triangle el mòdul del qual serà igual al doble de la àrea del triangle. És a dir, $\vec{r} \times \left(\vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}\right) = \vec{r} \times \overrightarrow{\Delta r} = 2\,\overrightarrow{\Delta A}$.

$$\dot{\overrightarrow{\Delta A}} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta A}}{\Delta t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{1}{2}\frac{\vec{r}\times\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\dot{\vec{r}}.$$

Segons la segona llei de Kepler aquesta velocitat areolar és constant, llavors tenim que amb polars el mòdul és:

$$\left|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right| = \left| r\,\overrightarrow{u_r}\times\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_t}\right)\right| = r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_c} = 2\,\vec{c} \Rightarrow r^2\,\dot{\theta} = 2\,c\ .$$

3.3.3. LLEI DELS PERÍODES

El quadrat del període del moviment al voltant del Sol de qualsevol planeta és directament proporcional al cub del semieix major de la seva òrbita.

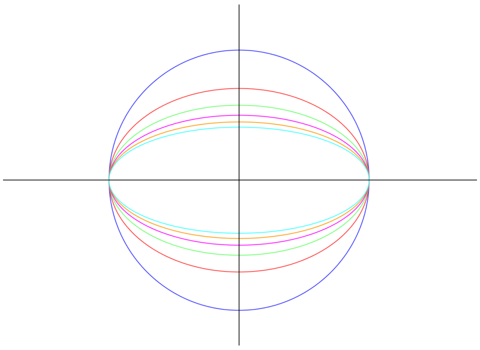


Figura 3.10: Totes les òrbites còniques de la figura tenen el mateix eix major, per tant per la tercera llei de Kepler tindran el mateix període.

És equivalent a:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{T''^2}{a''^3} =. .. = \lambda.$$

Sol és vàlida quan la massa d'un dels cossos implicats és menyspreable davant la massa de l'altre cos.

3.4. LA LLEI DE LA GRAVITACIÓ UNIVERSAL

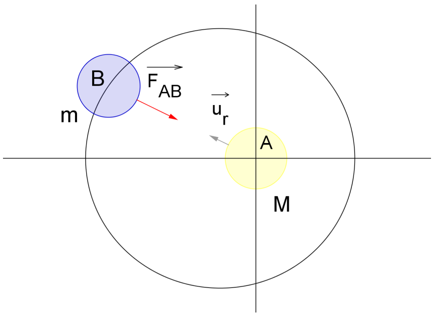


Figura 3.11: Esquema de la força atractiva del cos A.

Llei de la gravitació universal de Newton: $\overrightarrow{F_{\mathrm{AB}}} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$, on G és una constant, M i m la massa dels dos cossos involucrats, r la distància entre els dos cossos, $\overrightarrow{u_r}$ el radi vector que uneix el cos A amb el B i el signe menys mostra el caràcter atractiu de la força. El cos A atreu al cos B, la força representada al dibuix 3.11. I recíprocament el cos B atreu al cos A, aquesta força d'atracció no està dibuixada a la figura 3.11, però existeix, a la demostració veurem com està relacionada amb $\overrightarrow{F_{\mathrm{AB}}}$. Aquesta fórmula sol s'ha d'utilitzar quan es treballa amb masses puntuals.

Demostració

La segona llei de Newton de la mecànica clàssica diu que $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Si tenim en compte el valor de l'acceleració fragmentada en els 2 versors polars que hem tret anteriorment queda:

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{AB}}} = m\left(\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_t}\right). \tag{0.1}$$

Com que la funció del mòdul de la velocitat areolar que per mitjà de la llei de les àrees de Kepler sabem que és constant la derivada d'aquesta és 0, i tenim que:

$$r^2\,\dot{\theta} = 2\,c \Rightarrow\ 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\,\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r\left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right) = 0.$$

Al ser la distància dels dos cossos diferent de 0, llavors $2\,\dot{r} + r\,\ddot{\theta} = 0$ i el valor de l'acceleració tangencial serà 0. Si tornem a la relació que hem obtingut per la segona llei de Kepler, $r\,\dot{\theta}^2 = \frac{4\,c^2}{r^3}$, recordem que és equivalent a l'acceleració centrífuga. Falta trobar quan val l'acceleració radial. De la primera llei de Kepler sabem que:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},\ \text{i la derivada primera i segona :}$$

$$\dot{r} = \frac{p\left(e\sin\theta\,\dot{\theta}\right)}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{p^2\left(e\sin\theta\,\dot{\theta}\right)}{p(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{r^2\left(e\sin\theta\,\dot{\theta}\right)}{p} = \frac{2\,c\,e}{p}\sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{2\,c\,e}{p}\cos\theta\,\dot{\theta} = \frac{4\,c^2\,e}{r^2\,p}\cos\theta.$$

El valor de l'acceleració radial és:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = \frac{4\,c^2\,e}{r^2\,p}\cos\theta - \frac{4\,c^2}{r^3} = \frac{4\,c^2}{r^2}\left(\frac{e}{p}\cos\theta - \frac{1}{r}\right) = \frac{4\,c^2}{r^2\,p}(e\cos\theta - (1 + e\cos\theta)) = \frac{-4\,c^2}{r^2\,p}.$$

Si substituïm el valor de l'acceleració radial a l'equació (2.1) queda:

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{AB}}} = m\,\frac{-4\,c^2}{r^2\,p}\,\overrightarrow{u_r} = \frac{-4\,c^2}{p}\,\frac{m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} = -k_{\mathrm{AB}}\,\frac{m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}.$$

Per la tercera llei de Newton sabem que si la força (acció) que realitza el cos A sobre B existeix, llavors hi ha una força de B sobre A (reacció) amb el mateix mòdul, la mateixa direcció i sentit contrari. És a dir, $\overrightarrow{F_{AB}}$=-$\overrightarrow{F_{BA}}$. Això equival a: $k_{AB}\, m = k_{BA}\, M$. Llavors tenim que:

$$\frac{k_{AB}}{M} = \frac{k_{BA}}{m} = G.$$

Si s'escriu el valor de k_{AB} en funció de la massa i una constant, finalment obtenim:

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}.$$

3.5. EL MOMENT ANGULAR

3.5.1. MOMENT D'UN VECTOR RESPRECTE D'UN PUNT

El moment d'un vector lliscant $\vec{V}$ respecte d'un punt O és el producte vectorial:

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r}\times\vec{V},$$

on $\vec{r}$ és el vector de posició respecte d'O del punt del d'aplicació del vector $\vec{V}$. Mirar la figura 3.12 per veure un exemple de moment d'un vector respecte d'un punt, el moment angular.

3.5.2. MOMENT ANGULAR D'UNA PARTÍCULA

Considerem una partícula de masa m i sigui O un punt fix. Anomenem moment angular o cinètic de la partícula respecte del punt O, el vector $\overrightarrow{L_O}$ definit per:

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$$

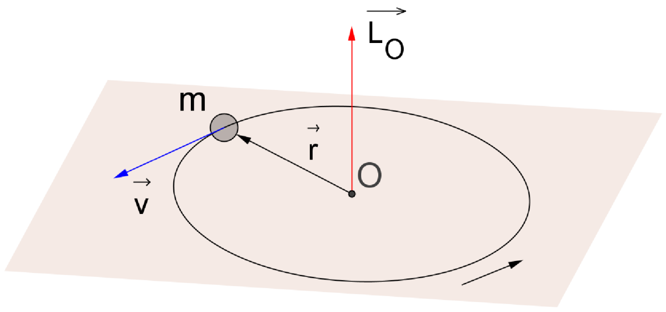


Figura 3.12: Moment angular respecte del punt O.

on $\vec{r}$, $\vec{v}$ i $\vec{p}$ representen, respectivament, el vector de posició, la velocitat i la quantitat de moviment de la partícula respecte d'aquest punt.

Per definició de producte vectorial, el moment angular és un vector perpendicular al pla format per $\vec{r}$ i $\vec{v}$; i el seu sentit es dedueix de les regles que defineixen aquest producte, com per exemple la regla de la mà dreta.

3.2.2.1. TEOREMA DEL MOMENT ANGULAR I TEOREMA DE LES ÀREES

Estudiem la derivada del moment angular respecte del temps:

$$\dot{\overrightarrow{L_O}} = (\dot{\vec{r}\times\vec{p}}) = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

Tenint en compte que :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = 0,$$

doncs els vectors $\vec{v}$ i $\vec{p}$ tenen la mateixa direcció, la derivada queda :

$$\dot{\overrightarrow{L_O}} = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M_O}$$

sent $\overrightarrow{M_o}$ el moment de la força resultant respecte del punt O.

Teorema del moment angular: *La derivada del moment angular d'una partícula respecte del temps amb relació a un punt fix O, és igual al moment de la força resultant en relació al mateix punt O.*

Teorema de les àrees

La llei de la gravitació de Newton implica la 2a llei de Kepler.

Demostració

Hem de demostrar que la velocitat areolar és consant. És a dir, que $\dot{\overrightarrow{\Delta A}} = k$.

Com que el vector de les força central que uneix un cos amb l'altre té la mateixa direcció que el vector de posició podem escriure que: $\overrightarrow{M_O} = 0$. Llavors la derivada del moment angular respecte del temps també serà zero pel Teorema del moment angular. La velocitat areolar queda:

$$\dot{\overrightarrow{\Delta A}} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{|\overrightarrow{L_O}|}{m},$$

que és una constant.

Aquest resultat el podem ampliar, tot camp central també ho compleix.

3.6. EL CENTRE DE MASSES

Definició

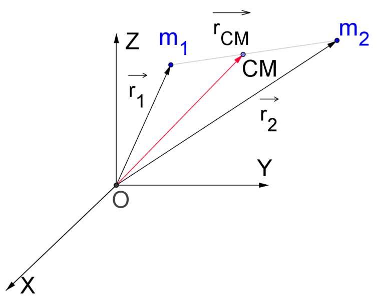


Figura 3.13: Posició del centre de masses en el sistema de referència (O, X, Y, Z).

El centre de masses (CM) d'un sistema de partícules és un punt la massa del qual és la total del sistema i la seva posició ve donada per l'expressió vectorial:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{M}$$

on $\overrightarrow{r_{CM}}$ és el vector de posició del centre de masses del sistema en el sistema de referencia, m_i les masses que formen el sistema de partícules i r_i el seu vector de posició.

Propietats del centre de masses

La fórmula que dóna la posició del centre de masses, no és així perquè sí. És un punt que té unes propietats que el fan molt útil, com hem dit, en certs problemes. Podem calcular l'acceleració del centre de masses derivant els dos membres de l'equació:

$$\overrightarrow{\ddot{r}_{\mathrm{CM}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\ddot{r}_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \; M\overrightarrow{\ddot{r}_{\mathrm{CM}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$$

com que les forces internes s' anulen entre sí, queda que l'acceleració del centre de masses és igual al sumatori de les forces externes:

$$M\overrightarrow{\ddot{r}_{\mathrm{CM}}} = \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}.$$

Si expressem les forces externes com la derivada de la quantitat de moviment i integrem als dos costats de l'equació obtenim:

$$\vec{p} = M\overrightarrow{\dot{r}_{\mathrm{CM}}} = \overrightarrow{p_{\mathrm{CM}}}$$

Que equival a dir que la quantitat de moviment del sistema és igual a la quantitat de moviment del centre de masses.

Per a què les lleis de moviment de Newton es compleixin el sistema de referència ha de ser un sistema galileià. És a dir, si es pot obtenir fent una Transformació de Galileu a un sistema de referència inercial.

El centre de masses pot ser l'origen d'un sistema de referència galileià si les forces externes són igual a zero (sistema referència galileià = sistema de referència inercial).

CAPÍTOL 4

Càlculs astronòmics amb el Python

Tal i com diu el títol del capítol, en aquest calcularem diversos problemes d'astronomia, però abans haurem de conèixer una eina molt important, un llenguatge de programació.

4.1. PYTHON, UN LLENGUATGE DE PROGRAMACIÓ

L'ordinador una de les funcions que té és resoldre problemes per mitjà de programes. Aquests són: les aplicacions per a disciplines específiques, programes que s'utilitzen en àrees especialitzades de coneixement; i les eines de programació, programes que permeten o faciliten a l'usuari el disseny, la creació i la depuració de programes nous.

El llenguatge de programació és un conjunt de instruccions específiques úniques a cada eina de programació. D'aquests podem distingir:

·Els de baix nivell: codi de màquina i llenguatges assembladors.

·Els d'alt nivell: llenguatges que permeten interaccionar amb l'usuari d'una manera més intuïtiva que els de baix nivell. D'aquests podem trobar de dos tipus:

·Els compiladors: tradueixen programes d'alt nivell a codi de màquina. Aquesta màquina el podrà llegir tantes vegades com vulgui sense traduir-lo un altre cop.

·Els intèrprets: es caracteritzen per traduir el programa d'alt nivell cada vegada que s'utilitza. Té un avantatge, si tens instal·lat el programa per traduir-lo, serveix per a qualsevol màquina.

Per a resoldre diversos problemes i càlculs astronòmics, he fet anar el *Python*, un llenguatge intèrpret de molt alt nivell, fàcil de llegir. *Python*, que vol dir pitó (el nom d'una família de serps) amb anglès, ha estat dissenyat per Guido van Rossum i està en un procés de desenvolupament continu amb una gran comunitat d'especialistes. Encara que cada versió nova que treuen és compatible amb tots els programes escrits amb les versions anteriors. Jo he utilitzat la versió 2.6 de *Python*. És gratuït i la seva web de descàrrega és: http://www.python.org/.

Les seves característiques són:

·*Python* és un llenguatge molt expressiu, i els seus programes solen ser més curts que els equivalents a llenguatges com C.

·*Python* és molt llegible.

·*Python* ofereix un entorn interactiu que facilita la realització de probes i ajuda a aïllar dubtes relacionats amb les característiques del llenguatge.

·*Python* detecta molts errors de programació en l'entorn d'execució.

·*Python* pot utilitzar-se com un llenguatge imperatiu procedimental o com un llenguatge orientat a objectes.

·*Python* posseeix un ampli ventall d'estructures de dades que es poden manipular fàcilment.

L'aprenentatge del *Python* és fa amb l'ordinador a mà i a força de provar programes i exercicis que poden proporcionar manuals de programació. És completament diferent a aprendre una llengua estrangera. La programació utilitza la lògica i no hi ha excepcions, tampoc té gran quantitat de vocabulari i les estructures (la sintaxi) s'ajusten a diversos patrons fixos.

El *Python* permet utilitzar tot tipus de mòduls, que són un conjunt de funcions que realitzen diferents operacions i també poden aportar constants i dades específiques. D'aquests utilitzarem: el *PyEphem*, que el farem servir per a realitzar càlculs astronòmics de gran precisió; i el *math*, que és un mòdul que realitza operacions matemàtiques i conté constants matemàtiques.

El *PyEphem* està basat en el programa astronòmic *XEphem* creat per Elwood Downey. Té unes llibreries que contenen efemèrides de cossos celestes i permet fer càlculs amb la posició d'aquests tenint en compte efectes com la precessió i nutació de la Terra, o la refracció atmosfèrica.

No sempre utilitzarem el *Python*, en el capítol següent farem ús del *Mathematica*, un manipulador algèbric i llenguatge de programació. Aquest té una sintaxi molt senzilla i és de més alt nivell que el *Python*. Com es veurà, fan que les programes siguin molt més entenedors i que no es cometin tants errors, imprescindible per a la tasca que realitzarem. Això no vol dir que no s'hagin d'aprendre a utilitzar programes com el Python, ja que tenen els seus avantatges per no ser de tant alt nivell i tenir infinitat de mòduls en què s'aprofita el que ha pogut programar una altra persona per a fer uns altres programes.

És sorprenent com alguns programes realitzen les mateixes funcions tot i ser diferents. No hi ha unes regles d'aplicació directa per a resoldre els problemes com a les matemàtiques, on, per exemple, una demostració és una successió coherent de passos que, suposant certa una proposició (hipòtesis), permet assegurar que una altra proposició (tesis) també ho és.

S'ha d'utilitzar la creativitat i la imaginació per a sintetitzar al màxim el nostre programa i que sigui el més ràpid possible de calcular per a l'ordinador. Un petit error pot portar, a vegades, resultats molt diferents als esperats.

Aquests programes poden ser una bona manera d'introduir-se a dos móns alhora, al món de la programació i al món dels càlculs astronòmics.

Hi ha dos tipus de càlculs astronòmics que fem amb el *Python*, els que utilitzem el mòdul *PyEphem* i els que solament utilitzem el *Python* i coneixements d'astronomia.

Com a tota introducció de qualsevol llenguatge de programació, anem a veure un exemple que donarà una idea de com funciona:

4.1.1. EXEMPLE PER APRENDRE A LLEGIR PROGRAMES ESCRITS AMB EL PYTHON

Anem a escriure un programa que calcularà la posició d'uns gats que estan en els vèrtexs d'un triangle equilàter amb els costats de 1000 unitats de longitud cadascun. Es mouen de la manera següent: cada gat va a buscar el de la seva dreta i amb velocitat constant.

Per sobre de tot, és important que sapiguem quin signe prenen les operacions matemàtiques elementals en el llenguatge:

Taula 4.1 Signes matemàtics del Python

Operació	Operador	Precedència
Suma	+	4
Resta	−	4
Multiplicació	*	3
Divisió	/	3
Mòdul	%	3
Exponenciació	**	1
Igual que	==	5
Diferent de	!=	5
Menor que	<	5
Menor o igual que	<=	5
Major que	>	5
Major o igual que	>=	5

Si volem que una divisió doni de resultat un nombre decimal hem de fer que el dividend o el divisor siguin decimals.

El programa següent l'escriurem seguint un ordre, i si el volem executar al nostre intèrpret de *Python* cal mantenir-lo aquest ordre fins al final. El programa estarà compost per totes les parts de codi de la subsecció.

Una manera de fer els programes més llegibles i reduir el nombre d'errors és definint funcions. Aquestes realitzen un conjunt de passos prefixats i donen un resultat. Les variables que s'utilitzen a l'interior de la funció no són accessibles des de fóra, d'això se'n diu variables locals. Per a calcular el vector unitari d'un vector del pla ho farem amb aquesta funció:

```
def v_unitari(u):
    if u==[0,0]:
        return [0,0]
    else:
        return [float(u[0])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5,\
            float(u[1])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5]
```

El la barra invertida \ indica que l'ordre que s'estava escrivint continua a la línia següent. No ho confonguem amb la divisió.

La lletra *u* és un paràmetre que serà substituït pel paràmetre real quan utilitzem la funció. Aquesta màquina per a calcular el vector unitari d'un vector del pla la cridarem utilitzant: *v_unitari*([*x*, *y*]).

Aquí veiem una sentencia condicional *if*, aquesta no permet que, quan el vector sigui nul es realitzi l'operació per a trobar el vector unitari. Si no hi estés, aleshores el programa al rebre un vector nul respondria amb un error. La sentència *if*, avalua si l'expressió de la seva dreta és certa, si no ho és no permet que s'executi el paràgraf que va després dels seus dos punts. En aquest cas si l'expressió és falsa passa a executar el que hi ha a *else*.

La funció *float* converteix un nombre en un decimal, ho fem per a què la divisió operi amb decimals. L'operador d'indexació, *u*[*n*], escriurà el nombre de la posició *n* (el primer és el 0) de la llista *u*. Un exemple.

```
>>> a = [1,2,3,4]
>>> a[0]
1
>>> a[4]
Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell#3>", line 1, in <module>
    a[4]
IndexError: list index out of range
>>> a[3]
4
```

Quan està fora del rang de nombres de la llista ens torna un error.

