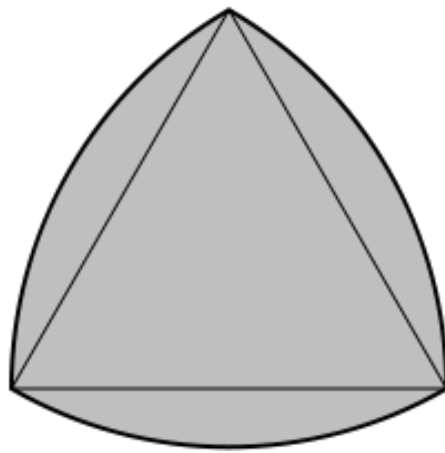


De monedas y alcantarillas: el triángulo de Reuleaux y sus propiedades



Autor: Galileo

Contenido

Introducción	3
1. Definición de figuras planas de anchura constante	4
2. El círculo	7
3. Franz Reuleaux	7
4. El triángulo de Reuleaux.....	8
4.1. Construcción de un triángulo de Reuleaux	9
4.2. Anchura del triángulo de Reuleaux.....	9
4.3. Longitud (o perímetro) del triángulo de Reuleaux.....	10
4.4. Área del triángulo de Reuleaux	11
5. Ampliación del triángulo de Reuleaux, “esquinas redondeadas”	12
5.1. Construcción de un triángulo de Reuleaux ampliado	12
5.2. Anchura del triángulo de Reuleaux ampliado	13
5.3. Perímetro del triángulo de Reuleaux ampliado	13
5.4. Área del triángulo de Reuleaux ampliado	14
5.5. Característica de la anchura constante	15
6. Cuestiones relacionadas con el triángulo de Reuleaux.....	16
6.1. ¿Qué ángulo forman las semitangentes de un vértice del triángulo de Reuleaux? ...	16
6.1.1. Geometría sintética	16
6.1.2. Geometría analítica	18
6.1.3. Comparación de los dos métodos empleados	22
6.2. ¿Qué tipo de curva es la descrita por el centroide de un triángulo de Reuleaux de anchura L que gira una vuelta completa en el interior de un cuadrado de lado L?	23
6.3. ¿Cómo generaría infinitas clases diferentes de curvas de anchura constante?	27
6.4. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo de revolución creado a partir del giro producido por un triángulo de Reuleaux sobre un eje?	29
6.5. Ecuación de la figura producida por el giro del triángulo de Reuleaux	32
6.6. Área producida por el giro del triángulo de Reuleaux	35
7. Utilidades y aplicaciones	37
7.1. Triángulo de Reuleaux.....	37
7.1.1. Arquitectura	38
7.1.2. Mapa del mundo tipo octante	44
7.1.3. Taladros	44
7.1.4. Motores	45
7.1.5. Lápices	46

7.1.6.	Smint	47
7.1.7.	Vaso del Fórum de Barcelona.....	47
7.1.8.	Modelos de colores	48
7.1.9.	Lancia.....	49
7.1.10.	Púas de guitarra	50
7.1.11.	Montaña de Marte	50
7.1.12.	Relojes	51
7.2.	Otros polígonos	52
7.2.1.	Monedas.....	52
7.2.2.	Bicicleta	54
7.3.	Tapas de alcantarilla.....	55
8.	Conclusión	55
	Bibliografía	57
	Páginas web consultadas	57

Introducción

Leyendo un artículo sobre la ciudad de San Francisco me llamó la atención una fotografía en la que aparecían unas tapas de alcantarillas un tanto peculiares. No eran circulares, como las que normalmente veía por la calle, y tenían una forma similar a un triángulo, sin serlo, ya que sus bordes eran arqueados. ¿Por qué utilizar una figura tan “extravagante” para tapar un simple agujero en el suelo? ¿Por qué no usar tapas de formas más simples, como las de un triángulo *vulgaris*, un cuadrado o cualquier polígono regular, figuras apenas presentes en nuestro alcantarillado, como he podido observar? Estas y otras cuestiones despertaron mi curiosidad, hasta el punto de orientar mi trabajo de investigación hacia su respuesta.

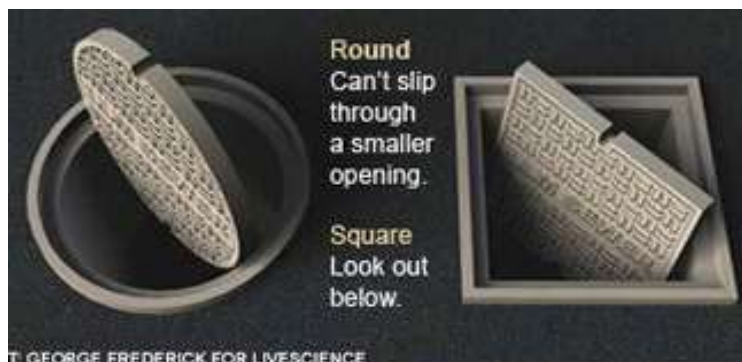
Una vez aceptada mi propuesta por el departamento de Matemáticas del instituto, me he marcado las líneas maestras de mi trabajo. Además de responder a las preguntas anteriormente formuladas, me propongo profundizar en la figura que fundamenta mi interés en responderlas. El primer paso ya está dado, una vez conocidos su nombre y apellidos, triángulo de Reuleaux. Conocer sus propiedades matemáticas más relevantes, intentar demostrarlas, si fuera posible; rastrear, aunque sea someramente, su historia y saber, por ejemplo, quién es Reuleaux; ver si hay otras figuras con propiedades similares a las suyas; y, por último, saber si su aplicación se limita al alcantarillado sanfranciscano o tiene una mayor proyección cotidiana. Observando que una pastilla Smint tiene una forma parecida a mi objeto de estudio, presiento que su expansión tiene un carácter cuasi-bacteriano. ¿Su uso urbano o su utilización en unas simples pastillas son simple casualidad, o ciertas propiedades la hacen especialmente atractiva? ¿Atracción estética o funcional?

Para resolver las cuestiones anteriormente planteadas tengo intención de utilizar todas las herramientas disponibles, comenzando por una visita al MMACA de Cornellá para inspirarme sobre la figura en cuestión. Acostumbrarme al análisis de artículos de divulgación en revistas y libros, tanto técnicos como de texto, es uno de mis objetivos metodológicos. También quisiera ver de qué manera utilizar la tecnología para analizar figuras, confirmar y conjeturar resultados.

Para finalizar esta introducción, quisiera agradecer a las diversas empresas que contestaron a mis correos su atención y tiempo. También al profesor Pep Bujosa por su disponibilidad, pese a ser yo un desconocido para él, y por las referencias que me proporcionó.

Triángulo de Reuleaux

Las tapas de las alcantarillas son circulares porque, de no ser así, podrían caer dentro de la misma alcantarilla. Por ejemplo, si se tiene una tapa cuadrada esta podría caer dentro del agujero solo con girarla. Esto no pasa con las tapas circulares. ¿Existe alguna otra figura que pueda cumplir este objetivo? Para que no caiga dentro de la alcantarilla la tapa debe tener lo que se denomina anchura constante.



1. Definición de figuras planas de anchura constante

Una figura plana tiene anchura constante cuando cumple la siguiente propiedad: si situamos dos rectas paralelas con un único punto de tangencia cada una con la figura, medimos la distancia entre estas, las situamos en otros dos puntos de tangencia (de nuevo las dos deben ser paralelas entre sí) y volvemos a medir su distancia, el resultado obtenido ha de ser el mismo que en la primera medida (en el caso de tener el mismo resultado y que con una tercera medida no se conserve la distancia inicial, la figura no tendría anchura constante).

Por ejemplo en un triángulo equilátero podemos comprobar que desde distintos puntos su “anchura” no es igual. Por ejemplo, no es igual la distancia entre dos vértices del triángulo que la distancia entre un vértice y el punto medio entre dos vértices, es decir, la altura no es igual al lado de un mismo triángulo equilátero y por lo tanto esta figura no tiene anchura constante.

Matemáticamente podemos calcular la altura con el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}$$

Donde: l= lado del triángulo y h= a la altura.

Vemos que claramente obtenemos valores distintos para la altura y para el lado.

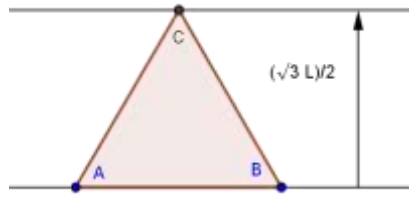


Fig. 1

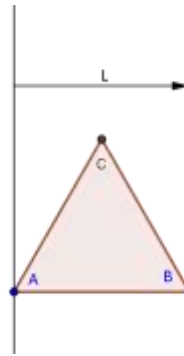


Fig. 2

El triángulo isósceles tampoco tiene anchura constante porque no es la misma longitud la de los lados iguales que la longitud del lado distinto.

Matemáticamente podemos calcular la altura respecto a la base dividiendo el triángulo en dos partes iguales y utilizando el teorema de Pitágoras considerando la altura y la mitad de la base (lado pequeño del triángulo) como catetos y uno de los lados iguales como hipotenusa:

$$a^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}}$$

Donde: l= lado pequeño o base del triángulo, a= uno de los lados iguales y h= altura.

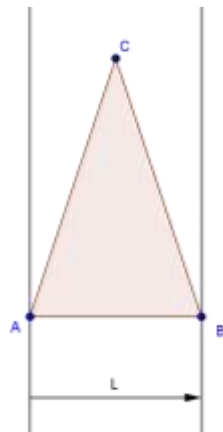


Fig. 3

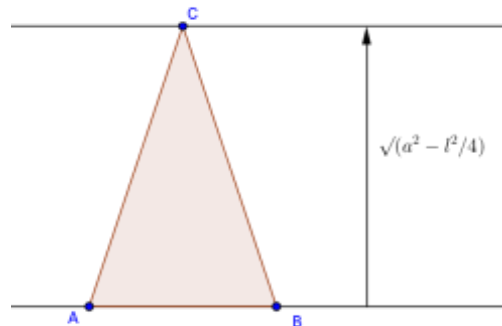


Fig. 4

Esta regla tampoco la cumple el cuadrado, cuya distancia entre dos vértices contiguos no es igual a la longitud de la diagonal (segmento que une dos vértices no contiguos).