Sempre hi ha casos en què el programa no funciona, i si no els captem, al cridar-lo pot ser que doni errors. Hem d'analitzar bé com respondrà amb qualsevol dada que li introdueixi l'usuari. També ens en podem assegurar amb alguns exemples.

```
>>> v_unitari([0,0])
[0, 0]
>>> v_unitari([3,4])
[0.59999999999999998, 0.80000000000000004]
>>> v_unitari([8,6])
[0.80000000000000004, 0.59999999999999998]
>>> v_unitari([0,1])
[0.0, 1.0]
>>> v_unitari([0,2])
[0.0, 1.0]
```

Tots aquests resultats donen nombres decimals de menys de 2 xifres, com és que el *Python* en torna més? Perquè com sabeu, els ordinadors treballen amb el sistema binari i hi ha divisions que amb el sistema decimal no són periòdiques, però amb el binari sí. Al convertir-les a sistema decimal arrossega una part dels decimals periòdics. De pas, dic que els nombres decimals segueixen la norma *IEEE Standard 754*. *Python* utilitza el format de doble precisió. Amb aquest es poden representar nombres tan pròxims a zero com 10^{-323} o de valor absolut tan gran com 10^{308}.

Si escrivim qualsevol cosa en una línia que comenci amb ♯ l'ordinador passarà a la següent sense llegir-la.

Ara passarem a escriure el programa que calcularà les posicions dels gats. Després d'importar els mòduls (si n'hi ha) i definir les funcions, assignarem les variables. En aquest cas seran unes llistes de dos nombres, que seran les coordenades del radi vector de cada gat. Aleshores quedarà:

```
♯Definició funcions:
def v_unitari(u):
    if u ==[0,0]:
        return [0,0]
    else:
        return [float(u[0])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5 ,\
            float(u[1])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5]

♯Assignació variables:
gat_1 = [0,0]
gat_2 = [0,1]
gat_3 = [0.5,(0.75)**1/2]
```

El nom de les variables i les funcions el podem escriure amb l'accent (si en té), el *Python* ho permet fer.

Tenim un problema, com fem que la computadora calculi les posicions dels gats a mesura que passa el temps? Una manera de fer-ho seria anar calculant-ho nosaltres pas a pas, però seria una mica feixuc. Hi ha una manera més ràpida per a fer-ho, abans d'aplicar-ho als gats, calculem la suma dels nombres del 1 al 9:

```
s = 0

for n in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]:
    s += n

print s
```

Les novetats:

· *for* és un iterador, aquest realitza la operació que ve després tantes vegades com elements hi ha a la llista que ve després de *in*. Al començament de cada iteració n pren el valor següent de la llista, en ordre d'esquerra a dreta. El primer valor que agafa és el primer de la llista.

· s += n equival a $s = s + n$

· Podem simplificar escriure llistes de nombres molt llargues escrivint la funció *range*, que pren un valor inicial a i un final b, amb $a < b$. La llista equivalent a $range(a, b)$ seria $[a, a+1, a+2, \ldots, b-1]$. La funció $range(0, a) = range(a)$. També ho podem complicar una mica més afegint un tercer *paràmetre*, aquest indicarà l'increment de la sèrie de valors, és a dir, $range(a, b, c) = [a, a+c, a+2\,c, a+3\,c \ldots]$, sempre sense incloure b. Si posem $c = -1$, llavors hem d'escriure $a > b$.

Finalment, ja estem preparats per a escriure la versió final i representar la trajectòria que seguiran:

```
#Definició funcions:

def v_unitari(u):
    if u ==[0,0]:
        return [0,0]
    else:
        return [float(u[0])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5 ,\
            float(u[1])/(u[0]**2 + u[1]**2)**0.5]
def v_suma (u,w):
    return [u[0] + w[0],u[1] + w[1]]

def v_resta (u,w):
    return [u[0] - w[0],u[1] - w[1]]

def v_increment_posició_gat (gat_perseguit,gat):
    return v_unitari(v_resta(gat_perseguit,gat))



#Assignació variables:

gat_1 = [0,0]
gat_2 = [1000,0]
gat_3 = [500,(75e4)**0.5]

#Cos del programa

for n in range(1000):
    print '{%f,%f,%f},' % (gat_1,gat_2,gat_3)

    gat_1 = v_suma(v_increment_posició_gat(gat_2,gat_1),gat_1)

    gat_2 = v_suma(v_increment_posició_gat(gat_3,gat_2),gat_2)

    gat_3 = v_suma(v_increment_posició_gat(gat_1,gat_3),gat_3)
```

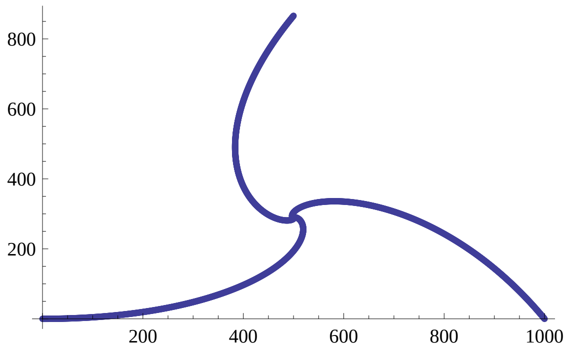


Figura 4.1: Gràfic que representa el moviment de 3 gats que es mouen a velocitat constant. Cada un va a buscar el de la seva dreta. Les posicions inicials són els vèrtexs d'un triangle equilàter.

L'únic element desconegut del programa són els nombres seguits de *e n* que és equivalent a $nombre \cdot 10^{n}$. Podeu notar que hem afegit tres funcions més per a simplificar el codi i reduir els errors. A la figura 4.1 es pot veure el resultat final.

Si volguéssim que els gats anessin a més velocitat, hauríem de multiplicar el vector increment de posició pel valor de la velocitat. Com menys velocitat agafem, la posició serà més precisa.

4.2. PROGRAMES AMB EL PYTHON

Amb els càlculs astronòmics podem fer dos coses, o utilitzar el que ve integrat amb el *PyEphem* o crear-ne un. El *PyEphem* dóna totes les funcions fabricades, per això he pensat que cal conèixer com es pot muntar algun càlcul abans de llançar-nos de cap a utilitzar-lo. El *PyEphem* és molt precís, fins i tot té en compte variables com la pressió atmosfèrica, la temperatura a l'hora de calcular. Nosaltres no arribarem tant lluny, però serem capaços de conèixer bé les formes de localitzar els astres partint de les efemèrides.

4.2.1. UN RELLOTGE DE TEMPS SIDERI

Al capítol d'astronomia, l'1, vam transmetre una manera per a saber l'azimut d'una estrella en qualsevol moment. Només feia falta un rellotge de temps sideri i un anuari astronòmic. De l'anuari astronòmic extraiem la seva ascensió recta i declinació. En aquest apartat resoldrem el problema de conèixer l'hora sidèria. Al següent, trobarem la posició de l'astre.

A partir de l'hora sidèria d'un dia concret, calcularem l'hora per a qualsevol dia posterior a aquest, sabent el temps solar mitjà (UTC). Caldrà saber quants dies han passat i algunes dades més que les aconseguirem amb diverses funcions. Abans de programar el rellotge sideri farà falta definir algunes funcions prèvies.

Els anys de traspàs

Aquesta funció discernirà els anys que són de traspàs dels que no ho són. És imprescindible per a comptar els dies que han transcorregut fins a un dia determinat.

Al capítol d'astronomia, a la secció de les mesures del temps, a la 1.3.2., expliquem quan un any és de traspàs. Tenint la definició present podem escriure el programa següent:

```
def Any_traspàs(Any):
    if Any % 4 == 0:
        if Any % 100 == 0:
            if Any % 400 == 0:
                resultat = 1
            else:
                resultat = 0
        else:
            resultat = 1
    else:
        resultat = 0
    return resultat
```

Ja és ben sabut que % és un operador que torna el residu de la divisió. Adoneu-vos que la sagnia de les expressions és molt important, el que està sagniat marca tot el que ha de fer si la condició és certa. El *Python* gràcies a això és molt llegible, a més a més, les sagnies les fa automàtiques.

Torna 0 si no és de traspàs i 1 si ho és. Uns quants exemples ens diran si funciona bé.

```
>>> Any_traspàs(1600)
1
>>> Any_traspàs(1800)
0
>>> Any_traspàs(2000)
1
>>> Any_traspàs(2004)
1
```

Comptador de dies

Cal comptar els dies per a saber les hores solars que han transcorregut des del dia en què sabem l'hora sidèria. Normalment, l'hora sidèria que es sol donar és la del 31 de desembre a les 00:00 hores. D'aquesta manera fins a l'1 de gener de 2010 haurà passat un dia, fins al 10 de gener 10 dies, etc. Per això hem de comptar els dies que hi ha entre avui i el primer dia de l'any 2010, suposant que volem calcular l'hora sidèria durant el dia d'avui.

El *Python*, ara, ja sap si un any és de traspàs o no n'és amb la funció anterior. Per a comptar els dies entre l'1 de gener i qualsevol dia utilitzarem la funció següent:

```
def comptador_dies(Any, mes, dia):
    gen = 31
    feb = 28 + Any_traspàs(Any)
    mar = 31
    abr = 30
    mai = 31
    jun = 30
    jul = 31
    ago = 31
    sep = 30
    octu = 31
    nov = 30
    des = 31
    mesos =[gen,feb,mar,abr,mai,jun,jul,ago,sep,octu,nov,des]

    s_dies = 0

    for n in range(mes - 1):
        s_dies += mesos[n]

    s_total = s_dies + dia

    return s_total
```

Sumem els dies de mesos complets menys el del darrer, que pot ser que no sigui complet, a *s_dies* (suma dels dies fins el mes). Després afegirem els dies del mes present obtenint la *s_total* (suma total).

No ens hem de descuidar d'afegir un dia si és un any de traspàs. Els programes es poden fer molt més curts no escrivint tantes variables i posant-ho tot molt més compacte, però perden llegibilitat. S'ha d'arribar a un punt intermedi.

Comptador d'hores

Tenint un comptador de dies podem fer un comptador d'hores que han transcorregut des de l'1 de gener de 2010. Ja veurem per a què és necessari.

Primer calculem les hores que hi ha fins a l'1 de gener de l'any en què estem. Després calculem quants dies sumen tots els anys anteriors fins arribar a l'1 de gener de l'any 2010, i quantes hores. I finalment si sumem aquestes dues quantitats tenim les hores totals.

```
def comptador_hores(Any, mes, dia, hora):
    hores_Any = comptador_dies(Any,mes,dia)*24 + hora

    s_dies_fins_Any = 0
    for n in range(1,(Any-2010)+1):
        s_dies_fins_Any += 365 + Any_traspàs(Any-n)

    hores_fins_Any = s_dies_fins_Any * 24

    hores_totals = hores_Any + hores_fins_Any

    return hores_totals
```

El bucle que hi ha està escrit de manera que el primer valor de *n* sempre sigui l'1. Si estem a l'any 2010, aquest no calcularà res, si estem a l'any 2011, calcularà quants dies té l'any 2010, etc.

Convertidor de sexagesimal a decimal i a la inversa

La notació sexagesimal a nosaltres ens va molt bé per a expressar els angles i les hores, però l'ordinador prefereix la decimal -i nosaltres també- per a fer càlculs. Per tant, hem de fer un pont per a què pugui traduir aquests dos tipus de notació.

```
from math import floor
def sexag2decimal(llista):
    hora = llista[0]
    minut = llista[1]
    segon = llista[2]
    return hora + minut/60.0 + segon/3600.0

def decimal2sexag(h):
    hora = floor(h)
    m = (h - hora)* 60
    minut = floor(m)
    segon = (m-minut)*60

    return [hora,minut,segon]
```

Hem d'utilitzar la funció floor que trunca els nombres decimals, per això la importem del mòdul *math*. Aquest càlcul que sabem fer des de petits l'ordinador ens el fa amb menys d'una mil·lèsima de segon. Els sexagesimals els introduirem amb una llista *[hores, minuts, segons]*. Podem comprovar que funciona bé sabent que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

```
>>> decimal2sexag(sexag2decimal([16,5,47]))
[16.0, 5.0, 46.999999999999886]
```

Traductor d'hora usual a hora sidèria

Com que hem dividit tot el que s'ha de fer en moltes parts, ara el programa que traduirà l'hora és molt llegible i breu. La

Aquí hi ha la versió. La funció és la *solar2sid*, i se li han de donar uns paràmetres amb les característiques següents:

· L'any, el mes, el dia i l'hora, han de ser d'una data posterior a 2009/12/31 a les 00 : 00.

· L'hora i la longitud s'han d'escriure com a llistes en notació sexagesimal, *[graus, minuts, segons]*.

· Després de la longitud escriurem la seva orientació. Si és Est, ho indicarem amb una *'E'* i Oest amb una *'O'* - important no deixar-se les cometes.

· Per acabar, recordo que és molt important escriure l'hora amb UTC, no el de la nostra zona horària.

Després explicaré algun dels passos que segueixo en la computació.

```
# Hora sidèria inicial a la data 2009/12/31 00:00 = 6:38:13.47 a Greenwich
# Assignació variables externes
hores_solar_dia_sideri = 23.93446959
relació = 24 / hores_sid_dia_solar
hora_sid_ini = 6.6370749999999994

def solar2sid(Any, mes, dia, hora_UTC, longitud, orientació):

    # Assignació de les variables internes
    hora = sexag2decimal (hora_UTC)
    longitud = sexag2decimal (longitud)

    # comptar les hores
    hores_totals = comptador_hores (Any, mes, dia, hora)

    # Hora sidèria a Greenwich
    horasidèria_green = (hora_sid_ini + relació*hores_totals)%24

    # Variació de temps
    increment_de_temps = longitud/360*24

    # Longitud positiva o longitud negativa
    signe = 1
    if orientació=='O':
        signe == -1

    # Hora sidèria nostra
    horasidèria = horasidèria_green + signe*increment_de_temps

    # Separar resultats fora de l'interval de 24 hores
    if horasidèria < 0:
        horasidèria += 24
    elif horasidèria >= 24:
        horasidèria -= 24

    return decimal2sexag (horasidèria)
```

El que faig primer és introduir quantes hores solars que té un dia sideri. Tot seguit assignem la relació entre les hores sidèries i les hores solars, 24 hores sidèries són 23 hores, 56 minuts i 4,09 segons solars. Al multiplicar aquesta relació per les hores solars tindrem com a resultat les hores sidèries equivalents. També assignem l'hora sidèria del dia inicial.

Si avancem en el programa trobem el càlcul de l'hora sidèria a Greenwich en el moment en què estem i l'assignem a la variable *horasidèria_green*. Té dos parts, primer calculem quantes hores sidèries han passat, i després fem la divisió per 24 i agafem el residu.

Si ens trobéssim a Greenwich no faria falta calcular els tres punts següents. Però si no hi estem hem de fer-los. Estar clar que el punt d'Àries passa primer pel nostre meridià que pel de Greenwich si estem a l'Est d'aquest, i per tant, tindrem l'hora sidèria avançada respecte la de Greenwich. Si estem a l'Oest passa abans a Greenwich, aleshores, tindrem l'hora sidèria retardada respecte de la de Greenwich. Aquest fet es dóna perquè la volta celeste gira d'est a oest. Ara bé, aquesta diferència la podem calcular, és el temps sideri que tarda la Terra entre el pas del punt d'Àries pel nostre meridià i el pas del punt d'Àries pel de Greenwich. Haurà de córrer-se tants graus com el valor absolut de la longitud del lloc. I multiplicant per un factor de conversió que passa de graus a hores sidèries, sabem quan és aquesta diferència. Després caldrà sumar-la a l'hora sidèria de Greenwich si estem a l'Est d'aquest, i restar-la si estem a l'Oest d'aquest.

Finalment hem de corregir les hores que retorna si fa falta. Si passen o són iguals a 24 hores els restarem 24 hores i si són més petits que 0 hores els sumarem 24 hores. En aquest càlcul utilitzem els condicionals *if* i *elif*. El primer ja sabem com s'utilitza, però el segon és una simplificació de dos condicionals que ja coneixíem. Fixem-nos en l'exemple, les dues funcions són equivalents.

```
>>> def absolut(a):
    if a > 0:
        return a
    elif a < 0:
        return -a

>>> def absolut2(a):
    if a > 0:
        return a
    else:
        if a < 0:
            return -a
>>> for n in range(-1,2):
    print absolut(n)==absolut2(n)


True
True
True
```

4.2.1.1. COMPROVACIÓ DEL RELLOTGE

Una manera senzilla de que funciona per al meridià de Greenwich seria aquesta:

```
>>> dif = 24 - hores_sid_dia_solar
>>> hora = hores_sid_dia_solar - dif
>>> hora_sid = solar2sid(2010,1,1,[hora,0,0],[0,0,0],'O')
>>> print hora_sid
[6.0, 38.0, 13.469999999985021]
```

Sabent que l'hora solar en què volem que calculi l'hora sidèria ha de ser igual a l'hora sidèria del 31 de desembre del 2009 a les 00:00. I efectivament, és així.
Per a comprovar-ho per a diferents longituds s'ha d'utilitzar un altre rellotge sideri, com per exemple el del *PyEphem*.

4.2.2. QUIN ÉS L'ANGLE HORARI D'UN ASTRE?

Una vegada ja tenim un rellotge sideri, es poden fer càlculs per trobar les posicions de les estrelles o d'un planeta (si considerem que durant un dia tindrà la mateixa coordenada equatorial celeste) al nostre cel. El concepte que hi ha al darrere és fàcil, però ens permetrà saber on dirigir el telescopi per a trobar una estrella o astre en qualsevol moment, que és molt important.
El còmput el farem a partir de la data del dia en què fem l'observació, les nostres coordenades, i les coordenades equatorials celestes de l'astre en el dia d'avui (les podem treure d'un anuari astronòmic).
El valor de l'angle horari (subsecció 1.4.3.) hem dit que és igual a l'hora sidèria menys l'ascensió recta de l'astre. Al tenir el nostre rellotge sideri no costa molt programar el següent:

```
def a_horari(Any,mes,dia,hora_UTC,longitud,orientació,a_recta):
    hora_sidèria = sexag2decimal(solar2sid(Any,mes,dia,hora_UTC,longitud,orientació))
    a_horari = hora_sidèria - sexag2decimal(a_recta)

    if a_horari >= 12:
        a_horari -= 12
    elif a_horari <= -12:
        a_horari += 12

    return decimal2sexag(a_horari)
```

Per a fer-lo funcionar hem d'haver definit les funcions per a tenir un rellotge sideri a partir de l'hora de temps universal.