La diagonal se puede calcular con el teorema de Pitágoras considerando un triángulo equilátero formado por dos lados del cuadrado como catetos y la diagonal como hipotenusa.

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

Donde: l= lado del cuadrado y d= diagonal.

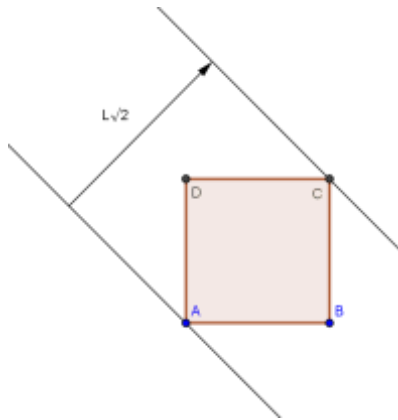


Fig. 5

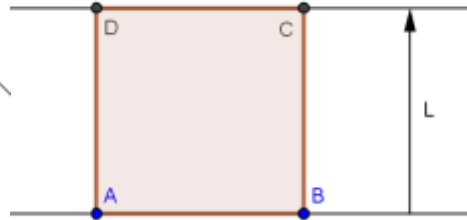


Fig. 6

Ninguno de los polígonos regulares tiene una anchura constante. Por ejemplo, en el hexágono regular, la distancia entre dos vértices, opuestos en la figura, no es igual a la distancia entre dos lados opuestos (el doble de la apotema).

Considerando que el hexágono está formado por seis triángulos equiláteros podemos calcular la apotema de la misma manera que calcularíamos la altura en este tipo de triángulos:

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2} = \text{apotema} \rightarrow 2h = \sqrt{3} \cdot l$$

Donde l=distancia entre un vértice del hexágono y el centro y h= la altura del triángulo o la apotema del hexágono.

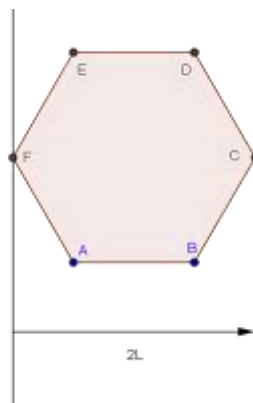


Fig. 7

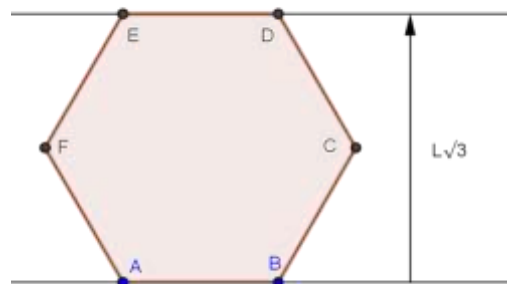


Fig. 8

Por lo tanto ni los polígonos regulares ni los irregulares pueden utilizarse como tapa de alcantarillado sin que caiga por el agujero porque ninguno tiene anchura constante.

La figura plana más conocida que cumple esta característica es el círculo ya que independientemente de los puntos de tangencia que escojamos la distancia siempre será el diámetro.

2. El círculo

El círculo se define como el área determinada por una sucesión de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es constante (circunferencia).

En todo círculo se observa que la anchura es constante e igual al diámetro.

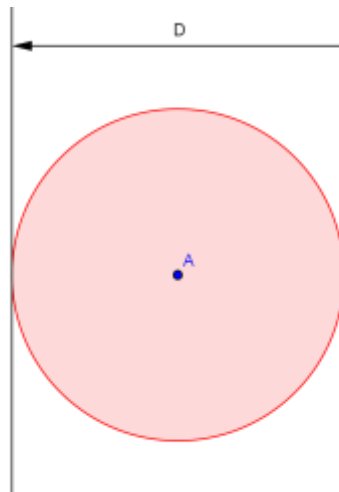


Fig. 9

La tapa circular es la más utilizada en el alcantarillado actualmente por esta característica, pero la pregunta es: ¿hay más figuras que tengan anchura constante a parte del círculo?

Los más conocidos son los polígonos de Reuleaux. El polígono que se trata en este trabajo es la figura plana más sencilla de anchura constante, diferente del círculo: el triángulo de Reuleaux.

3. Franz Reuleaux

Franz Reuleaux (1829-1905) fue un científico e ingeniero mecánico alemán, miembro y más tarde presidente de la *Berlin Royal Technical Academy*. Es considerado el padre de la cinemática.

Desde pequeño tuvo relación con la mecánica debido a que su padre y su abuelo eran constructores de maquinaria. Franz tuvo formación técnica en la universidad de Karlsruhe (una de las más antiguas y prestigiosas del país). Al terminar estudió en las universidades de Bonn y Berlín.

Años más tarde se convirtió en docente de la ETH (en alemán *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*; en español Instituto Federal de Tecnología) de Zúrich además de ser rector de *la Königs Technischen Hochschule Berlín – Charlottenburg*, un instituto técnico superior.

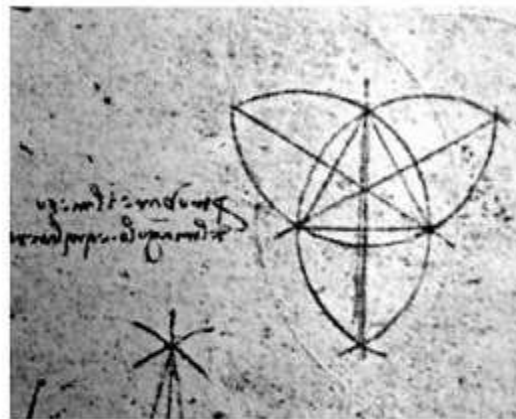


Fue designado jefe del jurado de la Sexta Feria Mundial de la Industria en Filadelfia en 1876 donde admitió que las manufacturas alemanas eran inferiores a las de otros países.

Supo combinar durante toda su vida su interés docente con sus ideas investigadoras para diseñar y describir máquinas. Su colección llegó a tener hasta 800 mecanismos que utilizó para enseñar nuevos avances técnicos entre los cuales se encuentran la manivela y el mecanismo de cuatro barras.

Actualmente es conocido por diseñar el triángulo que lleva su nombre como una forma de mecanismo en el cual puede girar sobre un soporte cuadrado. Lo diseñó con el objetivo de substituir al botón redondo así que creó una curva que pudiera cumplir la misma función, entrar por el ojal en cualquier posición sin salirse.

Aunque Frank diseñó el triángulo de Reuleaux, Leonardo da Vinci (1452-1519) antes que él lo dibujó en sus cuadernos mientras investigaba nuevas formas de fortificación, aunque no hay pruebas de que conociera la anchura constante y tampoco lo utilizó nunca como parte de algún mecanismo o invento.



4. El triángulo de Reuleaux

Al igual que con el problema de las tapas del alcantarillado, Franz Reuleaux buscaba una figura que compartiera las mismas características que el círculo con el objetivo de sustituirlo. A continuación vamos a construir el triángulo de Reuleaux, comprobar que tiene anchura constante y estudiar algunas de sus propiedades.

4.1. Construcción de un triángulo de Reuleaux

- 1.-Se dibuja un triángulo equilátero.
- 2.-Se trazan tres circunferencias. Cada una debe tener el centro en un vértice y el radio debe medir lo mismo que la longitud del lado del triángulo.
- 3.-Se borran las circunferencias dejando únicamente el arco más corto entre dos vértices del triángulo.

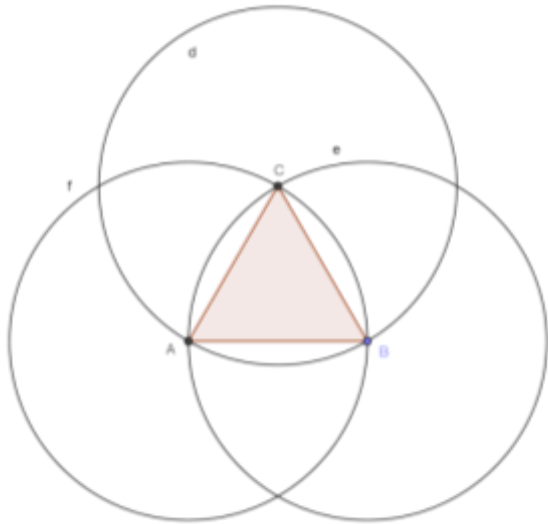


Fig. 10

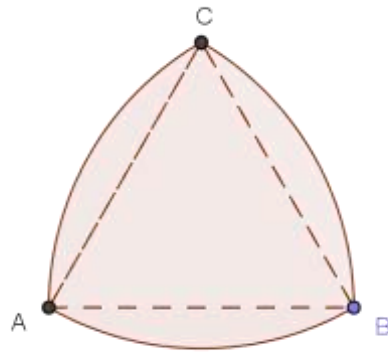


Fig. 11

El triángulo de Reuleaux está formado por un triángulo equilátero con tres arcos de circunferencia a cada lado cuyos centros son los vértices.

4.2. Anchura del triángulo de Reuleaux

Observando su dibujo (fig. 10 y fig. 11) podemos comprobar que tiene anchura constante debido a que, independientemente de los puntos de tangencia que escojamos, la distancia siempre será igual al lado del triángulo equilátero que forma la figura, ya que los arcos de circunferencia que forman los lados del triángulo de Reuleaux tienen de radio el lado del triángulo equilátero.