4.2.3. QUAN PASSARÀ UN ASTRE PEL MEU MERIDIÀ?

Important les funcions del rellotge sideri, podem crear un programa que, donant-li les coordenades equatorials celestes d'un astre, les nostres coordenades, i la data d'avui (excluida l'hora), trobi a quina hora de temps universal passarà el cos celeste pel nostre meridià.
Aquest problema es redueix a un problema de passar l'hora sidèria a l'hora solar, ja que l'astre passarà pel nostre meridià quan l'hora sidèria sigui igual a l'ascensió recta (subsecció 1.4.3.). Però la solució no seria un traductor com el que hem fet pel rellotge sideri, aquí només sabem l'hora sidèria, falta el dia, el mes i l'any sideri. De totes formes podem fer un traductor que a partir de l'hora sidèria, l'any, el mes i el dia solar, retorni l'hora amb temps universal.
Al lector que hagi entès els programes anteriors, podrà fer-ho amb aquest. Tot i així, si hi ha algun aspecte que no queda clar, després del programa ve una explicació.

```
#Assignació variables externes:
relació_solar_sid = 1 / relació

def sid2solar(Any_solar,mes_solar,dia_solar,longitud,orientació,h_sid):
    #Calculem l'hora sidèria a les 0 hores UTC:
    h_sid_0 = sexag2decimal(solar2sid(Any_solar,mes_solar,dia_solar,\
                                    [0,0,0],longitud,orientació))
    h_sid = sexag2decimal(h_sid)

    dif_sid = h_sid - h_sid_0

    dif_solar = dif_sid * relació_solar_sid

    if dif_solar < 0:
        dif_solar += hores_solar_dia_sideri

    return decimal2sexag(dif_solar)
```

En el programa s'ha de convertir el temps sideri a temps solar mitjà. Ho farem multiplicant el temps sideri per un factor de conversió. Aquest factor de conversió, com és evident, serà $\frac{23{,}23.93446959\ \textit{hores solars}}{24\ \textit{hores sidèries}}$, que és equivalent a $\frac{1}{\textit{relació}}$, on *relació* pren el valor que li havíem assignat al programa que converteix l'hora solar a hora sidèria.

Per a partir d'alguna referència amb hora sidèria, esbrinem quina hora sidèria serà les 00:00 UTC (*h_sid_0*). Després busquem quantes hores sidèries han de transcórrer per arribar a la hora sidèria equivalent a l'ascensió recta. Multipliquem aquest resultat per la relació, obtenint la hora solar mitjana. Però aquí no s'ha acabat tot, si és més petita que 0, haurem de sumar-li la duració d'un dia sideri amb hores solars. Aquests resultats negatius es donen si a les 00:00 UTC l'astre ja ha passat el meridià en el dia sideri que ens trobem, llavors el valor negatiu equival a les hores solars que fa que ha passat pel meridià i hem de fer aquesta darrera correcció per a saber quan tornarà a passar.

4.2.4. INTEGRACIÓ NUMÈRICA D'UNA TRAJECTÒRIA DE DOS COSSOS

Hi ha moltes maneres de calcular la trajectòria que seguirà un cos que viatja per l'espai, a partir de la seva posició i velocitat inicials. Tot i que, quan hi ha més de 2 cossos no hi ha solució analítica, hi ha alguns casos particulars que en tenen. Si no té solució analítica, s'ha d'utilitzar per força un ordinador. Per això, quan es va voler fer el viatge a la Lluna es van fer uns avenços importants en els ordinadors, ja que sense ells no hauria estat possible calcular la trajectòria de l'Apollo 11.

Suposem que tenim un coet que està a una altura de la Terra i que té una velocitat inicial. Considerem que la força que fa el coet a la Terra és menyspreable. Amb la llei de la Gravitació Universal es calcula amb quina acceleració serà atret per la Terra:

$$\overrightarrow{F_{T\,c}} = -G\,\frac{m_c\,M_T}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = -G\,\frac{m_c\,M_T}{r^3}\,\vec{r}$$

$$\overrightarrow{F_{T\,c}} = m_c\,a_c \Rightarrow a_c = -G\,\frac{M_T}{r^3}\,\vec{r}$$

agafant com a origen de coordenades el centre de la Terra, on $\overrightarrow{F_{T\,c}}$ és la força que fa la Terra sobre el coet, i $\vec{r}$ el vector de posició del coet. Per tant, la intensitat del camp gravitatori no depèn de la massa del cos que és atret.

Si expressem l'acceleració com a derivada segona de x:

$$a_c = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}\right),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G\frac{M_T}{r^3}x$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -G\frac{M_T}{r^3}y$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -G\frac{M_T}{r^3}z.$$

És a dir, hem de resoldre aquest sistema d'equacions diferencials, amb les condicions de posició i velocitat inicials, per a saber la posició del coet al llarg del temps.

Hi ha diferents mètodes per a resoldre-ho, aquí utilitzaré una variant del mètode d'Euler. El mètode d'Euler calcula, a partir de la posició i velocitat inicials, la posició i la velocitat que tindrà el coet transcorregut un interval de temps molt petit de manera aproximada. Tenint en compte que la velocitat en aquest interval petit és constant. Pas a pas ho fa així:

·Calcula l'acceleració deguda a l'atracció dels cossos que hi ha.

·Calcula la posició que tindrà passat l'interval de temps utilitzant solament la velocitat inicial.

·Calcula la velocitat que portarà una vegada passat el període de temps a partir de l'acceleració constant calculada.

I després tornem a començar al primer punt.

Com més petits agafem els intervals de temps tindrem més precisió, però també arrossegarem més quantitat d'errors de càlcul imprecís a l'hora de calcular. Es veurà en pràctica quan ho calculem. Sabem que, en els problemes de dos cossos les trajectòries són còniques. Per tant, si no ho són voldrà dir que hem d'ajustar l'interval de temps (més petit o més gran) o canviar de mètode d'integració.

Trajectòria d'un coet orbitant al voltant de la Terra

Ara ja estem preparats per a exposar com ho farem.

Ho farem d'una manera semblant al mètode d'Euler. Els passos que tindrà cada iteració seran aquests:

·Retorna la posició en què està el coet en l'instant inicial.

·Calcula l'acceleració que fa la Terra sobre el coet.

·Calcula la posició que tindrà el coet passat l'interval de temps. Aquesta serà aproximada, però tindrem en compte que la velocitat es variable. És a dir que realitzarà un moviment uniformement accelerat.

·Calcula la velocitat que portarà transcorregut aquest període de temps.

Prenem com a origen de coordenades el centre de l'esfera celeste, de manera que l'eix OY i l'eix OX estiguin al pla equatorial de l'esfera celeste, perpendiculars entre si i l'eix OX estigui alineat amb el punt d'Àries de l'any 2000. L'eix OZ estarà alineat amb el pol nord celeste.

Considerem que la Terra no està accelerada, és a dir, que la força que fa el coet sobre la Terra és menyspreable. D'aquesta manera el sistema de referència de la Terra és galileià. Si la força que fa el coet no fos menyspreable hauríem d'agafar un sistema de referència inercial, el centre de masses.

Al programa utilitzarem l'assignació múltiple de variables.

```
#Enlloc d'escriure-ho així,
a = 4
b = 5
c = 6

#ho escriurem així:
a, b, c = 4, 5, 6
```

Hi ha una funció que serà molt útil, és la funció *int*() que rep un nombre real qualsevol i el passa a enter.

El programa quedaria d'aquesta manera:

```
#Col·loquem la Terra a l'origen de coordenades. La considerem una esfera perfecta.
#Les unitats són les del Sistema Internacional.
#Considerem la massa del coet menyspreable a la de la Terra.
#(aquesta no serà atreta pel coet).
#Introduïm la posició i velocitat inicials.

posició_x,posició_y,posició_z = 0,1e7,0

velocitat_x,velocitat_y,velocitat_z = 6000,0,0

#La constant de gravitació universal i la massa de la Terra.

G = 6.67e-11
M_Terra = 5.9736e24

#L'interval de temps en què volem que transcorri amb la mateixa acceleració.

t = 0.2

#L'interval de temps en què volem representar la trajectòria.

m = 10000
```

```
#Nombre de vegades que realitzarem la iteració.

p = int(m/t)

#---------------------------------------------------------------------------------------
#Definim les funcions que utilitzarem.

#per a calcular el mòdul d'un vector

def mod(x,y,z):
    return (x**2 + y**2 + z**2)**0.5

#per a calcular l'acceleració, cada component per separat.
#coord ha de ser igual a la coordenada del satèl·lit

def acc(comp):
    return G * M_Terra/r**3 * -comp

#per a calcular la posició en què es trobarà component
#per component transcorregut 1 segon:

def pos(pos_0,vel_0,a):
    return pos_0 + vel_0 * t + 0.5 * a * t**2

#per a  calcular la velocitat que tindrà cada component després de
#l'acceleració que li dóna la Terra.

def vel(vel_0,a):
    return vel_0 + a * t


#---------------------------------------------------------------------------------------
```

```
#Calculem les posicions que tindrà el coet cada t segons durant m segons:

for n in range(p):
    print '{%f,%f},' % (posició_x,posició_y)

    r = mod(posició_x,posició_y,posició_z)

    acceleració_x, acceleració_y, acceleració_z = acc(posició_x),\
                                                  acc(posició_y),\
                                                  acc(posició_z)

    posició_x,posició_y,posició_z = pos(posició_x,velocitat_x,acceleració_x),\
                                    pos(posició_y,velocitat_y,acceleració_y),\
                                    pos(posició_z,velocitat_z,acceleració_z),\



    velocitat_x,velocitat_y,velocitat_z = vel(velocitat_x,acceleració_x),\
                                          vel(velocitat_y,acceleració_y),\
                                          vel(velocitat_z,acceleració_z)
```

El càlcul està fet amb un equip que té aquestes característiques: AMD Athlon(tm) XP 3200+ 2.20GHz (microprocessador) i 512 de RAM. Ha tardat 2 minuts aproximadament a fer la computació.

La posició i velocitat inicials les vaig anar canviant fins que hem va sortir un òrbita real i que no s'escapa a l'infinit.

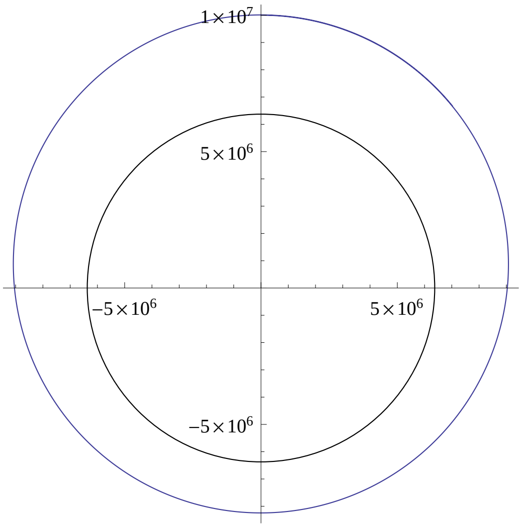


Figura 4.2: Recorregut que segueix el coet amb la posició i velocitat inicial del programa anterior. Ha quedat una corba pràcticament tancada, el càlcul ha estat bastant precís, encara que si li féssim donar més voltes aniria acumulant un error no menyspreable. Al primer quadrant es pot veure la superposició molt lleugera de l'inici amb l'arribada.

Ara comparem el gràfic anterior amb un obtingut amb el mateix programa, però amb les condicions inicials diferents. Són:

```
posició_x,posició_y,posició_z=0,27e6,0

velocitat_x,velocitat_y,velocitat_z=1000,0,0

m=20000
t=0.1
```

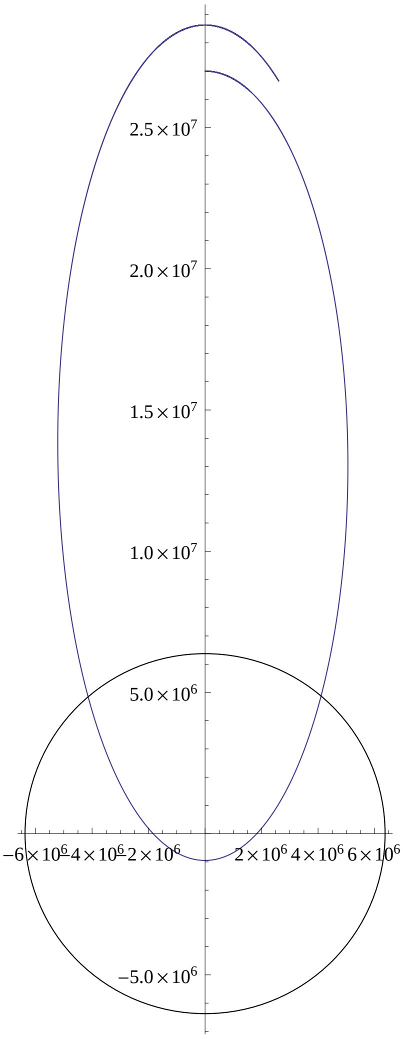


Figura 4.2: Volt imaginari que faria un coet si la Terra fos una massa puntual, no està tancat degut a errors d'imprecisió del càlcul.

Aquest està clar que és impossible. El coet xocaria amb la Terra i es pararia abans d'acabar la trajectòria. També podem veure que, a diferència de l'altre, el gràfic no està tancat, i això per la 1a llei de Kepler també sabem que és impossible.

Les causes d'aquests errors tan grans són:

· Al passar el coet molt a prop del centre de gravetat, on les acceleracions són molt grans, l'error s'incrementa.

· La trajectòria dura més que la primera, tot i que hem reduït l'interval de temps en què l'acceleració és constant. És palès que l'ordinador hagi tardat més per a fer aquest càlcul. Aproximadament 10 minuts.

Què podríem fer per a intentar tancar aquesta orbita sense utilitzar processos d'integració avançada? Fer que l'interval de temps sigui directament proporcional a la distància al centre de la Terra. Encara que no és senzill perquè hauríem d'elegir quantes vegades és més petit l'interval de temps que la distància al centre. Al capítol 5 ens dedicarem a buscar una trajectòria per arribar a la Lluna utilitzant eines d'integració més avançades. També hi ha un gràfic d'aquesta trajectòria calculada amb el *Mathematica*, aquella està connectada exactament.

4.2.4.1. APLICACIÓ DEL MOMENT ANGULAR A L'ANÀLISI DE LES ÒRBITES

En el periheli i l'afeli el vector posició forma un angle de 90º amb el vector velocitat. El teorema del moment angular ens diu que la derivada del moment angular respecte del temps en relació a un punt fix *O* és igual al moment de la força resultant en relació al mateix punt *O*. Per tant, com que la força central forma un angle de 0º amb el vector de posició, la derivada del moment angular respecte del temps és zero.

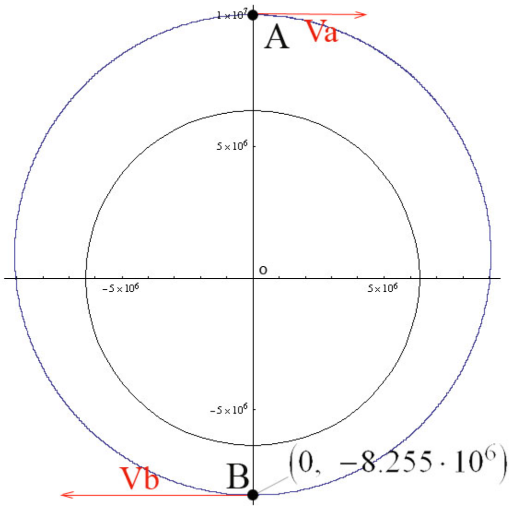


Figura 4.2: Anàlisi de l'òrbita integrada anteriorment per mitjà del moment angular.

Per tant podem escriure l'equivalència dels dos moments angulars:

$$\overrightarrow{L_{O_A}} = \overrightarrow{L_{O_B}}$$

$$\overrightarrow{r_A}\times\overrightarrow{p_A} = \overrightarrow{r_B}\times\overrightarrow{p_B}$$

$$|\overrightarrow{r_A}|\cdot m\cdot|\overrightarrow{v_A}|\cdot\sin(0\,^o) = |\overrightarrow{r_B}|\cdot m\cdot|\overrightarrow{v_B}|\cdot\sin(0\,^o)$$

$$\frac{|\overrightarrow{r_A}|}{|\overrightarrow{r_B}|} = \frac{|\overrightarrow{v_B}|}{|\overrightarrow{v_A}|}$$

En el cas de la òrbita de la figura tenim que:

$$\left|\overrightarrow{v_B}\right| = \frac{|\overrightarrow{r_A}|\,|\overrightarrow{v_A}|}{|\overrightarrow{r_B}|} = \frac{10^7\cdot6\cdot10^3}{8.255\cdot10^6} = 7268,32\ m/s.$$

4.3. PROGRAMES AMB EL MÒDUL PYEHPHEM

4.3.1. CERCANT L'EFECTE DE RETROGRADACIÓ DE MART

Molts astrònoms antics van buscar un model del sistema del món que s'adeqüés al màxim a la realitat, i pocs ho van aconseguir. Per a fer possible això s'havia de tenir en compte l'efecte de retrogradació sobre el fons estel·lar (vegeu la subsecció 2.1.8.). I van cercar maneres de reproduir el moviment del planeta, d'acord amb el que ells veien. Donem un cop d'ull a com han anat evolucionant les maneres d'enfocar el problema (geocentrisme, heliocentrisme):

· El sistema del món d'Èudox es basa en la corba geomètrica hipòpede, aquest, de la manera més directa va presentar el moviment retrògrad. Dic de la manera més directa perquè el seu sistema s'observava el canvi de sentit tant si ho miraves respecte les estrelles (agafant les coordenades equatorials celestes), com si ho feies agafant les posicions de Mart amb les coordenades de l'observador. Els seus objectius eren trobar un moviment dels planetes circular i uniforme juntament amb l'efecte aquest.

· Ptolemeu es centra en explicar aquest moviment també, però ja no ho fa d'una manera directa com Èudox, sinó que el seu sol s'apreciarà utilitzant les coordenades equatorials celestes.

· Copèrnic i després Kepler fan un salt important partint de l'heliocentrisme. Presenten el moviment del cosmos d'una manera elegant (per mitjà de circumferències concèntriques i després amb les el·lipses). Gràcies a que els planetes tenen períodes diferents es pot explicar el moviment retrògrad d'una manera indirecta per mitjà de l'heliocentrisme.
La figura 4.2 és una explicació gràfica. El període de la Terra és més petit que el període de Mart. Consta de les posicions de la Terra i les de Mart en temps iguals (molt aproximadament) i la projecció de Mart al fons estel·lar. Si ordenem els punts de les projeccions de Mart podem clissar el canvi de sentit.

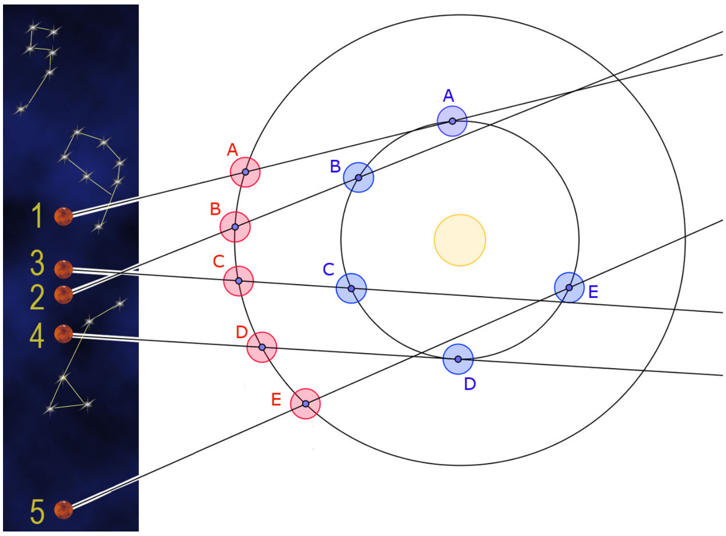


Figura 4.2: Explicació de perquè és produeix el moviment retrògrad.