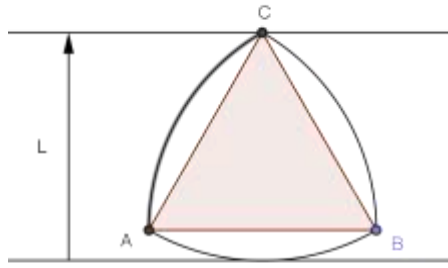


Fig. 10

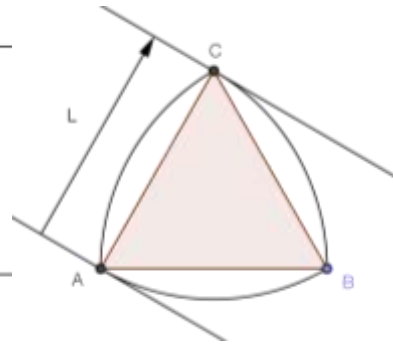


Fig. 11

4.3. Longitud (o perímetro) del triángulo de Reuleaux

La longitud de esta figura puede ser calculada mediante la fórmula del perímetro del círculo. Dividimos el perímetro de la figura en tres partes iguales, cada una formada por los tres arcos de la circunferencia (Fig. 12).

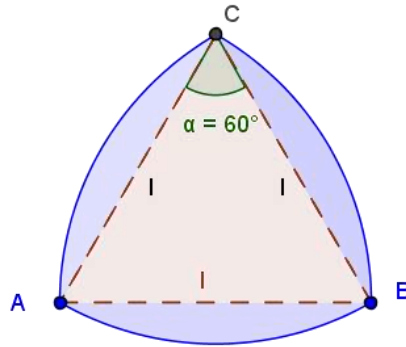


Fig. 12

Sabiendo que el radio que forma cada arco es el mismo que el lado del triángulo (l) y que al ser un triángulo equilátero sabemos que tiene tres ángulos iguales de 60° , podemos afirmar que:

$$\text{lado del triángulo de Reuleaux} = \frac{2\pi l}{6} = \frac{\pi l}{3}$$

Debido a que: $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

$$\text{Perímetro} = 3 \text{ lados} = \frac{\pi l}{3} \cdot 3 = \pi l$$

Donde $l = \text{lado del triángulo equilátero} = \text{radio del arco de circunferencia}$

4.4. Área del triángulo de Reuleaux

Para calcular el área del triángulo de Reuleaux lo dividiremos de nuevo pero esta vez en cuatro partes: el triángulo equilátero y el área entre los tres arcos y cada lado del triángulo (segmentos circulares) (fig. 13).

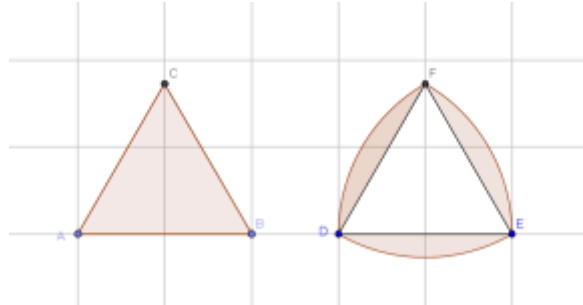


Fig. 13

Unimos el triángulo equilátero con uno de los segmentos circulares y observamos que forman un sector circular de ángulo 60° y de lado igual que el triángulo, por lo tanto:

$$\text{Triángulo equilátero} + \text{segmento circular}_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{6}$$

Donde: r = radio de cada arco, que también es igual al lado del triángulo: $l=r$

Para saber el área de los otros dos segmentos circulares debemos restar el área del triángulo a esta última operación porque los tres segmentos circulares son iguales, por lo que:

$$\frac{\pi \cdot r^2}{6} - \text{área del triángulo equilátero} = \text{segmento circular}$$

Para calcular el área del triángulo necesitamos la altura que podemos deducir mediante trigonometría:

$$\text{Tan } 60^\circ = \frac{h}{r/2} = \frac{2h}{r}$$

$$2h = \text{tan } 60^\circ \cdot r \rightarrow h = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{2}$$

Donde: h = altura

Por lo tanto retomando la fórmula del área del segmento circular:

$$\text{segmento circular} = \frac{\pi \cdot r^2}{6} - \frac{r \cdot h}{2}$$

Con esto finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Área total} &= 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{6} - \frac{r \cdot h}{2} \right) + \frac{\pi \cdot r^2}{6} = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{6} - \frac{r \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot r}{2}}{2} \right) + \frac{\pi \cdot r^2}{6} \\
 &= \frac{2\pi r^2}{6} - \frac{2\sqrt{3} \cdot r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3\pi r^2 - 3\sqrt{3} \cdot r^2}{6} = \frac{3r^2(\pi - \sqrt{3})}{6} \\
 &= \frac{r^2}{2} (\pi - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

5. Ampliación del triángulo de Reuleaux, “esquinas redondeadas”

El principal problema con el triángulo de Reuleaux son sus esquinas, debido a que al hacerlo rodar, sus esquinas podrían hacerlo “saltar”. Para solucionar este problema se ha diseñado un triángulo de Reuleaux ampliado, consiguiendo de esta manera que las esquinas sean más “redondeadas” reduciendo el problema que se producía antes con el giro.

5.1. Construcción de un triángulo de Reuleaux ampliado

- 1.-Se dibuja un triángulo de Reuleaux.
- 2.-Se alarga cada extremo de los lados del triángulo una longitud cualquiera mientras que en todos sea la misma.
- 3.- Se trazan tres arcos de circunferencia de 60° (el mismo ángulo que el del triángulo equilátero, uniendo los extremos que hemos ampliado), cada uno con centro en cada vértice y de radio el lado del triángulo más la unidad que hemos añadido.
- 4.-Se trazan tres arcos de circunferencia de 60° , con centro en cada vértice pero de radio igual a la unidad que hemos añadido.

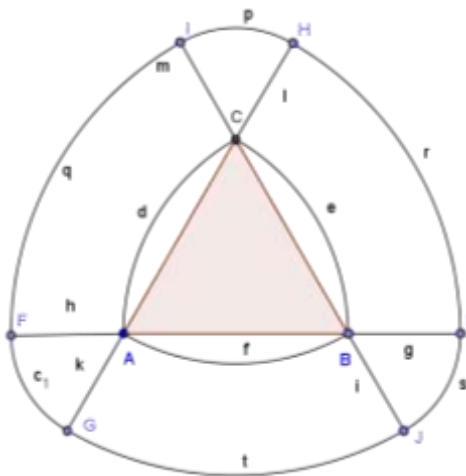


Fig. 14

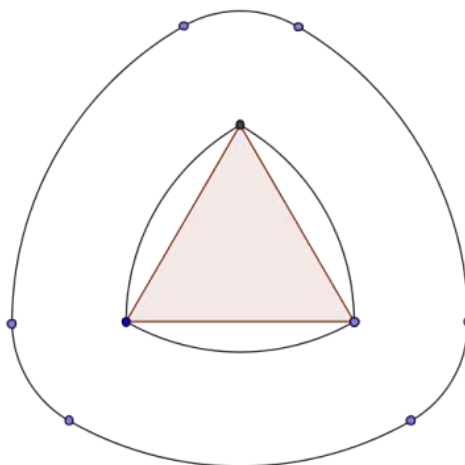


Fig. 15

5.2. Anchura del triángulo de Reuleaux ampliado

La anchura es igual al lado del triángulo más lo que se haya añadido en la ampliación de la figura inicial y cumple la propiedad de tener anchura constante como el triángulo de Reuleaux.

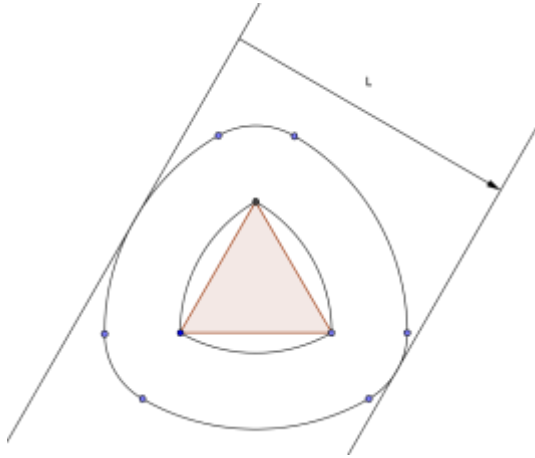


Fig. 16

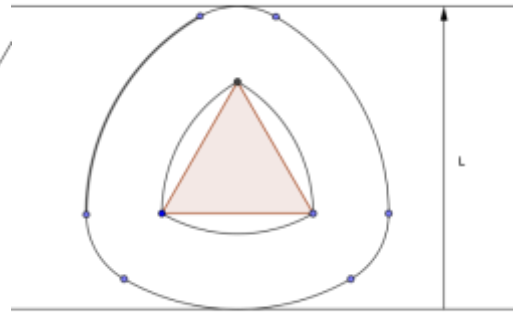


Fig. 17

Si observamos las figuras 16 y 17 comprobamos que esta figura también tiene anchura constante y podemos afirmar que es igual al lado del triángulo equilátero más dos veces la longitud que hemos ampliado la figura inicial:

$$L = l + 2a$$

Donde: l = lado del triángulo de Reuleaux y a = longitud que hemos ampliado dicha figura.

5.3. Perímetro del triángulo de Reuleaux ampliado

Para calcular el perímetro de esta figura calcularemos por separado la longitud de los tres arcos más grandes y la de los tres arcos más pequeños (estos dos tipos se pueden ver distinguidos con claridad en el apartado sobre el dibujo de la figura) (fig.18).

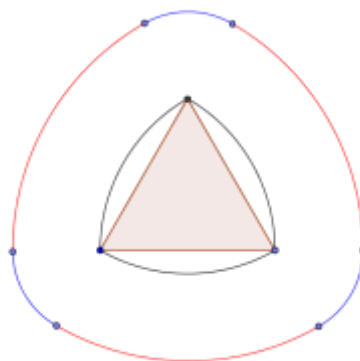


Fig. 18

Primero los tres arcos mayores son solo una versión ampliada de los lados del triángulo de Reuleaux por lo que debemos tener en cuenta dicha ampliación y añadirla al radio que antes era igual al lado del triángulo equilátero:

$$\text{Arco mayor} = \frac{2\pi(l + a)}{6} = \frac{\pi(l + a)}{3}$$

Donde a=ampliación del lado del triángulo equilátero que forma el triángulo de Reuleaux y l= lado del triángulo equilátero original.

Para el arco menor utilizamos la misma fórmula ya que sigue siendo un ángulo de 60° pero debemos tener en cuenta que el radio en este caso es la ampliación anteriormente mencionada:

$$\text{Arco menor} = \frac{2\pi \cdot a}{6} = \frac{\pi a}{3}$$

Por lo que sumando todas las partes:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro total} &= 3 \text{ arcos mayores} + 3 \text{ arcos menores} = 3 \cdot \left(\frac{\pi(l + a)}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\pi a}{3}\right) \\ &= \pi(l + a) + \pi a = \pi l + 2\pi a = \pi(l + 2a) \end{aligned}$$

5.4. Área del triángulo de Reuleaux ampliado

Para calcular el área dividiremos la figura en tres partes: el triángulo de Reuleaux, tres trapecios circulares (limitados por los tres arcos mayores) y tres sectores circulares (limitados por los tres arcos menores) (fig. 19).

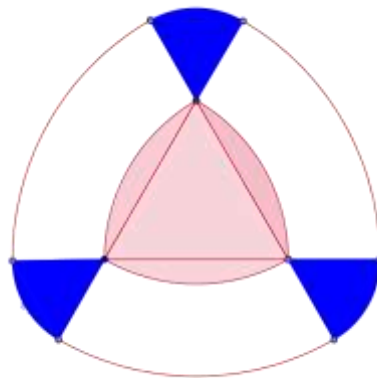


Fig. 19

Los tres sectores circulares están formados por ángulos de 60° y el radio es igual a la ampliación del triángulo, por lo que:

$$\text{Sector circular} = \frac{\pi a^2}{6}$$

Para calcular los tres trapezios circulares necesitamos calcular un sector circular de radio igual al lado del triángulo más la ampliación y restarle otro sector circular de radio igual al lado del triángulo:

$$\begin{aligned} \text{Trapezio circular} &= \frac{\pi(l+a)^2}{6} - \frac{\pi l^2}{6} = \frac{\pi(l^2 + 2la + a^2) - \pi l^2}{6} = \frac{\pi l^2 + 2\pi la + \pi a^2 - \pi l^2}{6} \\ &= \frac{2\pi la + \pi a^2}{6} = \frac{\pi(2la + a^2)}{6} \end{aligned}$$

Sumando todas las áreas:

$$\begin{aligned} &3 \cdot (\text{Sector circular}) + 3 \cdot (\text{Trapezio circular}) + \text{triángulo de Reuleaux} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{\pi a^2}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\pi(2la + a^2)}{6}\right) + \frac{l^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi(2la + a^2)}{2} + \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} = \frac{\pi a^2 + \pi 2la + \pi a^2 + \pi l^2 - l^2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\pi a^2 + l(\pi 2a + \pi l - l\sqrt{3})}{2} = \pi a^2 + \frac{l}{2}(\pi 2a + \pi l - l\sqrt{3}) \end{aligned}$$

5.5. Característica de la anchura constante

Si recordamos la anchura calculada en el apartado sobre la anchura del triángulo de Reuleaux ampliado y la dividimos por el perímetro total obtenemos el número π .

$$\frac{\pi(l+2a)}{l+2a} = \pi$$

Si comparamos esto con el círculo obtenemos el mismo resultado (la anchura del círculo es igual a dos veces el radio por π , es decir el diámetro por π).

$$\frac{2r\pi}{2r} = \pi$$

Esto mismo ocurre con el triángulo de Reuleaux, en el cual el perímetro es el número π por la anchura:

$$\frac{\pi l}{l} = \pi$$

Con esto podemos deducir que, en las curvas de anchura constante que hemos estudiado hasta el momento, si dividimos el perímetro por la anchura obtenemos el número π .

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Anchura}} = \pi$$

6. Cuestiones relacionadas con el triángulo de Reuleaux

En este apartado resolveremos una serie de cuestiones matemáticas relacionadas con el triángulo de Reuleaux que ayudan a entender un poco más esta curva de anchura constante.

6.1. ¿Qué ángulo forman las semitangentes de un vértice del triángulo de Reuleaux?

Para entender el objetivo de esta pregunta debemos definir la semitangente: la semitangente es una semirrecta tangente a una figura, en este caso, tangente a la curva del lado del triángulo de Reuleaux y con referencia al punto C (inicio o fin de la semirrecta) (fig. 20).

Para resolver este problema debemos calcular el ángulo que se sitúa entre dos rectas que pasan por un mismo vértice y que son tangentes al triángulo de Reuleaux.

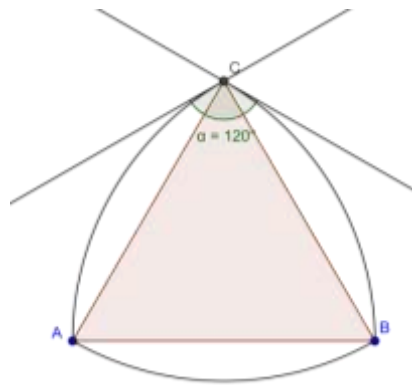


Fig. 20

Utilizando el programa GeoGebra especializado en geometría dinámica, podemos reproducir el ángulo que nos pide el enunciado y observamos que es un ángulo claramente mayor que el del triángulo y menor que 180° .

Este programa también nos muestra que el valor exacto del ángulo que queremos calcular, es de 120° , como demostraremos a continuación.

Este problema lo resolveremos de dos maneras distintas, con la geometría sintética, utilizada por los antiguos griegos, y con la geometría analítica, con el objetivo de llegar a una misma conclusión con dos métodos distintos y analizar las características de ambos.

6.1.1. Geometría sintética

La geometría sintética se basa principalmente en observaciones de la figura para formular una respuesta, aunque también sean necesarios cálculos. Normalmente no son excesivamente largos y siempre son relativamente más fáciles que en la geometría analítica.

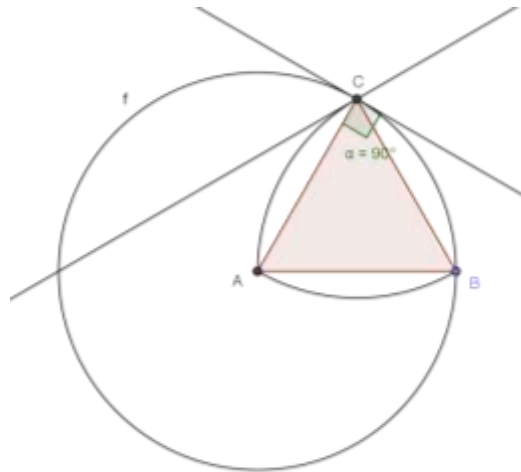


Fig. 21

El punto C de la figura 21 es un punto de tangencia de un triángulo de Reuleaux con la semitangente. Por geometría básica sabemos que, en ese punto, el ángulo formado por el radio del arco de circunferencia que constituye el lado del triángulo de Reuleaux y una tangente a dicha circunferencia es de 90° .

Sabemos que, al ser un triángulo equilátero, los tres ángulos de la figura tienen el mismo valor, 60° , por lo que restándole a 90° obtenemos que los ángulos entre las semitangentes y el triángulo son de 30° cada uno.

Con todo esto deducimos que:

$$2 \cdot 30^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Así que 120° es el ángulo que separa las dos semitangentes del triángulo de Reuleaux.

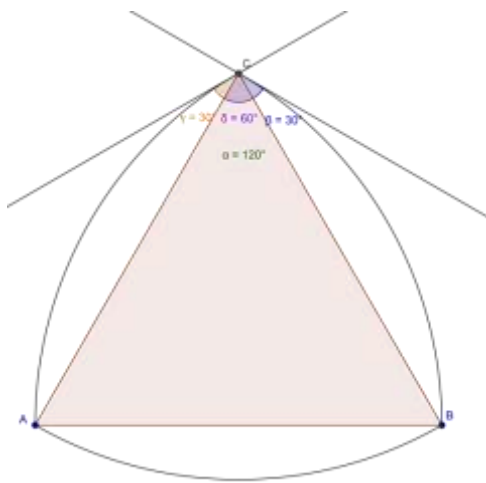


Fig. 22

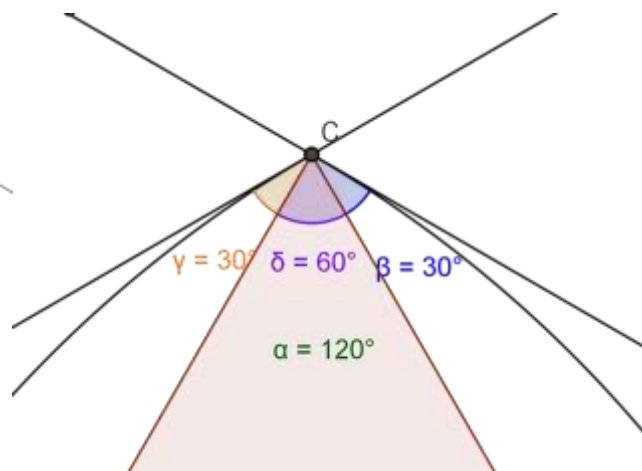


Fig. 23

En la figura 23 se observa en detalle los tres ángulos diferentes que componen el ángulo entre las dos semitangentes.

6.1.2. Geometría analítica

Existen diferentes maneras de resolver este problema de forma analítica. Aquí se utilizarán dos métodos diferentes.

6.1.2.1. Primer método

La geometría analítica se basa mucho más en los cálculos y normalmente se sitúa la figura en un eje de coordenadas para realizarlos.