Anem a buscar els punts de la trajectòria en el moment en què el planeta Mart canvia de sentit de la marxa amb l'ajuda de l'ordinador. Com que a la realitat aquest moviment sol es veu si ho mirem respecte les estrelles, hem d'utilitzar les coordenades equatorials celestes.
Abans que res, el que cal fer és buscar quan Mart estarà en la posició més pròxima a la Terra:

```
#Importem el mòdul ephem

import ephem

# Calculem les distàncies que està Mart de nosaltres, i busquem la que està més
# a prop. La freqüència d'observació serà d'1 dia.
#Utilitzem el prefix "ephem." quan definim funcions i classes del PyEphem.

m = ephem.Mars()
d = ephem.Date('2010/1/1 00:00')
llista = []

for n in range(365):
    dis_dat = []

    m.compute(d)

    dis_dat.append(m.earth_distance)
    dis_dat.append(d)

    llista.append(dis_dat)
    d += 1



dismin_dat = min(llista)
print dismin_dat[0] , ephem.date(dismin_dat[1])
```

En el programa anterior utilitzem les classes, que són construccions que s'utilitzen com un model per a crear objectes d'aquella classe. Pot contenir dades i funcions que operen amb elles. En aquest cas, com que el *PyEphem* ja té aquestes classes dels planetes i moltes més, no farà falta escriure explícitament el que té cadascuna.

En el codi hi ha classes i funcions noves, aquestes són:

· *ephem.Mars*(): crea una classe del planeta Mart (hi ha el Sol, la Lluna, els planetes del Sistema Solar, i la majoria de les llunes dels planetes).

· *ephem.Date*(*'2010/1/1 00 : 00'*): és una funció que retorna la data amb dies. Té com a dia 0 el 31 de desembre a les 12:00 del 1899. El *PyEphem* utilitza la zona horària de referència universal (UTC).

· *m.compute*(*d*): funció que computa la posició del planeta Mart en el temps d.

· *m.earth_distance*: retorna la distància de Mart a la Terra.

· *llista.append* (*dis_dat*): mètode que afegeix a la llista la distància de la Terra a Mart i la data de la computació.

-*min* (*llista*): troba l'element més petit de la llista (el que té la distància més curta).

El dia en què estarà més a prop serà el 28 de gener del 2010 a les 00:00. Aquesta data serà el centre de l'interval en què buscarem les posicions de Mart.

Ara recollim tots els punts de Mart amb coordenades equatorials celestes (amb l'origen del sistema de coordenades celestes situat a la posició del punt vernal de l'1 de gener del 2000 a les 12 hores):

```
#Importem el mòdul ephem

import ephem

#Calculem les posicions de Mart (amb les coordenades celestes), i amb
#freqüència d'un dia durant el període de 6 mesos, centrat en el dia de la
#distància més curta Terra-Mart aproximadament(4 mesos abans i 4 mesos després).

m = ephem.Mars()
d = ephem.Date('2009/10/1 00:00')
llista = []

for n in range(240):
    ra_dec=[]

    m.compute(d)

    ra_dec.append(m.ra)
    ra_dec.append(m.dec)

    llista.append(ra_dec)
    d += 1

print llista
```

Aquí no costa gaire deduir que *m.ra* i *m.dec* donen els valors de l'ascensió recta i la declinació.

Importem els punts a un gràfic fet amb el *Mathematica:*

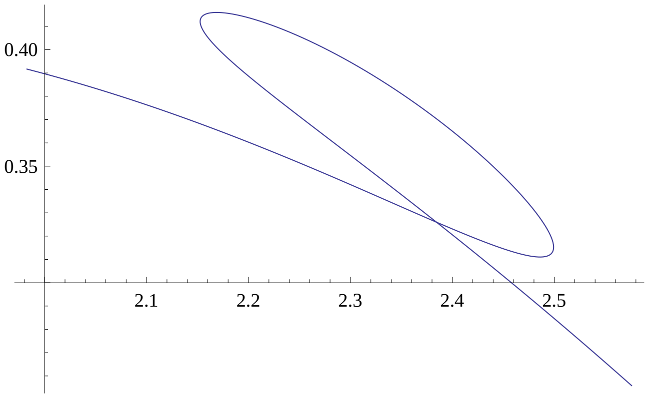


Figura 4.3: Canvi de sentit de la trajectòria de Mart observat sobre el fons estel·lar.

Finalment podem observar visualment l'efecte de retrogradació. No ens surt una línia recta, com a la figura 4.2, perquè la Terra i Mart tenen plans orbitals diferents.

Si utilitzem les coordenades horitzontals d'un observador enlloc de les coordenades equatorials celestes, obtindrem una trajectòria que no és talla a si mateixa. Utilitzant el *PyEphem* trobem els punts i després els passem a un gràfic en 3 dimensions:

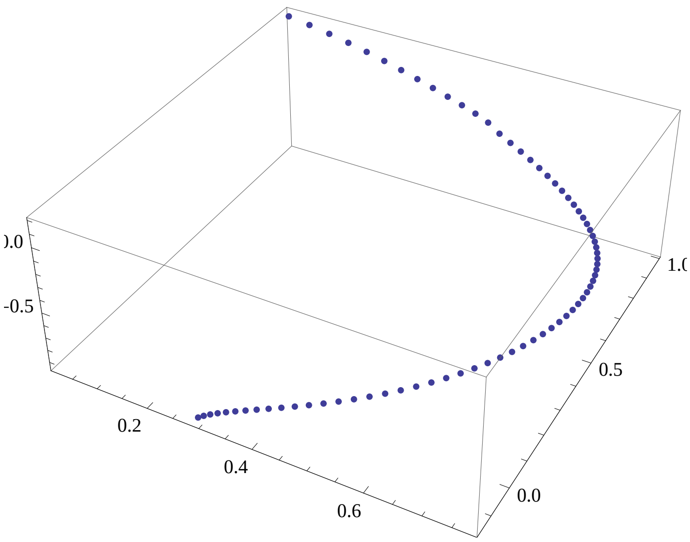


Figura 4.4: Corba que descriu Mart al nostre cel, cada punt equival a la seva posició vista a hora fixa, a les 00:00, cada 5 dies durant 1 any. Lloc d'observació: Barcelona. Si sotgem el gràfic, ens adonem que no hi ha canvi de sentit en aquest.

Això té una explicació. Si utilitzem les coordenades de l'observador, tenim un sistema de referència que gira 1 grau cada dia aproximadament. Per tant, el moviment aparent està regit pel sistema de referència topogràfic i, a més a mes, pel moviment de Mart respecte la Terra.

4.3.2. SATÈL·LITS GPS

El fet de trobar la posició per mitjà d'un dispositiu GPS és una gran innovació que ha substituït els antics i imprecisos mètodes (a la secció 1.1.1.2. n'exposem un), que ni de molt lluny eren tan sofisticats com aquest.

El sistema GPS (Global Positioning System) consta de 32 satèl·lits orbitant a una distància de 20 200 km de la superfície terrestre. Hi ha 6 plans orbitals on estan repartides les orbites dels diferents satèl·lits. No n'hi ha dos que tinguin la mateixa òrbita.

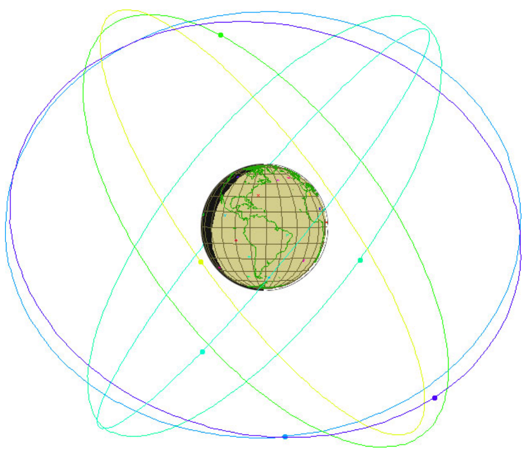


Figura 4.4: Els 6 plans orbitals dels satèl·lits GPS. A la imatge hi ha un satèl·lit de cada pla orbital. Les posicions dels satèl·lits són les del la data: 23/10/2010 8:39:05 CDT.

Cadascun d'aquests envia una senyal als aparells GPS que està formada per:

·L'hora a què el missatge ha estat enviat.

·Informació precisa de la òrbita del satèl·lit (les efemèrides)

·L'estat del sistema i informació general de les òrbites dels altres satèl·lits GPS (l'almanac).

Suposem un cas ideal amb els rellotges dels receptors GPS exactes i que la senyal arribés sense cap interferència. Aleshores, el nostre instrument només necessitaria la senyal de 3 satèl·lits GPS com a mínim. Si tingués aquestes, sabria quan ha tardat cada senyal per arribar, i multiplicant cada interval de temps per la velocitat de la llum aconseguiria saber a quina distància estaven els artefactes en aquell moment. Al tenir també la posició en què estaven els satèl·lits només li faria falta trobar la intersecció de 3 esferes amb les característiques següents: el centre de cada esfera situat a la posició de cada satèl·lit i el radi la distància que hauria calculat. La intersecció de dos d'aquestes esferes amb centres diferents és una circumferència. I la intersecció de la circumferència amb l'altra esfera són dos punts: un molt allunyat de la superfície de la Terra que es discerneix i l'altre serà la nostra posició.

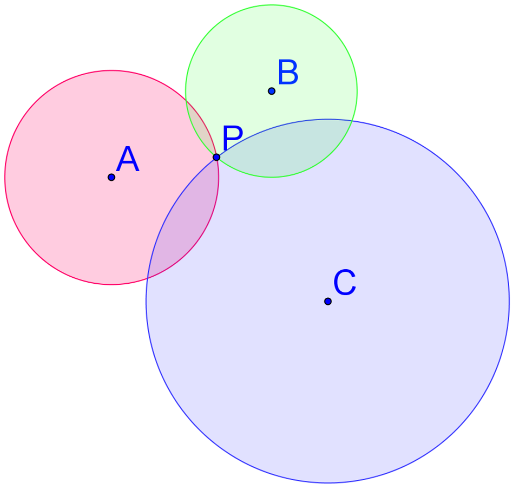


Figura 4.4: Cada circumferència representa una esfera amb centre el satèl·lit. La intersecció de A i B és una circumferència, i la intersecció d'una circumferència amb l'altra esfera són dos punts. En aquest cas és un punt perquè la esfera C seria tangent a la circumferència resultant de les altres dos.

Com que a la Terra no hi ha aquest cas ideal es produeixen errors. Alguns es corregeixen amb la teoria de la Relativitat i General, i d'altres amb diferents tècniques. Algunes d'elles són: utilitzar 4 o més senyals per eliminar l'error del rellotge del nostre dispositiu i el GPS diferencial. Tots els receptors GPS utilitzen 4 satèl·lits per a calcular la posició, aconseguint una precisió de ±20 metres.

El GPS diferencial és una manera de reduir els errors de les senyals dels satèl·lits GPS produïts per la propagació per la ionosfera i la troposfera, errors en la posició dels satèl·lits, errors dels rellotges dels satèl·lits o imprecisió numèrica del càlcul. Consisteix en tenir una estació a la Terra que sàpiga la seva posició exacta, trobada amb altres mètodes. Aquesta estació compararà la posició seva amb la que li diu el GPS que té, i estudiarà l'error que es comet. Com que els errors són iguals als voltants d'aquesta estació, es poden aplicar unes correccions específiques als receptors de GPS diferencial (DGPS) d'aquella zona (uns 1000 km.). Pot aconseguir tenir una precisió com a mínim de 2 metres.

4.3.2.1. QUANTS SATÈL·LITS HI HA VISIBLES?

Una cosa imprescindible per al bon funcionament dels aparells GPS és que hi hagin satèl·lits visibles. Si no n'hi ha, els és impossible calcular la posició on estan. Per això, les persones que s'han dedicat a crear aquest tipus de servei han calculat unes òrbites òptimes i un nombre de satèl·lits determinat per a poder satisfer aquesta necessitat.

El càlcul de quants satèl·lits visibles hi ha en una ciutat determinada el podem fer amb el *Python* i el mòdul *PyEphem*. Els paràmetres de les òrbites d'aquests els podem obtenir de la referència [6]. El mòdul *PyEphem* té una funció que llegeix aquests elements orbitals, és la *readtle()*.

Introducció dels paràmetres orbitals

```
# Importem el mòdul ephem

import ephem
# Introduïm les efemèrides dels satèl·lits extretes de:
# http://celestrak.com/NORAD/elements/gps-ops.txt.

sat1 = ephem.readtle('GPS BIIA-10 (PRN 32)',
    '1 20959U 90103A   10145.61446857 -.00000071  00000-0  10000-3 0  6989',
    '2 20959  54.9556 269.1947 0128041 303.4444  55.3238  2.00555536142775')
sat2 = ephem.readtle('GPS BIIA-11 (PRN 24) ',
    '1 21552U 91047A   10145.41053744  .00000043  00000-0  10000-3 0  6904',
    '2 21552  54.3832 207.2339 0057979 331.1801  28.5844  2.00423157138357')
sat3 = ephem.readtle('GPS BIIA-14 (PRN 26)     ',
    '1 22014U 92039A   10146.46394469 -.00000089  00000-0  10000-3 0  6167',
    '2 22014  56.7635 328.0105 0192388  62.3094 299.6322  2.00717903124523')
sat4 = ephem.readtle('GPS BIIA-15 (PRN 27)     ',
    '1 22108U 92058A   10146.01819136 -.00000090  00000-0  10000-3 0  5022',
    '2 22108  56.0484  21.2268 0217759 278.7108  78.8775  2.00569154129698')
sat5 = ephem.readtle('GPS BIIA-21 (PRN 09)     ',
    '1 22700U 93042A   10146.03734160 -.00000090  00000-0  10000-3 0  8538',
    '2 22700  56.1847  22.6641 0167848  86.9120 275.0154  2.00557964123856')
sat6 = ephem.readtle('GPS BIIA-23 (PRN 04)     ',
    '1 22877U 93068A   10146.17610324  .00000050  00000-0  10000-3 0  1832',
    '2 22877  53.8033 204.3826 0089585  35.1385 325.5305  2.00561069121506')
sat7 = ephem.readtle('GPS BIIA-24 (PRN 06)     ',
    '1 23027U 94016A   10145.88326208  .00000063  00000-0  10000-3 0  1694',
    '2 23027  53.5461 141.3911 0064924 298.5237  60.8298  2.00564635118803')
sat8 = ephem.readtle('GPS BIIA-25 (PRN 03)     ',
    '1 23833U 96019A   10145.89881415  .00000056  00000-0  10000-3 0  3606',
    '2 23833  53.1282 137.3463 0129547  56.3797 304.8455  2.00559206103781')
sat9 = ephem.readtle('GPS BIIA-26 (PRN 10)     ',
    '1 23953U 96041A   10146.28501153 -.00000064  00000-0  10000-3 0  8511',
```

```
    '2 23953  54.6280 265.5515 0091883  39.2826 321.3638  2.00583715101589')
sat10 = ephem.readtle('GPS BIIA-27 (PRN 30)    ',
    '1 24320U 96056A   10146.17233168 -.00000053  00000-0  10000-3 0  5809',
    '2 24320  54.7805  81.7503 0119509  84.9484 276.3799  2.00555967100247')
sat11 = ephem.readtle('GPS BIIR-02 (PRN 13)    ',
    '1 24876U 97035A   10145.76390545 -.00000085  00000-0  10000-3 0  3320',
    '2 24876  56.8888 328.2333 0042506  98.5453 261.9414  2.00554013 94108')
sat12 = ephem.readtle('GPS BIIA-28 (PRN 08)    ',
    '1 25030U 97067A   10145.90043664 -.00000089  00000-0  10000-3 0  2469',
    '2 25030  56.8927  28.3439 0110899 180.1040 179.9441  2.00561728 92007')
sat13 = ephem.readtle('GPS BIIR-03 (PRN 11)    ',
    '1 25933U 99055A   10146.04328761  .00000063  00000-0  10000-3 0  7815',
    '2 25933  50.9027 190.8452 0104642  45.5883 315.3473  2.00554901 77923')
sat14 = ephem.readtle('GPS BIIR-04 (PRN 20)    ',
    '1 26360U 00025A   10146.14126584 -.00000061  00000-0  10000-3 0  8763',
    '2 26360  53.6975 262.4676 0040436  74.7137 285.7291  2.00570943 73625')
sat15 = ephem.readtle('GPS BIIR-05 (PRN 28)    ',
    '1 26407U 00040A   10145.97735449 -.00000044  00000-0  10000-3 0  8220',
    '2 26407  55.5959  86.2674 0161571 248.7136 109.5191  2.00564020 72299')
sat16 = ephem.readtle('GPS BIIR-06 (PRN 14)    ',
    '1 26605U 00071A   10145.58154789 -.00000085  00000-0  10000-3 0  8307',
    '2 26605  56.5064 326.9899 0052080 239.3858 120.0999  2.00556611 69883')
sat17 = ephem.readtle('GPS BIIR-07 (PRN 18)    ',
    '1 26690U 01004A   10145.44565935 -.00000069  00000-0  10000-3 0  7156',
    '2 26690  53.7094 265.5814 0114890 226.9218 132.0995  2.00561358 68291')
sat18 = ephem.readtle('GPS BIIR-08 (PRN 16)    ',
    '1 27663U 03005A   10145.80053356 -.00000044  00000-0  10000-3 0  1022',
    '2 27663  55.6956  85.8348 0059898 345.6603  14.1164  2.00552778 53656')
sat19 = ephem.readtle('GPS BIIR-09 (PRN 21)    ',
    '1 27704U 03010A   10145.36923207  .00000046  00000-0  10000-3 0    60',
    '2 27704  53.4314 205.0324 0167216 218.3625 140.5161  2.00562376 52431')
sat20 = ephem.readtle('GPS BIIR-10 (PRN 22)    ',
    '1 28129U 03058A   10145.48865721 -.00000069  00000-0  10000-3 0  6010',
```

```
    '2 28129  53.5764 265.8614 0054570 249.9581 109.4396  2.00557875 47142')
sat21 = ephem.readtle('GPS BIIR-11 (PRN 19)     ',
    '1 28190U 04009A   10144.94234707  .00000088  00000-0  10000-3 0  5568',
    '2 28190  54.8816 148.7786 0066145 349.0529  10.8261  2.00556789 45301')
sat22 = ephem.readtle('GPS BIIR-12 (PRN 23)     ',
    '1 28361U 04023A   10145.73044641 -.00000089  00000-0  10000-3 0  3827',
    '2 28361  55.4642 324.7491 0066740 170.9401 189.4800  2.00561763 43404')
sat23 = ephem.readtle('GPS BIIR-13 (PRN 02)     ',
    '1 28474U 04045A   10145.22824102  .00000049  00000-0  10000-3 0  2619',
    '2 28474  53.8535 203.3954 0095474 176.9131 183.2249  2.00574326 40753')
sat24 = ephem.readtle('GPS BIIRM-1 (PRN 17)     ',
    '1 28874U 05038A   10145.07784772  .00000083  00000-0  10000-3 0  5168',
    '2 28874  55.0215 145.6191 0055635 218.1339 141.4916  2.00571989 34179')
sat25 = ephem.readtle('GPS BIIRM-2 (PRN 31)     ',
    '1 29486U 06042A   10146.68142229 -.00000089  00000-0  10000-3 0  8505',
    '2 29486  55.9772  24.4043 0075587 298.6931  60.5808  2.00562859 26904')
sat26 = ephem.readtle('GPS BIIRM-3 (PRN 12)     ',
    '1 29601U 06052A   10146.13305070 -.00000047  00000-0  10000-3 0  8896',
    '2 29601  55.6224  84.8201 0036498 330.1717  29.5877  2.00561026 25804')
sat27 = ephem.readtle('GPS BIIRM-4 (PRN 15)     ',
    '1 32260U 07047A   10145.43575695 -.00000089  00000-0  00000+0 0  6259',
    '2 32260  54.6507 323.3324 0025029 345.3004  14.6204  2.00554267 19186')
sat28 = ephem.readtle('GPS BIIRM-5 (PRN 29)     ',
    '1 32384U 07062A   10146.25885294  .00000067  00000-0  10000-3 0  6512',
    '2 32384  55.0377 146.0438 0032734 283.6723  75.9797  2.00555107 17923')
sat29 = ephem.readtle('GPS BIIRM-6 (PRN 07)     ',
    '1 32711U 08012A   10145.35636573 -.00000092  00000-0  10000-3 0  5042',
    '2 32711  55.6685  24.4777 0034360 178.0745 181.9799  2.00559115 16111')
sat30 = ephem.readtle('GPS BIIRM-7 (PRN 01)     ',
    '1 34661U 09014A   10145.75429540 -.00000047  00000-0  10000-3 0  4183',
    '2 34661  55.2734  84.0144 0044694  48.4038 311.9404  2.00434332  8633')
sat31 = ephem.readtle('GPS BIIRM-8 (PRN 05)     ',
    '1 35752U 09043A   10146.31935167 -.00000061  00000-0  10000-3 0  1540',
```

```
    '2 35752  54.9129 264.0730 0018358  25.1429 334.9261  2.00560484  5714')
sat32 = ephem.readtle('GPS BIIF-1  (PRN 25) ',
    '1 36585U 10022A   10280.78761477  .00000002  00000-0  10000-3 0  1651',
    '2 36585  55.0542  77.9389 0005591 123.4307 236.6470  2.00552536  2652')

# Fem una llista de tots els satèl·lits per a poder-los cridar més fàcilment.

llista = [sat1,sat2,sat3,sat4,sat5,sat6,sat7,sat8,sat9,sat10,sat11,sat12,
         sat13,sat14,sat15,sat16,sat17,sat18,sat19,sat20,sat21,sat22,sat23,
         sat24,sat25,sat26,sat27,sat28,sat29,sat30,sat31,sat32]
```

Càlcul del nombre de satèl·lits visibles

Crearem una funció que retornarà el nombre de satèl·lits que hi ha visibles en un moment i lloc determinats. Per a introduir la nostra posició ho podrem fer escrivint el nom de la ciutat on estem o les nostres coordenades:

·Si és una ciutat al paràmetre *ciutat_o_coordenada* s'escriu la ciutat entre cometes, per exemple *'Barcelona'*, i a tipus de dada s'escriu *'ciutat'*, al peu de la lletra. El *PyEphem* té una base de dades amb 122 ciutats.

·Si és una coordenada al paràmetre *ciutat_o_coordenada* s'escriu la coordenada terrestre, per exemple *['0:0:0','41:0:0']* amb coordenades sexagesimals, o *[0.0, 41.0]* amb decimals, on el primer valor és la longitud i el segon la latitud. A *tipus_de_dada* s'escriu *'coordenada'*.

·La data s'escriu segons aquest format: *'any/mes/dia hora:minuts:segons'*. Sempre és important escriure les cometes ja que sinó no funcionarà. El *PyEphem* llegeix les hores amb temps universal.

Exposo el programa i després d'aquest l'explicació del que fa.

```
# Definim la funció que calcularà els satèl·lits que hi ha visibles.

def sat_visibles(ciutat_o_coordenada,tipus_de_dada,data):

    # Triem el tipus de dada.

    if tipus_de_dada == 'coordenada':
        longitud = ciutat_o_coordenada[0]
        latitud = ciutat_o_coordenada[1]

        obs = ephem.Observer()
        obs.long = longitud
        obs.lat = latitud
        obs.date = data

    else:
        obs = ephem.city(ciutat_o_coordenada)
        obs.date = data

    # Assignem la variable suma

    suma = 0

    # Computem les coordenades de tots els satèl·lits i contem quants
    # satèl·lits hi ha visibles


    for n in range(32):

        llista[n].compute(obs)

        if llista[n].alt>0:
            suma += 1


    return suma
```

El primer que és nou són el càlcul de coordenades horitzontals amb el *PyEphem*. Ho fem per mitjà de la classe *ephem.Observer()*. Aquesta classe té un conjunt d'atributs (longitud, latitud, data, i molts més) que assignem segons els paràmetres reals que escrivim. La funció *compute()* ja la coneixem del programa anterior, com veiem també es pot fer servir amb la classe de l'observador, computa la posició de l'objecte segons aquell observador. Al fer-ho amb l'observador, l'objecte tindrà uns atributs més, les coordenades horitzontals.

És palès el que realitza el bucle final, va calculant si els satèl·lits tenen una altitud positiva, si és així conta que el satèl·lit està visible.

4.3.2.2. PROVANT EL PROGRAMA

Anem a avaluar el programa amb un observador situat a casa meva. Per a provar com va variant el nombre de satèl·lits farem un bucle. Aquest calcularà quants satèl·lits hi ha visibles a partir de l'1 de gener de 2010 a les 00:00 cada hora. Fins a 100 vegades.

```
>>> data = ephem.date('2010/1/1 00:00')
>>> sat = []
>>> for n in range(100):
    sat.append(sat_visibles([41.65131265370195,\
                0.5597957968711853],\
               'coordenada',data))
    data += ephem.hour
```

I obtenim com a resultat una llista dels satèl·lits que hi haurà visibles. Resulta ser constant, sempre es troba al valor 10. També ho he provat per altres posicions a la Terra i per a diferents intervals de temps, i sol ser constant.

Podem dir que el sistema està ben muntat pel que fa a la cobertura que tindran els usuaris, no tindran problemes de no tenir visibilitat amb els satèl·lits.

CAPÍTOL 5

Rumb a la Lluna

Us heu preguntat mai com es calculen les òrbites per a enviar coets a l'espai? Doncs, en aquest capítol tractem d'això. El nostre objectiu és trobar una trajectòria per anar a la Lluna. Seguirem un procés progressiu de manera que, si es vol entendre completament una secció qualsevol s'ha d'haver llegit totes les seccions anteriors. Gràcies al programa *Mathematica* aquest capítol ha estat possible realitzar-lo.

5.1. CARACTERÍSTIQUES D'UN VOL A LA LLUNA

Abans de llançar una nau a l'espai, s'ha de tenir tot previst i programat. Agafarem l'esquema de la missió espacial Apollo 11, la primera tripulada que va arribar a la superfície de la Lluna, per a conèixer les diferents etapes d'un vol espacial. Prèviament veurem quines són les parts de l'Apollo 11, pot variar el disseny de la nau, però les parts sempre són les mateixes en les missions amb destí la Lluna.

5.1.1. PARTS D'UNA NAU

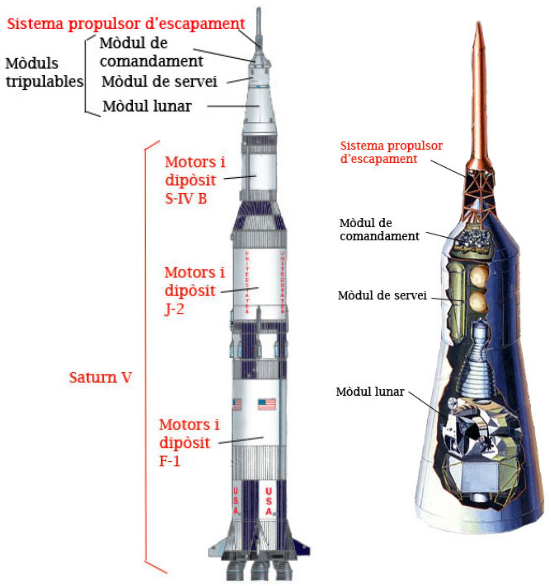


Figura 5.1: Parts de l'Apollo 11. Les que estan de color roig serveixen per a impulsar a la nau. La de la dreta és una ampliació de la part superior de la nau.

El coet

Un propel·lent de gas a altíssimes velocitats, que per la 3a llei de newton gràcies a tota la força que fa traient els fluids, hi ha una força de reacció d'aquests sobre el coet, propulsant-lo cap amunt.

En el cas de l'Apollo 11, va ser Saturn V, un coet dissenyat per Von Brau. Aquest estava format per 3 parts: F-1, J-2, S-IV B. Aquestes s'anaven soltant de la nau a mesura que s'acabava el seu combustible. L'última part, S-IV B, va ser consumida després de sortir de la òrbita d'aparcament al voltant de la Terra i marxar cap a la Lluna.

El mòdul lunar

És una de les parts en què els astronautes poden entrar a ella. Aquesta transporta als astronautes de l'òrbita entorn de la Lluna al satèl·lit terrestre. Té un mòdul de descens i un d'ascens.

La de l'Apollo 11 portava les eines necessàries per a prendre mostres de roques de la superfície lunar, un reflector làser per a efectuar mesures de la distància Terra - Lluna, un sismòmetre per a registrar terratrèmols lunars i la caiguda de meteorits, i una pantalla d'alumini destinada a recollir partícules del vent solar. Tots aquests formen part de l'ALSEP (Apollo Lunar Surface Experiments Package). Pesava 16448 kg.

El mòdul de servei

Està equipada amb tot el necessari per al manteniment dels astronautes durant els viatges d'anada i tornada a la Lluna. No té pressió. Inclou piles de combustible, bateries, una gran antena, radiadors, aigua, hidrogen, oxigen, un sistema de control de carburant i els motors per a entrar i sortir de l'òrbita lunar i tornar a la Terra. Pesava 30320 kg amb el mòdul de comandament.

El mòdul de comandament

És el sistema de control central de les naus Apollo i la vivenda pels tres tripulants. Estava formada per una cabina amb pressió, sofàs, un panell de control i d'instruments, sistemes de guiatge òptic i electrònic, sistemes de comunicacions, sistema de control ambiental, bateries, protecció tèrmica, el sistema de control dels propulsors, cinc finestres i el para-caigudes. Va ser la única part de l'Apollo que va tornar a la Terra intacta. Pesava 30320 kg amb el mòdul de servei.

El sistema propulsor d'escapament

La finalitat del sistema d'escapament de l'Apollo és la d'impulsar del mòdul de comandament en cas d'avortar la missió. Aquest sistema funcionaria de forma automàtica o manual, per guiar a la nau fora de la trajectòria errònia.

5.1.2. FASES D'UN VOL A LA LLUNA

1 Llançament

Els coets propulsen a la nau i s'enlaira. Ha d'assolir el màxim d'energia cinètica en el mínim temps. A mesura que pujarà l'energia cinètica proporcionada pels motors es transformarà una part en energia potencial, una altra es consumirà amb el treball de les força no conservativa del fregament i l'altra s'ha de mantenir amb la velocitat que té. La seva trajectòria és complicada. En un punt de l'ascens es pararan els motors i es deixarà caure cap avall per a què després torni cap amunt. Aquesta etapa dura fins a la inserció a l'òrbita terrestre.

Durant aquest a l'Apollo 11 es van consumir els dos primers motors i es van expulsar (F-1 i J-2). Aquesta fase va tenir lloc el 16 de juliol de 1969 a les 13:32:00 UTC.

2 Posada en òrbita terrestre

Inserció de la nau a una òrbita d'aparcament a 215 km d'altura. Aquí es calibren els instruments i es comprova que la trajectòria sigui la correcta. S'estarà orbitant durant 3 hores.

A la nau americana els dos mòduls van romandre units encara a la tercera part de Saturn S-IV B.

3 Sortida de l'òrbita terrestre

Després de fer 2 voltes a la Terra la nau s'accelera fins arribar a una velocitat de 45.000 km/h en direcció a la Lluna. S'està realitzant l'injecció translunar.

En aquesta etapa, al darrer coet de l'Apollo 11 se li esgotà el combustible. Llavors, es va haver de realitzar una maniobra per a passar el mòdul lunar davant del mòdul de comandament i llençar el S-IV B a l'espai. Va ser un procediment crític i complicat.

4 Encaminats cap a la Lluna

En direcció a la Lluna són importants les correccions de mig rumb, que acaben de apuntar la nau a la trajectòria adequada. Durant 3 dies la nau estarà perdent velocitat progressivament ja que la Terra l'atreu amb força. Quan s'apropa a la Lluna passarà de 3700 km/h a 9000 km/h, accelerat per la gravetat lunar. Si els motors no fessin cap maniobra la nau giraria entorn la cara oculta de la Lluna i tornaria cap a la Terra, això se'n diu trajectòria de retorn lliure, i es planeja per si hi hagués algun conflicte a l'hora de passar a la fase següent.

5 Entrada a l'òrbita lunar

A la cara oculta de la Lluna es realitzarà l'inserció a l'òrbita lunar. Consisteix en encendre els motors per a efectuar una frenada i col·locar-se en òrbita lunar. Orbiten seguint una el·lipse de periàpside de 110 km i d'apoàpside de 313 km. Al cap d'un parell de revolucions ajustaran l'òrbita fins a convertir-la en una circumferència quasi perfecta.

6 Descens del mòdul lunar i allunament

El mòdul lunar segueix una trajectòria de Hohmann gairebé perfecta, que portarà la nau a la superfície lunar.

En l'Apollo 11, allà agafaren tot tipus de mostres de roques (21,55 kg) i s'instal·laren els aparells ALSEP que es portaven a bord del mòdul lunar. Aquests serveixen per a mesurar alguns aspectes fisicoquímics que es produeixen a la superfície lunar. Era el 20 de juliol de 1969 a les 20:17:40 UTC quan es va allunar i es trobaven al Mar de la Tranquil·litat.

7 Ascens del mòdul lunar

El mòdul lunar de l'Apollo, després de 13 hores ascendí i es dirigí cap a la resta de la nau que estava orbitant. Un cop tots els tripulants i el material que es volgué emportar-se cap a la Terra va estar descarregat al mòdul de servei, el mòdul lunar es deixà caure a la Lluna.

8 Sortida de l'òrbita lunar

S'engeguen els motors i té lloc la injecció transterra, que dirigeix els mòduls cap a la Terra.

9 En camí cap a la Terra

En aquesta etapa també s'ha de redirigir l'òrbita cap a la Terra, les correccions de mig rumb.

10 Amarament a l'oceà Pacífic

El mòdul de servei es deixa a l'espai i sol queda el mòdul de comandament. Els equips de recuperació es preparen per a recollir a la tripulació al mar. En aquesta part de la missió no fa falta motors per a frenar ja que el fregament amb l'aire és el que s'encarrega de disminuir la càpsula des de 40000 km/h inicials a uns 100 km/h, de forma que es puguin obrir els paracaigudes. Durant l'última fase tota l'energia cinètica es dissipa en forma de calor fent que la temperatura de la càpsula s'elevi.

L'Apollo 11 va amarar a l'oceà Pacífic el 24 de juliol de 1969 a les 16:50:35 UTC. La missió va durar 195 h 18 min 35 s.

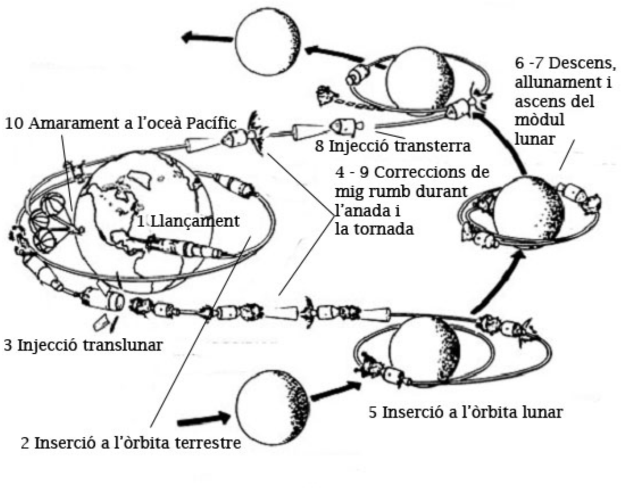


Figura 5.1: Dibuix esquemàtic d'una missió espacial a la Lluna.

5.2. LA POTÈNCIA DEL MATHEMATICA

Com hem vist al capítol anterior a la subsecció 4.2.4., en el càlcul numèric de trajectòries amb el *Python*, s'entenen molt els mecanismes que el formen, però és bastant farragós i molt lent executar-lo. Per això hem d'utilitzar una eina que permeti calcular les diferents tasques i agilitzi el procés, també una amb que puguem operar amb les dades d'una manera més directa.

Tots aquests requisits els satisfà i a més a més proporciona eines de molt alt nivell el programa: *Mathematica* 7.0 que és un manipulador algèbric i un llenguatge de programació.

Aquí hi ha un dels gràfics en què clissem la trajectòria del coet que amb el *Python* no havíem aconseguit enllaçar-la.

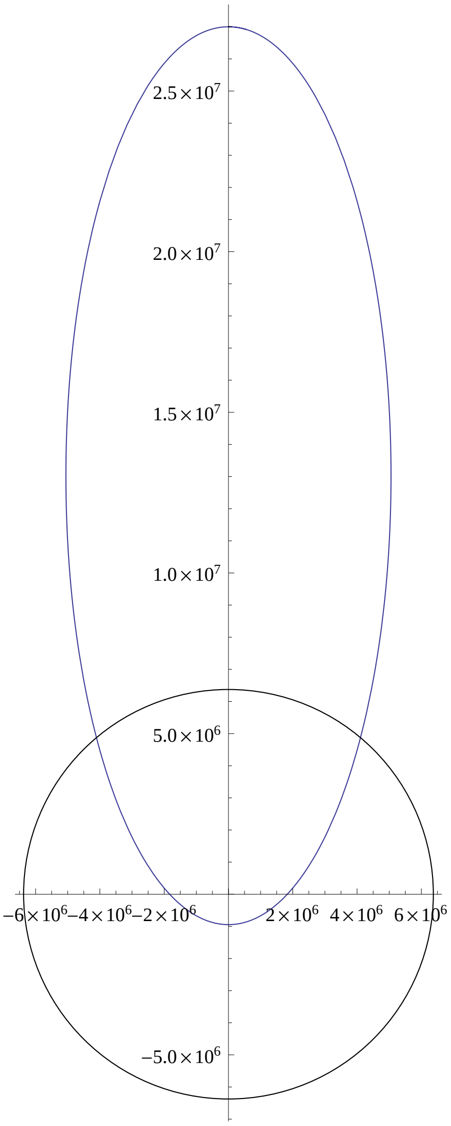


Figura 5.1: Gràfic que ens demostra el vigor del *Mathematica* en un càlcul d'integració del capítol anterior (subsecció 4.2.4.)que requereix precisió. Si llegiu la secció següent, el problema de tres cossos, podreu captar una manera de solucionar-lo a partir d'ella.

La integració per mètodes numèrics del *Mathematica* és el que fa possible aquesta exactitud. El mòdul *Mpmath* del *Python* també ho fa, però és molt més pràctic el que hem triat.

Poden ser útils per a fer-se una idea de com són tots aquests càlculs a la realitat, tot i què la simplificarem per a fer els programes més comprensibles i perspicus. De totes maneres, l'esquema del nostre programa i un que s'apropi més a la realitat és semblant, per exemple, enlloc de considerar que la Lluna gira al voltant de la Terra amb una òrbita descrita per unes efemèrides (es poden trobar al *PyEphem*), ho simplificarem a una circumferència (l'excentricitat de l'el·lipse de la seva òrbita aproximada és 0'0549, pràcticament una circumferència). Els paràmetres orbitals tampoc són exactes ja que el moviment de la Lluna té moltes pertorbacions a causa de la influència gravitatòria d'altres cossos com el Sol.

Els programes que utilitzo estaran escrits al final de cada secció. En general el llenguatge *Mathematica* és bastant intuïtiu, i si hi ha alguna funció desconeguda explicaré per a què serveix.