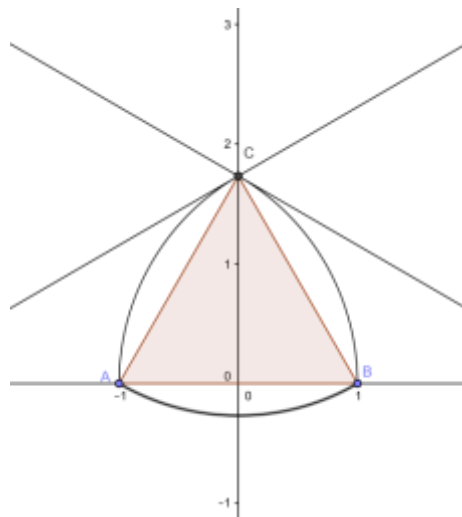


Fig. 24

Para calcular el ángulo entre dos rectas utilizaremos el producto escalar. Para esto necesitamos dos vectores, uno para cada recta.

Como solo conocemos un punto de ambas rectas utilizaremos su perpendicularidad con los lados del triángulo para calcular las ecuaciones de las semitangentes (como se explica en el apartado anterior, la perpendicularidad de los lados del triángulo es demostrable a partir de la circunferencia que forma el arco del lado del triángulo de Reuleaux).

(La fig. 24 es un ejemplo de situación en un eje de coordenadas de un triángulo de Reuleaux de anchura 2 unidades en el cual los vértices son los puntos A (-1,0), B (1,0) y C (0,h)).

Primero necesitamos la posición del punto C en función del lado del triángulo equilátero que se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Donde l= lado del triángulo y h= altura

Ahora calculamos un vector director del lado del triángulo equilátero considerando los puntos:

$$A(-1,0) = A\left(\frac{-l}{2}, 0\right) \text{ y } C\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{v} = \left(0 - \left(\frac{-l}{2}\right), \frac{l\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por lo que la pendiente:

$$m_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

Sabiendo que el producto de dos pendientes perpendiculares es -1 podemos calcular la pendiente de la recta r:

$$m_v \cdot m_r = -1 \rightarrow m_r = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Y por último, sabiendo la pendiente de la recta r podemos conseguir el vector director de dicha recta:

$$m_r = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \vec{r} = (\sqrt{3}, -1)$$

Repetimos el mismo proceso para calcular un vector director de la otra recta a la que llamaremos s:

$$B(1,0) = B\left(\frac{l}{2}, 0\right) \text{ y } C\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{w} = \left(0 - \left(\frac{l}{2}\right), \frac{l\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \left(\frac{-l}{2}, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_w = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{-l}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$m_w \cdot m_s = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$$

$$m_s = \frac{w_2}{w_1} \rightarrow \vec{s} = (-\sqrt{3}, -1)$$

Ahora con los dos vectores podemos saber el ángulo que los separa mediante el producto escalar:

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + (-1) \cdot (-1) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \cos \alpha$$

$$-2 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{2} \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \alpha = 120^\circ$$

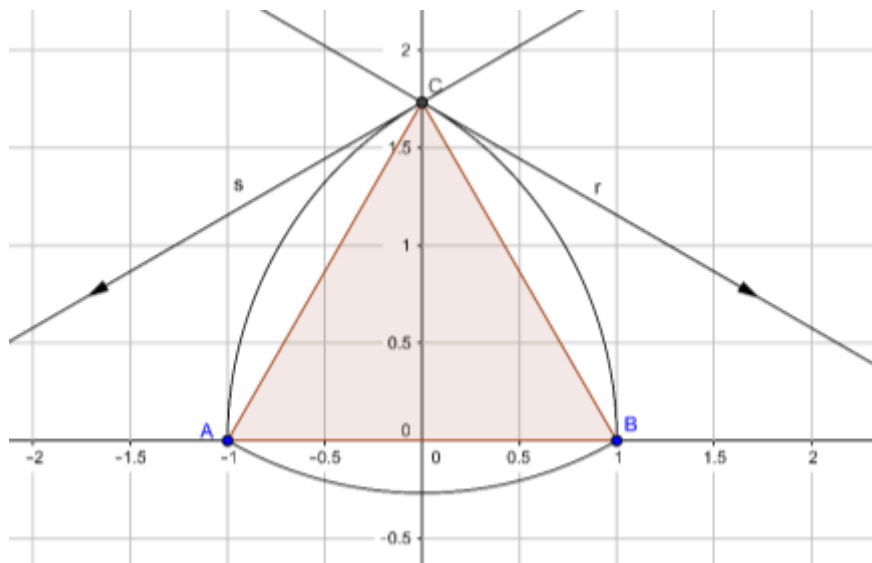


Fig. 25

Concluimos que el ángulo que separa las dos semitangentes es de 120° .

6.1.2.2. Segundo método

Derivar la ecuación de las curvas en el punto C para obtener la pendiente de cada una y posteriormente averiguar el ángulo. Para simplificar los cálculos utilizaré un triángulo de Reuleaux en el que el triángulo equilátero de partida tenga lado de longitud dos. Por razones de semejanza esto no supone ninguna pérdida de generalidad.

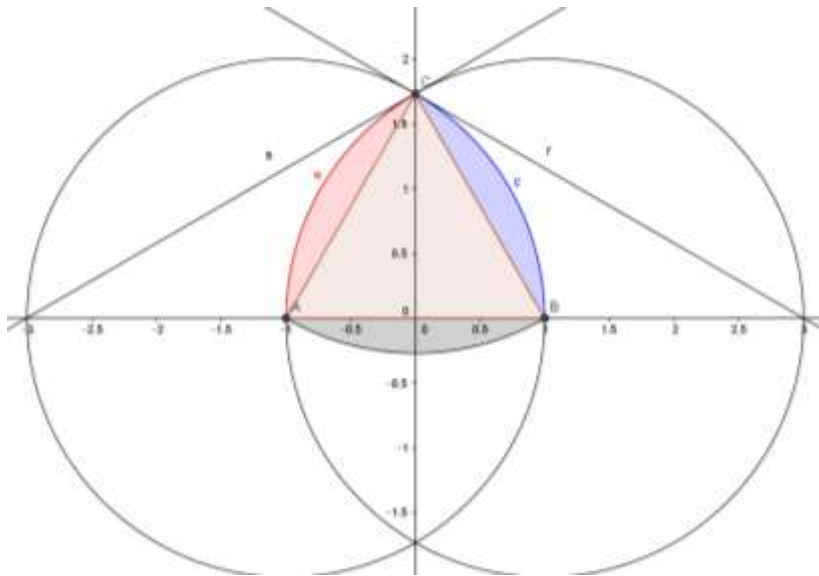


Fig. 26

Si recordamos el apartado del dibujo del triángulo de Reuleaux, nos damos cuenta de que los lados curvos son arcos de circunferencia y por lo tanto se puede calcular su ecuación sabiendo cuál de los vértices es su centro y cuánto mide el lado del triángulo, ya que es igual al radio (fig.26). Por lo tanto definimos los arcos de circunferencia como circunferencias completas con la ecuación:

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$$

Donde el punto P (x_0, y_0) es el centro de la circunferencia y r es el radio

Calculamos la ecuación del arco de circunferencia de centro en el punto B $(1,0)$, y radio igual al lado del triángulo, en este caso 2.

$$(y - 0)^2 + (x - 1)^2 = 2^2 \rightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow y^2 = 3 - x^2 + 2x$$

$$y = \sqrt{3 - x^2 + 2x}$$

Para saber la pendiente necesitamos la derivada de esta ecuación.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3 - x^2 + 2x}} \cdot (-2x + 2)$$

Queremos saber la pendiente en el punto C $(0, f(0))$, así que sustituimos.

$$y' = f'(x) \rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3 - 0^2 + 2(0)}} \cdot (-2(0) + 2) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = m_s$$

Donde m_s es la pendiente de la recta s.

Ahora utilizamos el mismo procedimiento con la recta r:

$$(y - 0)^2 + (x + 1)^2 = 2^2 \rightarrow y^2 + x^2 + 2x + 1 = 4 \rightarrow y^2 = 3 - x^2 - 2x$$

$$y = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3 - x^2 - 2x}} \cdot (-2x - 2)$$

$$y' = g'(x) \rightarrow g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3 - 0^2 - 2(0)}} \cdot (-2(0) - 2) = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = m_r$$

Donde m_r es la pendiente de la recta r.

Calculamos el ángulo entre las dos rectas de la misma manera que en el apartado anterior, a partir de las pendientes obtenidas calculamos los vectores directores de cada recta y después con el producto escalar obtenemos el ángulo:

$$m_s = \frac{w_2}{w_1} \rightarrow \vec{s} = (\sqrt{3}, 1)$$

Pero igual que en el apartado anterior necesitamos el vector que se dirige en dirección contraria al obtenido. Con este calcularíamos un ángulo diferente al que queremos encontrar. Para cambiar el sentido a un vector, se cambia el signo a sus dos componentes.

$$\vec{s} = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$m_r = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \vec{r} = (\sqrt{3}, -1)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + (-1) \cdot (-1) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \cos \alpha$$

$$-2 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{2} \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \alpha = 120^\circ$$

Como en el apartado anterior obtenemos que el ángulo que separa ambas rectas es de 120° .

6.1.3. Comparación de los dos métodos empleados

Con ambos métodos llegamos a la misma conclusión, pero ¿qué método es mejor?, ¿cuál es el más rápido? Y, sobre todo, ¿cuál es el más fácil?

El método sintético es más rápido ya que no se utilizan muchas operaciones para llegar al resultado. A diferencia del analítico, el sintético permite conseguir el resultado final únicamente con la observación. La dificultad es que no todos los problemas se pueden resolver a simple vista.

El método analítico es más lento y se utilizan muchos cálculos por lo que es fácil equivocarse comparado con el sintético, pero funciona con muchos más enunciados y,

aunque también tiene una parte de observación, se basa en seguir unos pasos que nos llevan a la solución final. No depende básicamente de mirar el problema sino que también influye nuestra capacidad de cálculo.

En conclusión, como el método sintético es más rápido, debería usarse para empezar cualquier problema. En el caso de que con el primer método no se consiga hallar una solución rápidamente, podría utilizarse el segundo método y calcularla mediante operaciones matemáticas.

6.2. ¿Qué tipo de curva es la descrita por el centroide de un triángulo de Reuleaux de anchura L que gira una vuelta completa en el interior de un cuadrado de lado L ?

Para resolver este enunciado debemos saber qué es el centroide de un triángulo.

El centroide (o baricentro) de un triángulo es el punto en el cual coinciden los segmentos que van desde los vértices hasta los puntos medios de los lados opuestos del triángulo (medianas). En física se consideraría que es el punto en el cual coincide el centro de masa y el centro de gravedad, pero con la primera definición es suficiente para resolver el problema.

Si situamos un triángulo de Reuleaux y lo hacemos rodar dentro de un cuadrado de lado igual a la anchura de la curva, el baricentro hace un recorrido dentro de este primero.

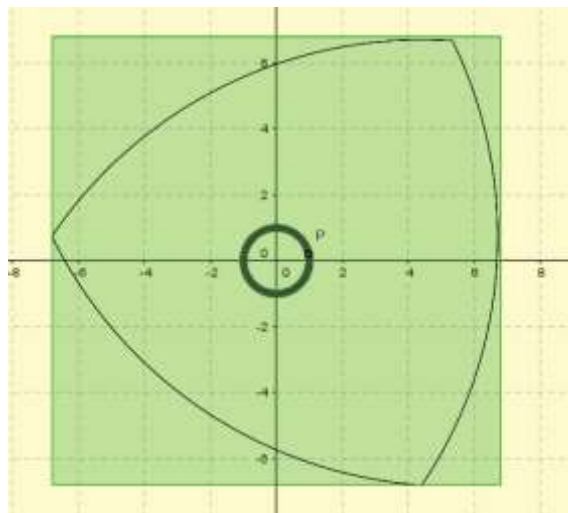


Fig. 29

A simple vista el baricentro parece describir un círculo perfecto (fig. 29). Para comprobar si esta afirmación es cierta o no, se calcularán las coordenadas del baricentro por cuadrantes y, finalmente, demostraremos que no tiene un radio constante y, por lo tanto, no es un círculo.

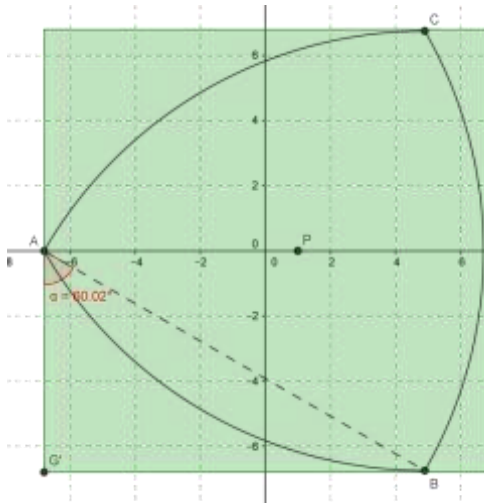


Fig. 30

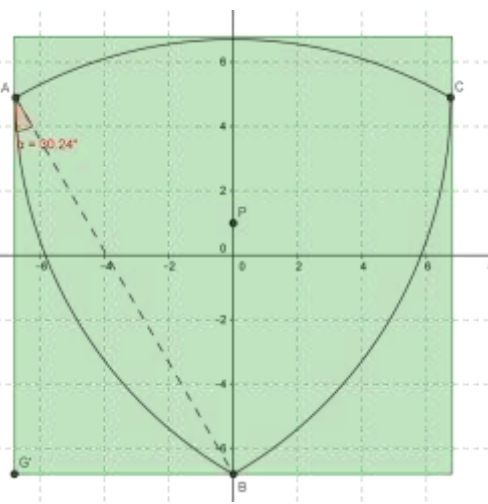


Fig. 31

Inscribimos un triángulo de Reuleaux de lado equilátero subyacente 1 unidad en un cuadrado de lados iguales a 1 unidad.

Primer cuadrante: X e Y en función de α , el punto P (centroide) pasa de (x,0) a (0,y) o viceversa.

Si observamos las figuras 30 y 31, nos damos cuenta que siempre que el punto P se encuentra en el primer cuadrante, α es mayor de 30° y menor de 60° .

Para empezar, debemos calcular la distancia del punto A al punto P (baricentro). Lo haremos aprovechando una propiedad conocida de geometría básica que afirma que el centroide de un triángulo equilátero (como el que forma el triángulo de Reuleaux) es $2/3$ de la altura.

$$AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} l$$

Considerando que el lado del triángulo y el lado del cuadrado son una unidad, calculamos x respecto del ángulo α , sabiendo que la mitad del ángulo del triángulo equilátero es 30° y que la mitad del cuadrado es $\frac{1}{2}$:

Observando la figura 32 nos damos cuenta de que podemos aislar c respecto de α utilizando un triángulo rectángulo formado por c más el lado del cuadrado, el lado inferior del cuadrado hasta el punto B y uno de los lados del triángulo equilátero que forma el triángulo de Reuleaux:

$$\cos \alpha = \frac{c + \frac{1}{2}}{1} \rightarrow c = \cos \alpha - \frac{1}{2}$$

Despejando c en la ecuación de y respecto de α en el primer cuadrante:

$$\begin{aligned} y &= \cos \alpha - \frac{1}{2} - \cos(\alpha + 30) \frac{\sqrt{3}}{3} = -(\cos \alpha \cos 30 + \sin 30 \cos \alpha) \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{-\sqrt{3} \cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{3} + \cos \alpha - \frac{1}{2} = \frac{-3 \cos \alpha}{6} + \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{6} + \frac{6 \cos \alpha}{6} - \frac{3}{6} \\ &= \frac{3 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha - 3}{6} \end{aligned}$$

Segundo cuadrante: $-X$ e Y en función de α (por simetría “ y ” es igual y “ x ” cambia el signo)

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - 3}{6} \rightarrow -x = \frac{-3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + 3}{6} \\ y &= \frac{3 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha - 3}{6} \end{aligned}$$

Tercer cuadrante: $-X$ y $-Y$ en función de α .

$$\begin{aligned} -x &= \frac{-3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + 3}{6} \\ y &= \frac{3 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha - 3}{6} \rightarrow -y = \frac{3 - 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{6} \end{aligned}$$

Por último el cuarto cuadrante: X y $-Y$ en función de α .

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - 3}{6} \\ -y &= \frac{3 - 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{6} \end{aligned}$$

En todos los cuadrantes los valores del ángulo α varía entre 30° y 60° porque son coordenadas simétricas del primer cuadrante, el cual solo varía entre esos valores.

Para demostrar que esta figura no es un círculo, cogemos dos puntos al azar de cualquiera de los cuadrantes y calculamos sus distancias con el centro (el eje de

coordenadas). Si son iguales, la figura es un círculo y, si son diferentes entre sí, será otro tipo de curva:

Cogemos dos valores de α distintos en el primer cuadrante, por ejemplo 35° y 50° (como se ha explicado al principio deben ser valores entre 30 y 60).

$$x_1 = \frac{3 \sin(35) + \sqrt{3} \cos(35) - 3}{6} = 0,023$$

$$y_1 = \frac{3 \cos(35) + \sqrt{3} \sin(35) - 3}{6} = 0,075$$

Calculamos la distancia entre el punto P' ($0,023, 0,075$) y el centro de coordenadas ($0,0$). Utilizamos la ecuación que determina la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$d(P', O) = \sqrt{(0,023 - 0)^2 + (0,075 - 0)^2} = 0,078$$

Ahora aplicamos el mismo procedimiento con el ángulo de 50° .

$$x_2 = \frac{3 \sin(50) + \sqrt{3} \cos(50) - 3}{6} = 0,069$$

$$y_2 = \frac{3 \cos(50) + \sqrt{3} \sin(50) - 3}{6} = 0,042$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}$$

$$d(P'', O) = \sqrt{(0,069 - 0)^2 + (0,042 - 0)^2} = 0,081$$

La diferencia entre las dos distancias es de $0,003$, lo que demuestra que no tiene un radio constante; por lo tanto, no es un círculo.

6.3. ¿Cómo generaría infinitas clases diferentes de curvas de anchura constante?

Para resolver este problema observemos, la manera en la que lo hemos dibujado.

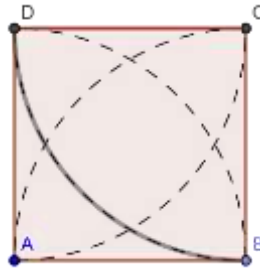


Fig. 33

Si nos fijamos podemos intentar construir curvas de anchura constante a partir de polígonos regulares pero, si intentamos construir una curva con estas características a partir de un cuadrado, descubrimos que nos es imposible porque no podemos trazar, a partir de uno de los vértices, una circunferencia que pase desde otro de los vértices hasta un tercero sin cortar el propio cuadrado. Después de esto deducimos que no se puede construir una curva de anchura constante a partir de un cuadrado, siguiendo el mismo método que con el triángulo de Reuleaux (fig. 33).

Con un pentágono sí que podemos formar un pentágono de Reuleaux, es decir, una curva de anchura constante. Pero con el hexágono tenemos el mismo problema que con el cuadrado, al trazar las circunferencias cortamos la figura (fig. 34).

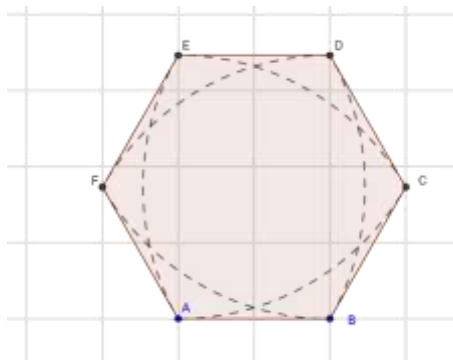


Fig. 34

Si observamos las similitudes entre ambas no es difícil darse cuenta de que son figuras con un número par de lados y vértices.