Els programes consisteixen en uns *Inputs* que els avalua la màquina i torna uns *Outputs* com a resposta a cadascun. Aquí escriuré els primers, els *Inputs*, i els *Outputs* que puguin ser rellevants. Si es disposa del *Mathematica*, per tant, només farà falta avaluar el que s'escriu a cada apartat.

5.3. EL PROBLEMA DELS TRES COSSOS

En el capítol precedent havíem fet un programa per al càlcul de trajectòries del problema de dos cossos, amb l'acceleració d'un menyspreable. Aquí ampliarem el problema a tres cossos. Com vam dir a partir de tres cossos no hi ha solució analítica, excepte per alguns casos particulars, per tant, el procediment per a més de tres cossos serà el mateix.

Volem integrar l'òrbita d'una nau a partir de la posició i velocitat inicials d'aquesta en un sistema que hi ha la Terra i la Lluna.

5.3.1. ASPECTES IMPORTANTS A CONÈIXER

Sistema de referència

Com que la Terra ara sí que estarà accelerada ja no la podem agafar com a referencial inercial. Agafem el centre de masses, que és un referencial galileià. Primer obtindrem les coordenades dels tres cossos respecte del centre de masses i després passarem l'origen de coordenades a la Terra.

L'eix *OX* i *OY* del sistema de referència al centre de masses estan al pla orbital de translació de la Lluna (inclinat 5º respecte el pla de la òrbita de la Terra) al voltant de la Terra. L'eix *OZ* queda a l'hemisferi nord i és perpendicular al pla orbital.

Òrbites de la Terra i de la Lluna

Suposem que les òrbites de la Terra i de la Lluna són circulars. És una simplificació, ja que sinó la velocitat angular no seria constant, com a conseqüència que la distància entre la Terra i la Lluna tampoc ho és. Si es vol, es poden aconseguir els paràmetres orbitals del *PyEphem* i importar-los al *Mathematica*. L'únic aspecte que variarà al programa final és la funció de la posició d'aquests planetes i el temps que tardarà a fer la integració.

Tots sabem que si posem el referencial a la Terra, la Lluna girarà al voltant de la Terra. Però i si posem el referencial al centre de masses, com seran les òrbites? Seran circulars. Pel lector que li costi convèncer-se, només cal que apliqui una translació del sistema de coordenades de la Terra al sistema de referència del centre de masses.

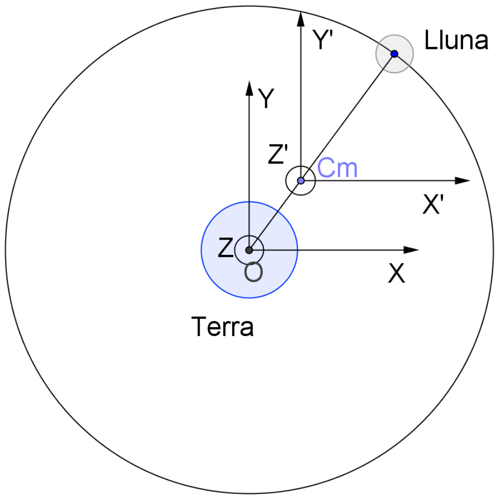


Figura 5.2: Canvi de sistema de referència d'origen a la Terra a un que té d'origen el centre de masses. És ben sabut que la circumferència que està al costat de la lletra Z vol dir que l'eix de coordenades OZ és perpendicular a OY i a OX, i que surt cap a fora del paper, també està usat al costat de Z'. Si hi ha una creu vol dir que va cap a dins.

Sigui $[\overrightarrow{OP}]$ un vector al sistema de referència (O, X, Y, Z). El vector $[\overrightarrow{CmP}] = [\overrightarrow{OP}] - [\overrightarrow{OCm}]$. Per tant si l'equació de l'òrbita de la Lluna a un sistema de referència és circular a l'altre també.

Les equacions de posició de la Lluna i de la Terra respecte del referencial al centre de masses són:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_L} = d_{T-L}(\cos(\omega\Delta t),\ \sin(\omega\Delta t), 0) - d_{T-CM}(\cos(\omega\Delta t),\ \sin(\omega\ \Delta t), 0) = d_{CM-L}(\cos(\omega\Delta t),\ \sin(\omega\Delta t), 0) \\ \overrightarrow{r_T} = -d_{O-CM}(\cos(\omega\Delta t),\ \sin(\omega\Delta t), 0), \end{cases}$$

sent $\overrightarrow{r_L}$ i $\overrightarrow{r_T}$ són els vectors de posició de la Lluna i de la Terra respectivament, ω és igual a la velocitat angular de cada cos, d_{A-B} és igual a la distància del punt A al punt B, i $\Delta\, t$ és igual a l'increment del temps.

Imposem que $t_o = 0$, i que $\overrightarrow{r_{T_o}} = (-d_{O-\mathrm{CM}}, 0, 0)$, llavors les equacions queden així:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_T} = |\overrightarrow{r_T}|(-\cos(\omega\Delta t),\ -\sin(\omega\Delta t), 0) \\ \overrightarrow{r_L} = |\overrightarrow{r_L}|(\cos(\omega\Delta t),\ \sin(\omega\Delta t), 0). \end{cases}$$

Més endavant, quan fem les computacions de òrbites cap a la Lluna, entendrem per què s'ha elegit la posició inicial de la Terra a l'eix OX negatiu del referencial al centre de masses.

Velocitat angular

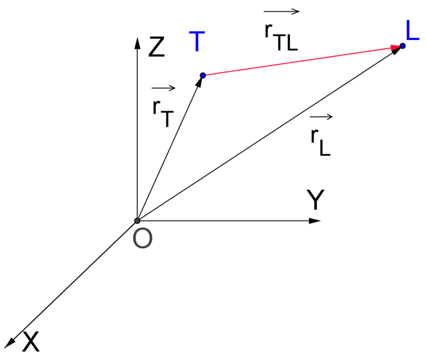


Figura 5.2: Posicions de la Terra i de la Lluna respecte un referencial galileià.

Per a conèixer l'acceleració normal i, per tant, la velocitat angular, cal que agafem un sistema referencial galileià ja que en ell les lleis del moviment de Newton es compleixen.

Sigui el referencial (O, X, Y, Z) un galileià. Llavors tenim que les segones derivades dels vectors de posició de la Terra ($\overrightarrow{r_T}$) i la Lluna ($\overrightarrow{r_L}$), aplicant la llei de la Gravitació Universal, són:

$$\ddot{\vec{r_T}} = G \frac{m_L}{|\vec{r_L} - \vec{r_T}|^3} (\vec{r_L} - \vec{r_T})$$

$$\ddot{\vec{r_L}} = -G \frac{M_T}{|\vec{r_L} - \vec{r_T}|^3} (\vec{r_L} - \vec{r_T}),$$

on m_{LL} i M_T són les masses de la Lluna i la Terra respectivament i G la constant de gravitació Universal.

Si restem de les dos maneres possibles aquests dos vectors tenim l'acceleració normal de qualsevol dels dos cossos:

$$\ddot{\overrightarrow{r_{TL}}} = \ddot{\vec{r_T}} - \ddot{\vec{r_L}} = G \frac{(M_T + m_L)}{|\vec{r_L} - \vec{r_T}|^3} (\vec{r_L} - \vec{r_T}) = G \frac{(M_T + m_L)}{|\overrightarrow{r_{TL}}|^3} (\overrightarrow{r_{TL}})$$

$$\ddot{\overrightarrow{r_{LT}}} = G \frac{(M_T + m_L)}{|\overrightarrow{r_{LT}}|^3} (\overrightarrow{r_{LT}})$$

on $\overrightarrow{r_{TL}}$ és el vector que uneix la Terra amb la Lluna (vector de posició de la Lluna respecte el referencial a la Terra) i $\overrightarrow{r_{LT}}$ el que uneix la Lluna amb la Terra (vector de posició de la Terra respecte el referencial a la Lluna). És a dir, l'acceleració normal de la Terra és igual a l'acceleració normal de la Lluna en mòdul i direcció, però tenen sentit contrari.

I ara podrem buscar la velocitat angular dels cossos:

$$|\ddot{\overrightarrow{r_{TL}}}| = a_n = \omega^2 \, |\overrightarrow{r_{LT}}|$$

$$\omega = \sqrt{G \frac{(M_T + m_L)}{|\overrightarrow{r_{LT}}|^3}}$$

sent a_n l'acceleració normal, i ω la velocitat angular. És fàcil veure que al tenir el mateix mòdul l'acceleració angular és la mateixa als dos cossos.

Radi de la òrbita de la Terra i radi de la òrbita de la Lluna amb el referencial del centre de masses

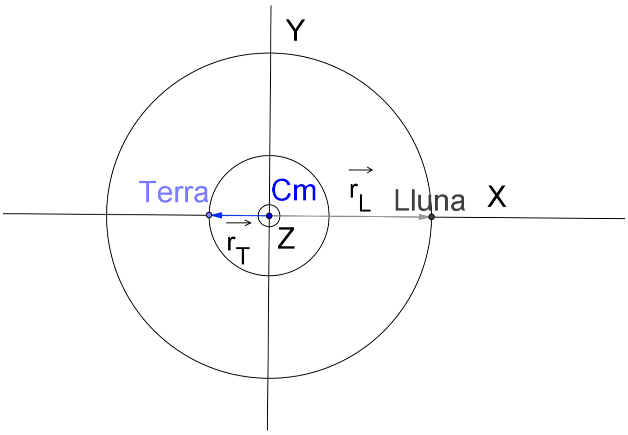


Figura 5.3: Òrbites de la Terra i de la Lluna amb el centre de masses al centre de les seves òrbites. No està dibuixat a escala, ja que el radi de la òrbita de la Terra és molt petit (4671.6 km.) comparat amb el de la òrbita de la Lluna (379728 km.). La posició dels dos cossos és la inicial.

Com que volem que el centre de masses sigui al punt (0,0,0) llavors queda:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{M_T \vec{r_T} + m_L \vec{r_L}}{M_T + m_L} = (0, 0, 0)$$

$$M_T \vec{r_T} + m_L \vec{r_L} = (0, 0, 0) \rightarrow M_T + |\vec{r_T}| = m_L + |\vec{r_L}| \; (\text{els vectors } \vec{r_T} \text{ i } \vec{r_L} \text{ tenen direcció contrària}),$$

on $\vec{r_T}$ i $\vec{r_L}$ són els vectors de posició de la Terra i la Lluna respectivament.

També volem que $|\vec{r_T} + \vec{r_L}| = |\overrightarrow{r_{TL}}|$. Aquest darrera norma equival al radi orbital mitjà de la Lluna al voltant de la Terra.

Hem de resoldre el sistema d'equacions següent per aconseguir els radis buscats:

$$\begin{cases} M_T + \left|\overrightarrow{r_T}\right| = m_L + \left|\overrightarrow{r_L}\right| \\ \left|\overrightarrow{r_T} + \overrightarrow{r_L}\right| = \left|\overrightarrow{r_{TL}}\right| \end{cases}$$

5.3.2. INTEGRACIÓ NUMÈRICA DE LA TRAJECTÒRIA

He separat el programa de manera que es pugui diferenciar bé el que fa cada part. Ara tot el que hem escrit a la subsecció anterior ho posarem en pràctica.

Assignació de les variables: masses, distàncies i la constant de gravitació universal del sistema de partícules

```
G = 6.67 × 10^-11
MTerra = 5.9736 × 10^24
MLluna = 7.349 × 10^22
DTerraLluna = 3.844 × 10^8
```

És ben clar que *G* és la constant de gravitació Universal; *MTerra* la massa de la Terra; *MLluna* la massa de la Lluna i *DTerraLluna*, la distància de la Terra a la Lluna.

Resolució del sistema d'equacions per a trobar el radi de cada òrbita dels planetes al referencial del centre de masses

```
sistema = Solve[
  {MTerra rTerra / 10^24 == MLluna rLluna / 10^24 ,
   rTerra + rLluna == DTerraLluna},
  {rTerra, rLluna}]
rTerra = rTerra /. sistema
rLluna = rLluna /. sistema
```

Es pot induir que *Solve* és una funció que resol equacions i, en aquest cas sistemes d'equacions.

A la llista *sistema* hi ha els dos valors que es separen després amb l'operador /..

La distància del centre de masses al centre de la Terra és de 4671,60 km. aproximadament, és a dir, més petita que el seu radi.

Càlcul de la velocitat angular

```
vAng = Sqrt[ G (MTerra + MLluna) / DTerraLluna^3 ]
```

$$\text{vAng} = \sqrt{\frac{G\,(\text{MTerra} + \text{MLluna})}{\text{DTerraLluna}^3}}$$

Funcions del vector de posició i de velocitat de la Terra i de la Lluna

```
posTerra[t_ /; NumberQ[t]] :=
 Module[
  {x, y, z, pos},
  x = rTerra (-Cos[vAng t]);
  y = rTerra (-Sin[vAng t]);
  z = 0;
  pos = {x, y, z}]
velTerra[t_ /; NumberQ[t]] :=
 Module[
  {x, y, z, pos},
  x = vAng rTerra (Sin[vAng t]);
  y = vAng rTerra (-Cos[vAng t]);
  z = 0;
  pos = {x, y, z}]
```

```
posLluna[t_ /; NumberQ[t]] :=
 Module[
  {x, y, z, pos},
  x = rLluna Cos[vAng t];
  y = rLluna Sin[vAng t];
  z = 0;
  pos = {x, y, z}]
velLluna[t_ /; NumberQ[t]] :=
 Module[
  {x, y, z, pos},
  x = -vAng rLluna Sin[vAng t];
  y = vAng rLluna Cos[vAng t];
  z = 0;
  pos = {x, y, z}]
```

Per a definir funcions les variables les escriurem seguides d'una barra baixa. Enlloc d'un igual escriurem := per a escriure el cos de la funció.

La funció *NumberQ[expressió]* torna el booleà True si l'expressió és un nombre i False si no ho és (recordem que el *Mathematica* és un manipulador algèbric). El símbol /; és una condició que permet utilitzar el valor que es doni a *t_* si l'expressió de la dreta és certa. Això s'escriu per a impedir que el *Mathematica* treballi sense nombres, ja que és un sistema d'avaluació infinit, i si per algun error li donéssim una expressió algebraica pararia. En el cas del nostre programa és bo que sol treballi amb nombres.

La funció *Module[{x,y,...},expr]* utilitza les variables x,y,... com a locals durant l'execució de l'expressió. Variables locals vol dir que només s'utilitzen per al càlcul de les operacions que hi ha dins la funció, com les funcions del *Python* que hem exposat.

Les funcions de la velocitat de la Terra i de la Lluna són les derivades dels components del vector de posició de cada cos. Les utilitzarem en el procés de buscar una trajectòria per a viatjar a la Lluna.

Acceleració de la nau per components

```
acc[{t_ /; NumberQ[t], x_ /; NumberQ[x], y_ /; NumberQ[y], z_ /; NumberQ[z]}] :=
 Module[
  {dTerra, dLluna, aTerra, aLluna, a},
  dTerra = Norm[Flatten[posTerra[t] - {x, y, z}]];
  dLluna = Norm[Flatten[posLluna[t] - {x, y, z}]];
  aTerra = G MTerra / dTerra^3 (posTerra[t] - {x, y, z});
  aLluna = G MLluna / dLluna^3 (posLluna[t] - {x, y, z});
  a = aTerra + aLluna]
ax[{t_ /; NumberQ[t], x_ /; NumberQ[x], y_ /; NumberQ[y], z_ /; NumberQ[z]}] :=
 acc[{t, x, y, z}][[1]]
ay[{t_ /; NumberQ[t], x_ /; NumberQ[x], y_ /; NumberQ[y], z_ /; NumberQ[z]}] :=
 acc[{t, x, y, z}][[2]]
az[{t_ /; NumberQ[t], x_ /; NumberQ[x], y_ /; NumberQ[y], z_ /; NumberQ[z]}] :=
 acc[{t, x, y, z}][[3]]
```

La funció *Norm[expr]* podem induir que torna la norma d'un nombre (útil per als complexos), vector o matriu. L'altra *Flatten[llista]* col·loca a tots els elements d'una llista al mateix nivell, ja que la funció *Norm[]* sol funciona amb llistes del mateix nivell. Aquí hi ha un exemple del mecanisme *Flatten[]*.

```
In[1] := a = {{1, 2}, {3, 4}, {{5}}}
Out[1] =  {{1, 2}, {3, 4}, {{5}}}

In[2] := Flatten[a]
Out[2] =  {1, 2, 3, 4, 5}
```

Es nota que el *Mathematica* té molta varietat de funcions definides, i útils que fan el programa més llegible, sense la funció *Norm[]* hauríem d'escriure la arrel de la suma dels quadrats de cadascun dels components.

L'operador d'indexació *[[x]]*, separa l'element que està a la posició *x* de la llista que el precedeix. Ho fèiem d'una forma similar amb el *Python*.

Assignació de les variables de l'estat inicial de la nau

```
stat0 = {0, 10^7, 0, 7000, 0, 0} + Join[posTerra[0], velTerra[0]]
tinicial = 0
tfinal = 100000
```

La funció *Join[llista1, llista2,...]* concatena les llistes que rep com a paràmetres. Hem de tenir en compte que estem en el referencial al centre de masses, per això, si volem introduir unes coordenades respecte la Terra hem de sumar-los-hi la posició i la velocitat de la Terra.

L'elecció de la posició i velocitat inicials esta feta, en aquest cas, de manera que la nau segueix una òrbita que no s'escapa cap a l'infinit. Podrem veure un efecte curiós degut a la forta atracció de la Terra. L'interval de temps equival a 27 hores aproximadament.

Resolució numèrica de l'equació diferencial i extracció de les funcions interpol·lades dels components

```
solució = NDSolve[
  {
   x''[t] == ax[{t, x[t], y[t], z[t]}],
   y''[t] == ay[{t, x[t], y[t], z[t]}],
   z''[t] == az[{t, x[t], y[t], z[t]}],
   x[tinicial] == stat0[[1]],
   y[tinicial] == stat0[[2]],
   z[tinicial] == stat0[[3]],
   x'[tinicial] == stat0[[4]],
   y'[tinicial] == stat0[[5]],
   z'[tinicial] == stat0[[6]]},
  {x, y, z}, {t, tinicial, tfinal}]
xpos = solució[[1]][[1]][[2]]
ypos = solució[[1]][[2]][[2]]
```

Aquí es resol numèricament l'equació diferencial. S'exposa de la manera que caracteritza aquest llenguatge, clara i intuïtiva. L'operador d'indexació aquí l'hem utilitzat tres vegades per a obtenir les funcions d'interpol·lació de cada component i els posem nom. Es pot percebre una fàcil manipulació de les funcions que donen el component de la posició. Amb elles podríem, per exemple, calcular la seva derivada, i així tindríem la velocitat.

És impressionant que, en el mateix ordinador, ha tardat 2,047 segons a realitzar el càlcul i ho ha fet amb una precisió molt més gran. El temps que tarda a executar una expressió el podem mesurar amb la funció *Timing[expr]*.

Representació gràfica de la trajectòria amb el sistema de referència al centre de masses

```
ParametricPlot[{xpos[t], ypos[t]}, {t, tinicial, tfinal}]
```

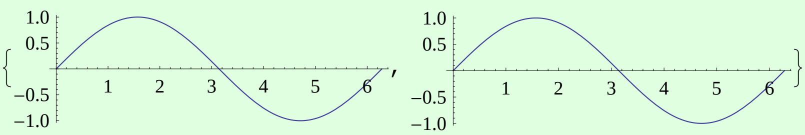
Aquesta ordre torna el gràfic del recorregut de la nau amb el referencial al centre de masses. Els paràmetres i funcions que se li donen els comprèn així: *ParametricPlot*$[\{f[t], g[t]\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}]$.