Después de estas comprobaciones podemos admitir que es posible construir infinitas clases de curvas de anchura constante a partir de polígonos regulares de lados y vértices impares siguiendo el mismo procedimiento que con el triángulo de Reuleaux.

Según esto podríamos afirmar que existen más figuras que poseen la anchura constante y que se forman igual que el triángulo de Reuleaux. Por esto mismo podemos considerarlos los polígonos de Reuleaux (fig. 35).

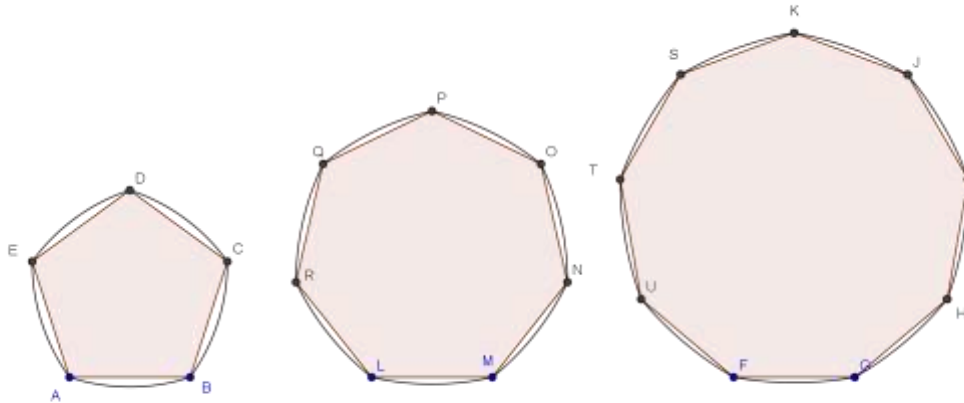


Fig. 35

6.4. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo de revolución creado a partir del giro producido por un triángulo de Reuleaux sobre un eje?

Para resolver este enunciado situamos un triángulo de Reuleaux de lado 2 unidades (para facilitar los cálculos) sobre un eje de coordenadas de manera que quede dividido en dos partes iguales para facilitar las operaciones que realizaremos y aprovechar la simetría respecto del eje X (fig. 36). El giro lo haremos sobre el eje de abscisas para poder calcular el volumen de la figura resultante con integrales.

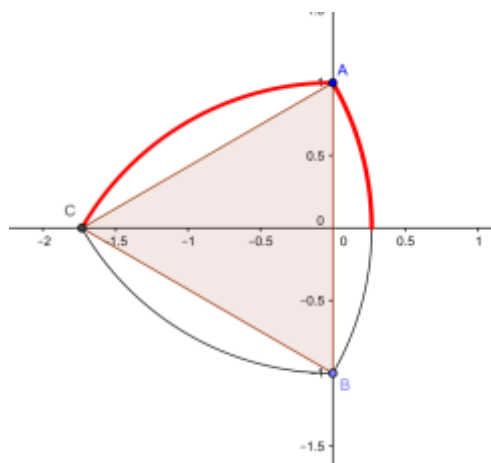


Fig. 36

Para calcular cuerpos de revolución utilizaremos la fórmula que permite calcular el volumen a partir de la función de un lado: $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

El lado que necesitamos para poder calcular dicho volumen está formado por dos arcos de circunferencia, el arco AC y la mitad del arco AB. Para calcular ambas curvas debemos recordar que los lados del triángulo de Reuleaux son arcos de circunferencia

por lo que se pueden deducir mediante la ecuación que define este tipo de cónicas con centro diferente al eje de coordenadas:

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$$

Donde: r es el radio que es igual al lado del triángulo equilátero que forma este polígono de Reuleaux.

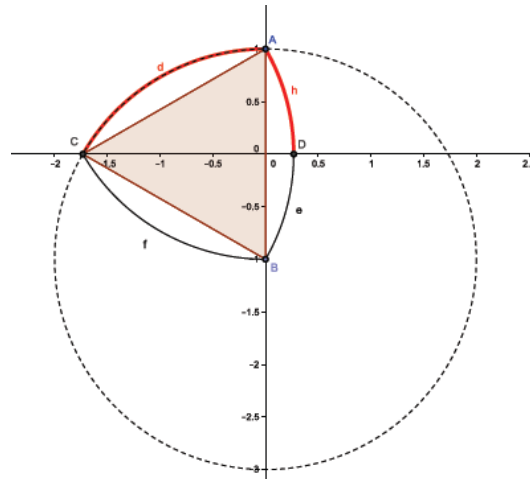


Fig. 37

Empezamos con la curva AC utilizando el punto B (0,-1) como centro:

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$$

$$(y - (-1))^2 + (x - 0)^2 = 2^2 \rightarrow (y + 1)^2 = 4 - x^2 \rightarrow y + 1 = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} - 1$$

Ahora utilizamos el mismo procedimiento con la curva AD con el centro en el punto C $(-\sqrt{3},0)$ situado en un vértice del triángulo de Reuleaux:

$$(x - (-\sqrt{3}))^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \rightarrow y^2 = 4 - (x + \sqrt{3})^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \sqrt{4 - (x + \sqrt{3})^2}$$

El siguiente paso es aplicar la fórmula para calcular volúmenes de cuerpo de revolución mediante una función a ambas curvas: (los límites de la primera integral son los componentes X de los puntos C y A que delimitan la primera curva y los de la segunda son los límites entre el punto A y el punto D, que se calcula restando la distancia entre D y C menos la componente X de C que es igual a $2 - \sqrt{3}$).

$$\int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\pi (\sqrt{4 - x^2} - 1)^2 \right) dx + \int_0^{2-\sqrt{3}} \pi \left(\sqrt{4 - (x + \sqrt{3})^2} \right)^2 dx$$

Se resuelven ambas integrales por separado y se suman posteriormente.

$$\int \left(\pi (\sqrt{4-x^2} - 1)^2 \right) dx = \pi \cdot \int \left((4-x^2) - 2\sqrt{4-x^2} + 1 \right) dx =$$

$$\pi \int (4-x^2 - 2\sqrt{4-x^2} + 1) dx = 4\pi x - \frac{\pi x^3}{3} + \pi x - \pi \int (2\sqrt{4-x^2}) dx =$$

Resolvemos por separado esta última parte de la integral debido a que es necesario un cambio de variable.

$$2 \int \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int \sqrt{2^2 \left[1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right]} dx =$$

$$(cambio de variable) \rightarrow \frac{x}{2} = \text{sen } t \rightarrow dx = 2 \cos t dt$$

$$2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = 2 \int \cos^2 t dt = 2 \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dx \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \text{sen } 2t \right) \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} t + \frac{2}{2} \cdot \sin t \cos t \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{4}{2} \cdot \text{arc sen} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{2}{2} x \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}}{2} \right)$$

Lo siguiente es unir con la parte anterior y aplicar la regla de Barrow con los extremos de la primera parte ($-\sqrt{3}$ y 0):

$$= [0] - \left[5\pi(-\sqrt{3}) - \frac{\pi(-\sqrt{3})^3}{3} - 4\pi \cdot \text{arc sen} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) - \pi(-\sqrt{3}) \sqrt{1 - \frac{(-\sqrt{3})^2}{4}} \right] = 3,1647$$

Ahora la segunda integral:

$$\int \pi \left(\sqrt{4 - (x + \sqrt{3})^2} \right)^2 dx = \pi \int (4 - (x + \sqrt{3})^2) dx$$

$$\pi \int (4 - x^2 - 2x\sqrt{3} - 3) dx = \pi x - \frac{\pi x^3}{3} - \pi \frac{2x^2\sqrt{3}}{2}$$

Ahora aplicamos la regla de Barrow para saber el resultado final:

$$= \left[\pi(2 - \sqrt{3}) - \frac{\pi(2 - \sqrt{3})^3}{3} - \pi \frac{2(2 - \sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{2} \right] - [0] = 0,4309$$

Sumamos este resultado con el anterior para obtener el volumen total producido por el giro de un triángulo de Reuleaux.

$$3,1647 + 0,4309 = 3,5956u^3$$

Este es el volumen de un triángulo de lado 2, pero, ¿cuál sería el volumen de una figura generada por un triángulo de Reuleaux de lado L cualquiera?

Primero para obtener un volumen de un triángulo de lado igual a una unidad debemos dividir el resultado obtenido por el lado de la figura calculada elevada al cubo debido a que se tratan de unidades cúbicas.

$$\frac{3,5956}{2^3} = 0,4494$$

Después para obtener un valor de volumen para cualquier figura de revolución generada a partir del triángulo de Reuleaux de lado l como la anterior, debemos multiplicar el valor obtenido por este lado de nuevo elevado al cubo.

$$0,4494 l^3$$

Y esta es la expresión del volumen para cualquier triángulo de lado l.

6.5. Ecuación de la figura producida por el giro del triángulo de Reuleaux

Si situamos de nuevo el triángulo de Reuleaux dentro de un cuadrado de lado igual a la anchura de la curva, lo hacemos rodar y nos fijamos en los vértices del triángulo podemos observar que hacen un recorrido muy similar a un cuadrado, pero cuando pasan por los vértices del cuadrado hacen una curva.

Este giro es utilizado taladros que utilizan el triángulo de Reuleaux para hacer agujeros cuadrados. Estos agujeros no son cuadrados perfectos sino que tienen unas esquinas curvas.

Calcularemos el recorrido de los vértices en cada cuadrante para saber qué curva describen respecto del ángulo α utilizado para calcular las coordenadas del baricentro.