L'opció *PlotRange* –> *All* serveix per a representar tots els punts del gràfic. Si el gràfic és una asímptota, al no poder represen tar-se tots els punts d'una asímptota, en representa una part.

L'altra, *AspectRatio* –> k serveix per a canviar la proporció dels eixos, $\frac{OY}{OX} = k$. El valor per defecte és igual a 1/Nombre d'or. Si escrivim *Automatic*, llavors agafa la proporció dels punts de la funció, és a dir, la unitat de l'eix OX és igual a la unitat de l'eix OY. O dit d'una altra manera *Automatic* $= \frac{\text{Longitud interval } OY}{\text{Longitud interval } OX}$. Amb un exemple s'entén millor.

```
In[1] := {Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, AspectRatio → Automatic],
  Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, AspectRatio → 2 / (2 Pi)]}
```

Out[1] = {



}

Com es pot observar, els gràfics tenen la mateixa proporció dels eixos.

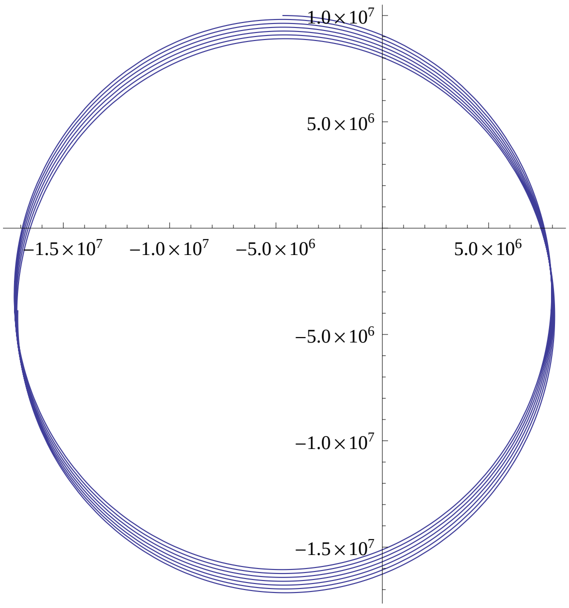


Figura 5.3: Trajectòria d'una nau estant atreta per la Terra i la Lluna. El referencial és al centre de masses.

El lector es pot preguntar com és que l'òrbita del gràfic és desplaça. Té una explicació, al gràfic tenim les posicions respecte el centre de masses i la Terra està orbitant circularment al voltant d'aquest. Com que l'atracció de la Terra és més gran que la de la Lluna, el moviment de la nau és veu altament influenciat per la Terra i les variacions de les posicions d'aquesta regiran l'òrbita de la nau.

Funcions del vector de posició de la nau amb el referencial a la Terra

```
OTERRAxpos[t_ /; NumberQ[t]] :=
 xpos[t] - posTerra[t][[1]]
OTERRAypos[t_ /; NumberQ[t]] :=
 ypos[t] - posTerra[t][[2]]
```

Definim les funcions que donaran la posició respecte la Terra, una translació del sistema de coordenades.

Gràfic de la Terra

```
grTerra = Graphics[Circle[{0, 0}, radiTerra]]
```

La funció *Graphics[]* serveix per a cridar una altra funció perquè et faci un gràfic. L'altra, *Circle[{x,y}, radi]* et crea un cercle donats un radi i una posició. Així tindrem una referència de la grandària de la Terra, encara que no seria una esfera perfecta, sinó que estaria lleugerament aplanada pels pols.

Representació gràfica de la trajectòria amb el sistema de referència a la Terra

```
Show[{ParametricPlot[{OTERRAxpos[t], OTERRAypos[t]}, {t, tinicial, tfinal}], grTerra},
 AspectRatio → Automatic, PlotRange → All]
```

Aquesta ordre, *Show[gràfics, opcions]*, junta els gràfics que hi ha a una llista amb les opcions elegides.

Finalment, representem el dibuix de la trajectòria de la nau amb el sistema de referència a la Terra.

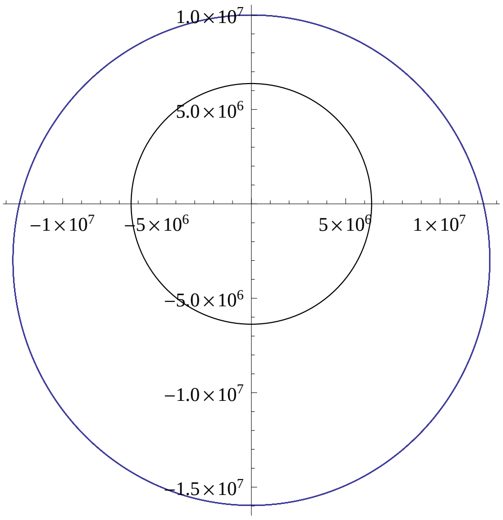


Figura 5.4: Trajectòria de la nau del programa anterior amb el sistema de referència a la Terra. Es pot diferenciar la silueta de la Terra (suposant que és una esfera).

Gràfics del mòdul de la velocitat i l'acceleració en funció del temps

No resulta molt difícil aconseguir el gràfic de la velocitat en funció del temps amb el *Mathematica*. Al tenir la funció de la posició només cal que avaluem la seva derivada.

```
velNau[t_ /; NumberQ[t]] := {xpos'[t], ypos'[t]}
ParametricPlot[{t, Norm[velNau[t]]},
 {t, tinicial, tfinal}, AspectRatio → 0.4, PlotRange → All]
```

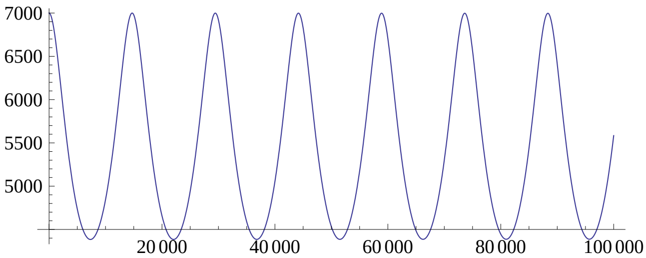


Figura 5.5: Velocitat en funció del temps.

I el mateix amb l'acceleració en funció del temps.

```
accNau[t_ /; NumberQ[t]] := {xpos''[t], ypos''[t]}
ParametricPlot[{t, Norm[accNau[t]]},
 {t, tinicial, tfinal}, AspectRatio → 0.4, PlotRange → All]
```

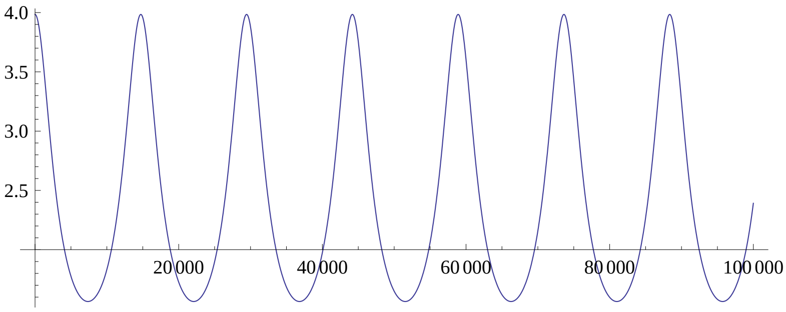


Figura 5.6: Representació de l'acceleració de la nau en funció del temps.

L'*AspecRatio* és 0.4 per a què es pogués apreciar millor els gràfics. En aquests gràfics es sotja que la velocitat i l'acceleració són funcions periòdiques. Cada període correspon a una volta a la Terra. per a veure quantes voltes fa a la Lluna ho podem comptar amb el gràfic de la posició del centre de masses o amb aquests.

5.4. EL TIR DE MÀNEGA

En una situació quotidiana, regant el jardí, molts hauran pogut apreciar i, fins i tot, especialitzar-se en la tècnica de encarar el raig de la mànega cap a on volem agafant una posició inicial i sense moure'ns d'ella. Augmentant la velocitat o disminuint-la i canviant l'angle, al final s'arriba a uns paràmetres que permeten assolir el nostre objectiu. Cada gota que surt disparada de la mànega és com una nau i segons els paràmetres inicials arribarà a un lloc o a un altre. Això mateix és una forma per a fer arribar una nau a un objectiu fixat. Aquest és un mètode que no és molt complicat, però molt efectiu.

5.4.1. UN VIATGE D'ANADA A LA LLUNA

En aquest apartat exposarem per mitjà d'aquest procediment, a partir del programa dels tres cossos (Terra - Lluna - Nau), d'enviar una nau a la Lluna. Solament el viatge d'anada. La manera òptima d'utilitzar aquest mètode ho farem a la secció següent en què calculem la trajectòria per anar a la Lluna.

El programa anterior dóna la posició de la nostra nau llança't des de un punt qualsevol amb una certa velocitat des d'un referencial a la Terra. Anem a moure el sistema de referència de manera que l'eix *OX* estigui sempre a la direcció del vector Terra - Lluna. Aquest sistema rotatiu donarà una gir a la nostra perspectiva. Permetrà veure amb un cop d'ull si s'apropa o no.

No fa falta tornar a escriure el programa precedent, els *Inputs* que venen a continuació han d'anar seguits d'aquest per a què funcioni bé. El podríem dividir en els passos següents:

Sistema de referència rotatiu

Vogim el sistema de coordenades sent l'eix de gir *OZ* fins que l'eix *OX'* quedi alineat amb la Lluna, i tingui el mateix sentit que el vector Terra - Lluna. Creem una funció que doni el referencial rotatiu en funció del temps.

```
sistemaRotatiu[t_ /; NumberQ[t]] :=


 Module[
  {x, y, z},
  x = posLluna[t] - posTerra[t];
  x = x / Norm[x];
  z = {0, 0, 1};
  y  = Cross[z, x];
  {x, y, z}]
```

La funció *Cross[a,b]* torna el producte vectorial entre els vectors *a* i *b*. Sempre va bé comprovar si per al temps 0 funciona com esperem.

```
sistemaRotatiu[0]
{{1.`, 0, 0}, {0, 1.`, 0.`}, {0, 0, 1}}
```

Si que funciona bé, l'eix *OX'* apuntarà cap a la Lluna. Aquí podem trobar la raó d'agafar la posició inicial de la Terra a l'eix X negatiu del sistema de referència al centre de masses. D'aquesta manera, les posicions inicials de la Terra al gràfic que té el referencial a la Terra fix i el gràfic que el té mòbil coincidiran.

Posició de la nau al referencial rotatiu

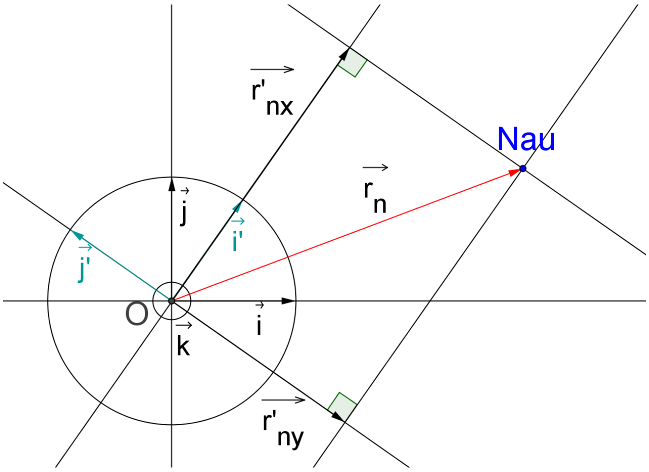


Figura 5.7: Canvi de sistema de referència. El versors $\vec{i}$, $\vec{j}$ són els del referencial fix, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, són els del referencial mòbil. El versor $\vec{k}$ és comú als dos.

Hem de passar les coordenades de l'eix fix a l'eix rotatiu. L'origen de coordenades no es mou. El referencial fix (O; $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$) i el referencial mòbil (O; $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\}$).

Si multipliquem els vectors $\vec{r_n}$ (vector de posició de la nau) i $\vec{i}'$ escalarment:

$$\left|\vec{r_{nx}}\right| = \vec{r_n}\cdot\vec{i}' = \left|\vec{r_n}\right| \cdot \left|\vec{i}'\right| \cdot \cos\left(\vec{r_n}, \vec{i}'\right) = \left|\vec{r_n}\right| \cos\left(\vec{r_n}, \vec{i}'\right),$$

sent $|\vec{r_{nx}}|$ la coordenada x de l'eix rotatiu.

El mateix podríem fer amb els altres components. El programa permet calcular el producte escalar de dos vectors. Aniria així $\{x, y, z\}.\{u, v, w\} = x\,u + y\,v + z\,w$. Però si multipliquem escalarment una base per un vector:

```
In[1] := {{i1, i2, i3}, {j1, j2, j3}, {k1, k2, k3}}.{x, y, z}
Out[1] =  {x i1 + y i2 + z i3, x j1 + y j2 + zj3, x k1 + y k2 + z k3}
```

Per tant, ja sabem el que calcularà aquesta expressió:

```
sistemaRotatiu[t].{OTERRAxpos[t], OTERRAypos[t], 0}
```

Gràfics del planeta i del seu satèl·lit

```
radiTerra = 6.373 × 10^6
radiLluna = 1.738 × 10^6
grTerra  = Graphics[Circle[{0, 0}, radiTerra]]
grLluna  = Graphics[Circle[{DTerraLluna, 0}, radiLluna]]
```

Per a una bona visualització del problema, cal que creem aquests dos gràfics que situaran la posició de la Lluna i la posició de la Terra a la representació final.

Dibuix de la trajectòria

```
Show[{ParametricPlot[{(sistemaRotatiu[t].{OTERRAxpos[t], OTERRAypos[t], 0})[[1]],
     (sistemaRotatiu[t].{OTERRAxpos[t], OTERRAypos[t], 0})[[2]]},
    {t, tinicial, tfinal}], grTerra, grLluna}, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]
```

Podeu notar que l'operador d'indexació té precedència davant del producte escalar, per això posem els parèntesis.

L'interval de temps va de 0 fins a 70000 segons (20 hores aproximadament). Amb la posició i velocitat inicial següent dibuixem un gràfic de la trajectòria.

```
stat0 = {10^7, -10^7, 0, 9500, 0, 0} + Join[posTerra[0], velTerra[0]]
```

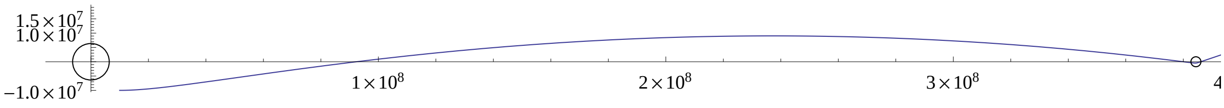


Figura 5.8: Gràfic de la nau amb un referencial rotatiu amb l'eix *OX* sempre apuntant a la Lluna. Amb aquestes condicions inicials la nau arriba a la Lluna.

Existeixen formes a on anirà a parar la nau utilitzant el mètode del *Tir de Mànega*. En aquest cas, jo no els he utilitzat, i al cap d'uns quants intents, canviant velocitats i posicions inicials, vaig obtenir aquesta trajectòria per aterrar a la Lluna. Això no vol dir que sigui una trajectòria òptima, a l'apartat següent veurem per què. L'he posat, tot i això, per a què ens adonem que hem de plantejar el problema des d'una altra perspectiva si volem planejar un viatge prudent. A la secció següent es podrà captar l'alternativa.

Serà rellevant també un gràfic amb el sistema de referència fix a la Terra. A la secció anterior, s'explica com es fa. Com veiem, canvia molt el rumb.

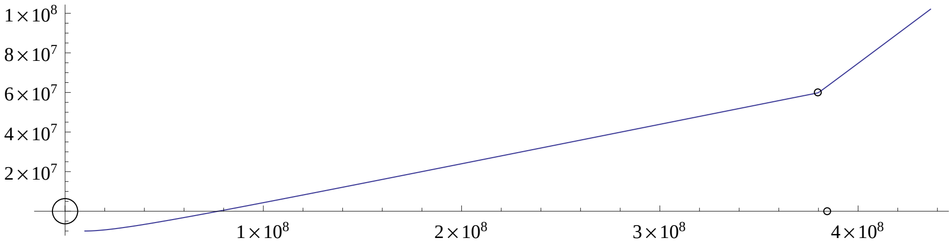


Figura 5.9: Gràfic de la nau amb un referencial fix a la Terra. Hi ha dibuixades dos posicions de la Lluna, una correspon a la posició inicial i l'altra al moment en què la nau xoca contra la seva superfície.

Velocitat i acceleració de la nau

Anal·litzem els gràfics de la velocitat i de l'acceleració. El procediment per aconseguir-los és el mateix, tal i com el vam explicar al problema dels 3 cossos.

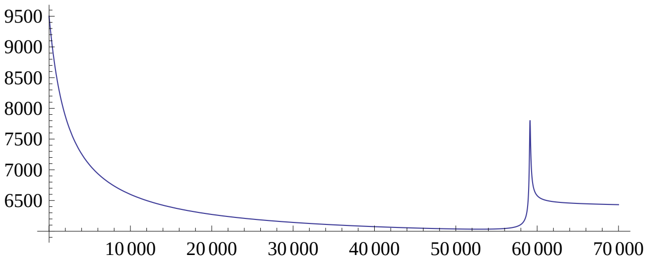


Figura 5.10: Velocitat en funció del temps

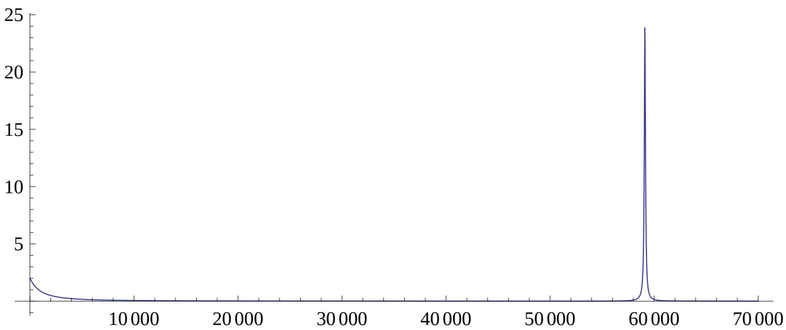


Figura 5.11: Acceleració en funció del temps.

Xoquem contra la Lluna si no aconseguim frenar la nau. S'ha de buscar a quina velocitat anirà quan impacti amb la superfície. Definim la funció que torna la distància de la nau a la lluna en funció del temps.

```
DNauLluna[t_ /; NumberQ[t]] := Norm[Flatten[{xpos[t], ypos[t], 0} - posLluna[t]]]
```

Resolem numèricament l'equació amb l'ordre *FindRoot*[*lhs* == *rhs*, {x, x_o, x_1}] per a saber quan el mòdul de la funció de la posició serà igual al radi de la Lluna. Els valors x_0 i x_1 serveixen per a donar els primers valors de x a utilitzar. *Lhs* i *rhs* signifiquen el membre esquerra i dret de l'equació, respectivament.

```
tXocLluna = t /. FindRoot[DNauLluna[t] == radiLluna, {t, 50000, 50100}]
```

Dóna com a resultat a les 16,5 hores. Evaluem la norma de la funció de la velocitat de la nau per components en aquell moment.

```
Norm[velNau[tXocLluna]]
```

Anirà a una velocitat de 6449,87 m/s, que equival a uns 23219,532 km/h. Per a frenar amb un coet la nau hauríem de fer un consum de combustible molt gran. A més a més que no és econòmica, aquesta trajectòria no resulta prudent perquè si fallessin alguns motors la nau quedaria esclafada a la Lluna.

És altíssima l'acceleració que agafaria si la Lluna fos una massa puntual. Aquí ens adonem d'una de les tècniques per a enviar una nau a un punt de l'espai molt allunyat, tant que no tenim combustible per arribar-hi. És diu swing-by, i és una forma d'aprofitar amb la nau massiva la força gravitatòria de planetes que té al voltant per accelerar-se i aconseguir així el seu objectiu.

5.5. EN DIRECCIÓ A LA LLUNA

Aquí calcularem una trajectòria per anar a la Lluna i tornar. Com s'ha explicat a la secció 5.1. les fases del nostre viatge seran les mateixes que les de qualsevol vol cap a la Lluna. Suposarem que la nostra nau està orbitant en una òrbita circular al voltant de la Terra. Calcularem la trajectòria de retorn lliure de manera que si els coets de la nau s'espatllessin a la meitat del viatge, tornaríem automàticament cap a casa sense haver de fer servir cap propulsor. Si no hi hagués cap entrebanc, llavors els nostres astronautes podrien maniobrar a la cara oculta de la Lluna per a realitzar la injecció a la òrbita circular lunar. A partir d'aquí seguirien els passos que hem descrit a la secció del començament del capítol.

El problema dels paràmetres òptims per al tir de la mànega

Com haureu vist a la subsecció anterior, el que no podem fer és anar calculant trajectòries fins que tinguem la sort que en trobem una que sigui de retorn lliure. Per a fer-ho d'una manera més ràpida i eficaç seguirem aquest esquema:

· Enlloc de partir de la Terra partirem de la Lluna per calcular la trajectòria. Elegim una posició a la cara oculta d'aquesta i a una altura de 100 km de la seva superfície.

· Com que el problema és simètric, integrarem endavant i endarrere i obtindrem la trajectòria d'anada i tornada.

· Només haurem de variar la velocitat per a obtenir les diferents trajectòries, és a dir tenim un sistema monoparamètric.

· Per tant, imposant que l'òrbita en què sortirà de la Terra sigui d'uns 200 km de la superfície, sol tindrem una trajectòria. Anem a trobar-la.

De tot el codi que hem escrit en el capítol necessitarem importar les assignacions de les variables inicials, la velocitat angular, les funcions del vector posició i del vector velocitat de la Terra i de la Lluna, l'acceleració per components en funció de la posició, la funció del sistema rotatiu i els gràfics de la Terra i de la Lluna.

Si anem dividint el problema en parts, al final tots els passos són més obvis i fàcils de fer. Per això, el càlcul que farem ara, destaca per la seva senzillesa i simplicitat, però si el mirem en el conjunt, veurem que no és trivial.

Funció de la trajectòria de la nau

Per a poder trobar la trajectòria que busquem necessitem tenir una funció que ens doni la òrbita de la nau en funció de la velocitat. Com hem dit, la posició inicial està a la cara oculta de la Lluna a uns 100 km. de la seva superfície, això es veu reflectit al codi. Seguint el que hem anat fent fins ara, la podríem fer d'aquesta manera:

```
posfunLluna[velRelLluna_ /; NumberQ[velRelLluna],
  tinicial_ /; NumberQ[tinicial], tfinal_ /; NumberQ[tfinal]] :=
 Module[
  {stat0, solució, xpos, ypos, OTERRAxpos, OTERRAypos, posi, funout},
  stat0 =
   {radiLluna + 100 000, 0, 0, 0, +velRelLluna, 0} + Join[posLluna[0], velLluna[0]];
  solució = NDSolve[
    {
     x''[t] == ax[{t, x[t], y[t], z[t]}],
     y''[t] == ay[{t, x[t], y[t], z[t]}],
     z''[t] == az[{t, x[t], y[t], z[t]}],
     x[0] == stat0[[1]],
     y[0] == stat0[[2]],
     z[0] == stat0[[3]],
     x'[0] == stat0[[4]],
     y'[0] == stat0[[5]],
     z'[0] == stat0[[6]]},
    {x, y, z}, {t, tinicial, tfinal}];
  xpos = solució[[1]][[1]][[2]];
  ypos = solució[[1]][[2]][[2]];
  OTERRAxpos[t_ /; NumberQ[t]] :=
   xpos[t] - posTerra[t][[1]];
OTERRAypos[t_ /; NumberQ[t]] :=
   ypos[t] - posTerra[t][[2]];
  funout = Function[t, sistemaRotatiu[t].{OTERRAxpos[t], OTERRAypos[t], 0}]
 ]
```

Per al lector l'única funció nova que utilitzem és la *Function[x,f(x)]*. Aquesta és una altra manera de definir funcions, imprescindible en aquest cas, ja que si ho fem de l'altra forma, el programa no torna una funció perquè no assignem cap variable.

Funció de l'altura mínima a la Terra

Un altra funció importantíssima és la de l'altura mínima a la Terra, amb aquesta podrem exigir que sigui el valor que vulguem i trobar la solució del sistema.

```
alturaTerraMin[velRelLluna_ /; NumberQ[velRelLluna]] :=
 Module[
  {fun, tlimit},
  tlimit = 400 000;
  fun = posfunLluna[velRelLluna, -tlimit, 0];
  FindMinimum[Norm[fun[t]], {t, -300 000, -301 000}][[1]] - radiTerra]
```

Aquí la funció *FindMinimum[f(x)]*, com molt bé indica el seu nom ens troba el mínim d'una funció bastant complexa. La funció de l'altura mínima a la Terra retornarà el valor mínim en funció de la velocitat relativa a la Lluna.

Resolució del sistema d'equacions

Una vegada ho tenim tot muntat, arriba el punt final. Resoldre el sistema d'equacions per a una altura mínima a la Terra de 200 km de la superfície. D'aquesta manera trobarem la velocitat i l'única velocitat relativa que haurà d'anar la nostra Nau respecte la Lluna, per a completar la trajectòria.

```
velRelLlunasol =
 FindRoot[alturaTerraMin[velRelLluna] == 200 000, {velRelLluna, -2530, -2531}][[1]][[
  2]]
```

Obtenim un valor de -2557.59 m/s. No gens comparable amb el que havíem obtingut a la subsecció anterior, que duplicava el seu valor i a més no era una trajectòria de retorn lliure.
Finalment ja podem mostrar com serà la trajectòria.

Representació de la trajectòria

Amb les funcions següents dibuixarem la trajectòria que seguirà la nostra Nau. Cada una d'elles està enfocada en un punt específic de l'òrbita.

```
tlimit = 250 000
Show[Module[
  {fun},
  fun = posfunLluna[velRelLlunasol, -tlimit, tlimit];
  ParametricPlot[{fun[t][[1]], fun[t][[2]]}, {t, -tlimit, tlimit}]],
 grTerra, grLluna, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]
Show[Module[
  {fun},
  fun = posfunLluna[velRelLlunasol, -tlimit, tlimit];
  ParametricPlot[{fun[t][[1]], fun[t][[2]]}, {t, -tlimit, tlimit}]],
 grTerra, grLluna,
 PlotRange → {{-10 000 000, 10 000 000}, {-10 000 000, 10 000 000}}, AspectRatio → Automatic]
tlimit = 250 000
Show[Module[
  {fun},
  fun = posfunLluna[velRelLlunasol, -tlimit, tlimit];
  ParametricPlot[{fun[t][[1]], fun[t][[2]]}, {t, -tlimit, tlimit}]],
 grTerra, grLluna,
 PlotRange → {DTerraLluna + {-5 000 000, 5 000 000}, {-5 000 000, 5 000 000}},
 AspectRatio → Automatic]
```

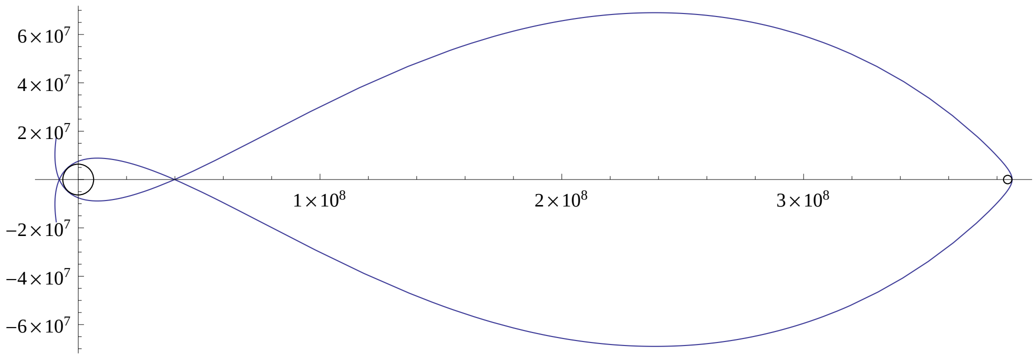


Figura 5.12: Òrbita translunar de la Nau.

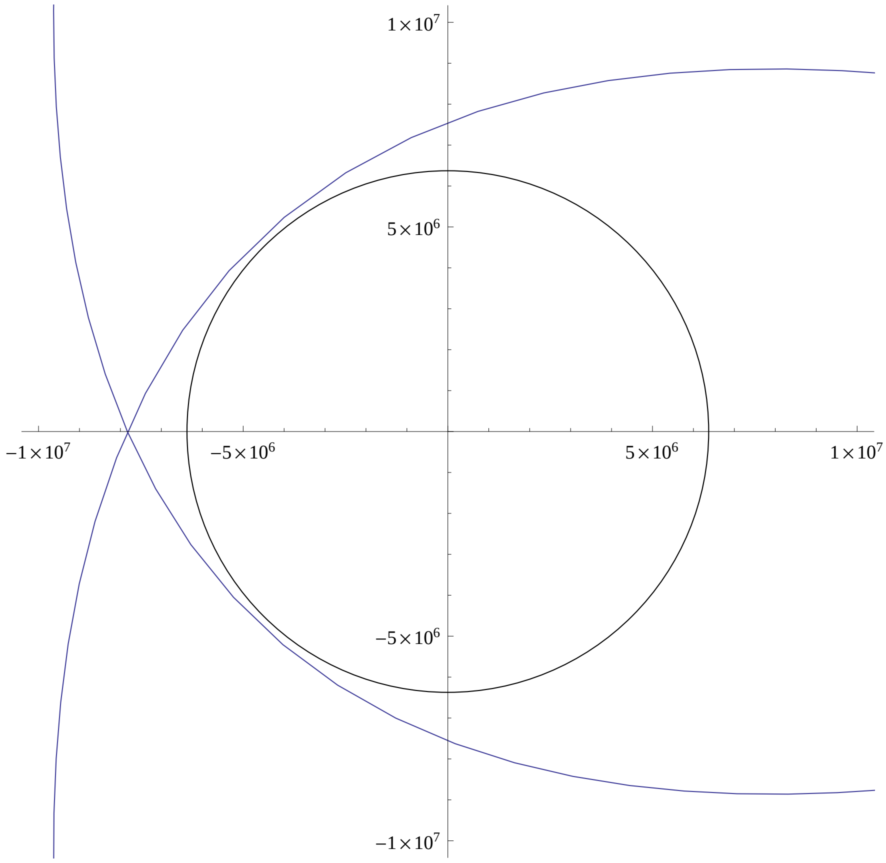


Figura 5.13: Òrbita translunar de la Nau ampliat a la Terra.

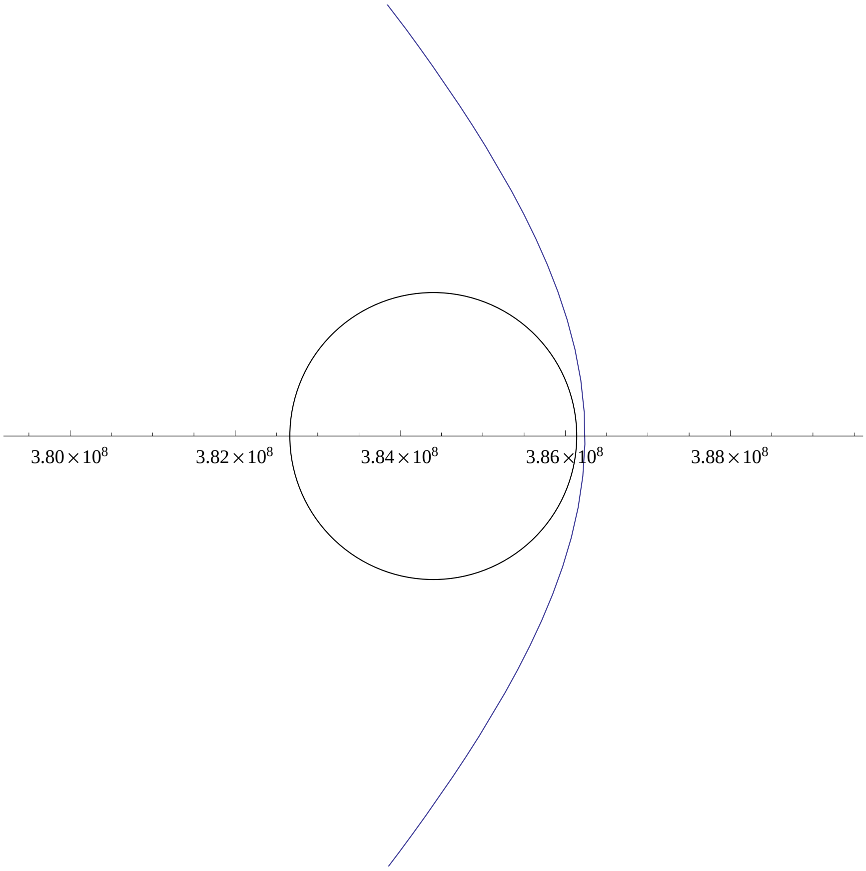


Figura 5.14: Òrbita translunar de la Nau ampliat a la Lluna.

Una de les observacions que podem fer és que aquesta té una durada de 69.44 hores aproximadament, gairebé 3 dies, molt més llarga que la que havíem obtingut a la secció del *Tir de la Mànega*.

En aquestes pàgines he desenvolupat el càlcul de la manera més entenedora que he pogut, però tot això ha estat possible per l'ajuda dels ordinadors, sense ells aquest treball a mà hauria estat impensable. De fet, no sé ni si el mateix Newton hagués pogut pensar que amb un programa i un ordinador es poguessin arribar a calcular trajectòries d'aquest tipus amb una precisió tan gran i tan fàcilment.

Conclusions

Quan era petit, mai m'havia imaginat que en el món existissin uns mètodes que ens permetessin predir els moviments que segueixen els planetes i qualsevol cos que tirem a l'espai. Però ara ja crec que és possible, i és impressionant el canvi de perspectiva que he tingut. I no solament es pot arribar a unes lleis empíriques, sinó que per mitjà d'aquestes es pot demostrar unes altres amb el raonament correcte. Encara que no tinguem una teoria del camp unificat, les teories que avui dia expressen el moviment dels astres, són molt exactes.

En part, aquest treball de recerca m'ha servit per a ampliar el meu camp de coneixements sobre astronomia, física i història de l'astronomia. Però això també es pot fer sense escriure un treball com aquest. M'agradaria que aquest treball serveixi per a qui estigui interessat en començar a aprendre astronomia i mecànica celeste i tingui un nivell d'estudis de Batxillerat, si és que algun dia arriba a les mans d'una persona amb aquests interessos.

També he après a com portar un treball de recerca, pel que fa a les tasques següents: la redacció del que saps, redactant-ho per a algú que no saps si sabrà el mateix que saps tu ara (i abans no sabies); la presentació i organització de l'obra; agafar l'hàbit de posar-se a escriure estant atent amb el que fas, i aprofitar al màxim el temps; saber deixar-se ensenyar per un llibre; la revisió del text per buscar errors, o matisar algun aspecte; i a fer funcionar els llenguatges de programació *Mathematica* i *Python*, útils i àgils, tot i que no fem una carrera de ciències.

Amb la comprensió dels moviments dels planetes del nostre sistema Solar i de tots els cossos celestes que ens envolten, podem percebre l'elegància d'aquests. I si a mi no m'haguessin captivats aquests, crec que no hagués tingut la paciència suficient com per acabar el treball. De totes maneres, l'he acabat però no està perfecte, i si algú troba algun error, se li prega que li comuniqui a l'autor.

Bibliografia

[1] FEYNMAN, R. P. *El carácter de la ley física*. Barcelona: Tusquets, 2000. 198 p. ISBN: 9788483107188.

[2] HOYLE, F. *De Stonehenge a la cosmología contemporánea / Nicolas Copérnico: un ensayo sobre su vida y su obra*. Madrid: Alianza Editorial, 1976. 118-196 p. ISBN: 84-206-1630-3.

[3] GIRBAU, J. *Curs d'Astronomia*. [vídeo]. [Bellaterra]: Universitat Autònoma de Barcelona, 2009, [Consulta: 1/11/2010]. <http://www.mat.uab.es/seccio/FINESTRA/joan_girbau_curs_dastronomi.html>.

[4] GISBERT BRIANSÓ, M., et al. *Física COU*. Madrid: Bruño, 1996. 61-131 p. ISBN: 84-216-2837-2.

[5] KALIPEDIA *Caminando sobre la Luna* [en línia]. [Consulta: 1/4/2010]. <http://www.kalipedia.com/ciencias-tierra-universo/>.

[6] KELSO, T. S. *NORAD Two-Line Element Sets Current Data: GPS Operational* [en línia]. [Consulta: 1/4/2010]. <http://celestrak.com/NORAD/elements/gps-ops.txt>.

[7] NEWTON, I. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. California: University of California Press, 1999. 403-430 p. ISBN: 978-0-520-08817-7.

[8] NICOLAU I POUS, F. *L'astronomia en la seva història*. Barcelona: Claret, DL 2005. 5-118 p. ISBN: 84-8297-867-5.

[9] TARRÍO, J. *Gravitación newtoniana* [en línia]. [S.l.]: [s.n.], 2004, [Consulta: 1/8/2010]. <http://www.lawebdefisica.com/apuntsfis/gravi/>.

[10] UNIVERSITY OF NEBRASKA-LINCOLN. *The Nebraska Astronomy Applet Project: Online Labs for Introductory Level Astronomy*. [Lincoln, Nebraska EEUU]: University of Nebraska-Lincoln, 2008?, [Consulta: 1/4/2010]. <http://astro.unl.edu/naap/>.

[11] WIKIPEDIA. *Apollo spacecraft* [en línia]. [Consulta: 1/10/2010]. <http://en.wikipedia.org/wiki/Apollo_spacecraft>.

[12] WIKIPEDIA. *Apollo 11* [en línia]. [Consulta: 1/10/2010]. <http://en.wikipedia.org/wiki/Apolo_11>.

[13] WIKIPEDIA. *Aristarc de Samos* [en línia]. [Consulta: 1/7/2010]. <http://ca.wikipedia.org/wiki/Aristarc_de_Samos>.

[14] WIKIPEDIA. *Astrometría* [en línia]. [Consulta: 1/4/2010]. <http://es.wikipedia.org/wiki/Categoría:Astrometría>.

[15] WIKIPEDIA. *Calendario* [en línia]. [Consulta: 1/7/2010]. <http://es.wikipedia.org/wiki/Categoría:Calendario>.

[16] WIKIPEDIA. *Global Positioning System* [en línia]. [Consulta: 1/7/2010]. <http://en.wikipedia.org/wiki/GPS>.