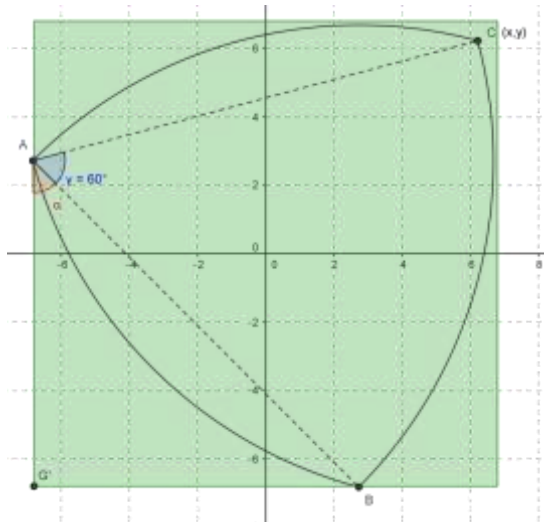


Fig.38

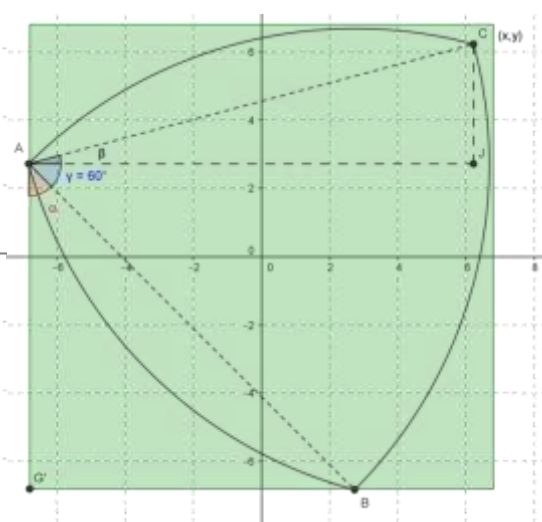


Fig. 39

Primer cuadrante:

Como podemos observar en las figuras 38 y 39, el ángulo α varía entre 30° y 60° como en el cálculo del baricentro.

Calculamos la componente X del punto C respecto del ángulo β :

$$\cos \beta = \frac{AJ}{AC} = \frac{x + \frac{1}{2}}{1} \rightarrow x = \frac{-1}{2} + \cos \beta$$

Si observamos la figura podemos describir el ángulo β como un ángulo en función de α gracias a que sabemos el ángulo entre los lados del triángulo equilátero (fig. 39):

$$\beta = \alpha + 60 - 90 = \alpha - 30$$

Aplicando la igualdad anterior aislamos X aplicando trigonometría:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1}{2} + \cos(\alpha - 30) = \frac{-1}{2} + (\cos \alpha \cos 30 - \text{sen } 30 \sin \alpha) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{2} \end{aligned}$$

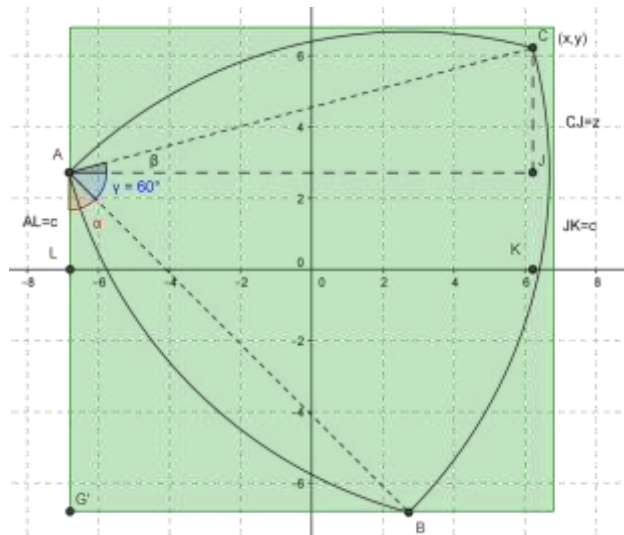


Fig. 40

Observando la figura, la componente y del punto C se puede expresar con dos incógnitas:

$$y = c + z$$

Podemos despejar z gracias al seno del ángulo β (fig. 40):

$$\sin \beta = \frac{CJ}{AC} = \frac{z}{1} = z$$

Substituimos z en la ecuación de Y:

$$y = \sin \beta + c = \sin(\alpha - 30) + c$$

Para resolver c utilizaremos el triángulo rectángulo AGB y el ángulo α (sabiendo que el lado del cuadrado es una unidad):

$$\cos \alpha = \frac{AG}{AB} = \frac{\frac{1}{2} + c}{1} \rightarrow c = \frac{-1}{2} + \cos \alpha$$

Finalmente sustituimos c en la ecuación de Y y la aislamos:

$$\begin{aligned} y &= \sin(\alpha - 30) + \cos \alpha - \frac{1}{2} = \sin \alpha \cos 30 - \sin 30 \cos \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{2} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones que determinan las coordenadas del vértice solo funcionan entre los ángulos 30° y 60° porque a partir de estos valores las componentes Y y X del punto son constantes en el resto del cuadrante, ya que describen una recta hasta llegar al siguiente cuadrante.

Segundo cuadrante:

Por simetría podemos suponer que las coordenadas de Y serán las mismas y las coordenadas de X serán iguales pero de signo contrario:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{2} \rightarrow -x = \frac{1 - \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{2}$$

Tercer cuadrante

De nuevo por simetría:

$$-x = \frac{1 - \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{2} \rightarrow -y = \frac{-\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha + 1}{2}$$

Cuarto cuadrante

Finalmente las coordenadas en el cuarto cuadrante por simetría:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{2}$$
$$-y = \frac{-\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha + 1}{2}$$

6.6. Área producida por el giro del triángulo de Reuleaux

Utilizando las coordenadas calculadas en el apartado anterior podemos calcular el área de la figura descrita por los vértices del triángulo de Reuleaux (fig. 41). Como no se trata de una única ecuación con una incógnita, sino que se trata de dos coordenadas que dependen de un ángulo, no podemos integrar directamente.

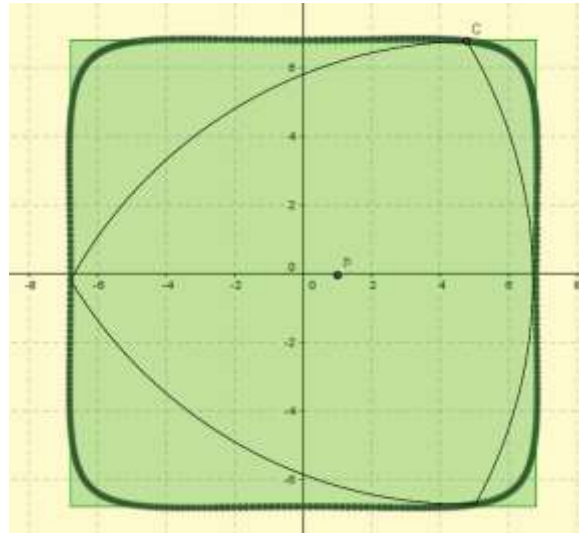


Fig. 41

Este proceso solo es posible para los valores en los cuales el punto C pertenece al primer cuadrante por lo que α deber variar entre 30° y 60° . Por esto debemos calcular el área entre el eje OY y el primer punto P es decir cuando $\alpha=60^\circ$, ya que es el valor máximo que puede alcanzar la curva antes de ser una recta horizontal al eje de coordenadas.

Si $\alpha=60$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \cos 60 + \sin 60}{2} = 0,366$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin 60 + \cos 60 - 1}{2} = 0,5$$

El área entre el punto D (0,0'5) y el punto P (0'366,0'5) la calculamos formando un rectángulo.

$$\text{Área inicial} = (0,366 - 0) \cdot 0,5 = 0,183 u^2$$

El área final debe ser un número similar al área del cuadrado que contiene el triángulo de Reuleaux de lado igual a una unidad, es decir, el área debe ser similar a una unidad cuadrada.

Para averiguar el área de la curva daremos valores a α en intervalos de $0,25^\circ$ y determinando las coordenadas Y y X del punto. Entre cada uno de los intervalos formamos rectángulos las bases de los cuales serán las coordenadas X menos la coordenada X del anterior punto y las alturas serán las coordenadas Y. Calculamos las áreas de cada rectángulo multiplicando la base por la altura y finalmente sumamos todas las áreas para obtener el área producida por el punto con un margen de error mínimo.

Estos cálculos los hacemos con Excel para aumentar la precisión ya que los valores serán muy pequeños.

La suma de las áreas de todos los rectángulos es de $0,063 u^2$ que sumadas al área inicial calculada anteriormente obtenemos: $0,247 u^2$.

Como la curva formada por el vértice C es simétrica en los cuatro cuadrantes, podemos multiplicar este número por cuatro para obtener el área total generada por el recorrido del vértice dentro del cuadrado:

$$0,247 \cdot 4 = 0,987 u^2$$

El área producida por el giro del triángulo de Reuleaux es un 98,7 % del cuadrado que lo contiene por lo que los taladros que utilizan esta figura para hacer agujeros de forma cuadrada son bastante exactos, exceptuando por los vértices, que presentan una pequeña curva.

(Hoja de cálculo completa en el anexo 2)



7. Utilidades y aplicaciones

Las figuras de anchura constante son muy utilizadas en la actualidad para una gran variedad de objetos y mecanismos.

7.1. Triángulo de Reuleaux

Aunque no lo parezca a simple vista, el triángulo de Reuleaux se encuentra desde en objetos sencillos como lápices o caramelos hasta en motores de combustión interna o edificios.

7.1.1. Arquitectura

El triángulo de Reuleaux, por la sencillez del trazado, fue utilizado en la arquitectura de arte gótico para decorar fachadas, arcos y rosetones. Aunque sean de varios siglos antes de que Franz Reuleaux diseñara el triángulo, tienen la misma forma.

La iglesia más antigua de la ciudad belga de Brujas (Bruges), la catedral de San Salvador, datada del siglo X, tiene unas ventanas que recuerdan al triángulo de Reuleaux.



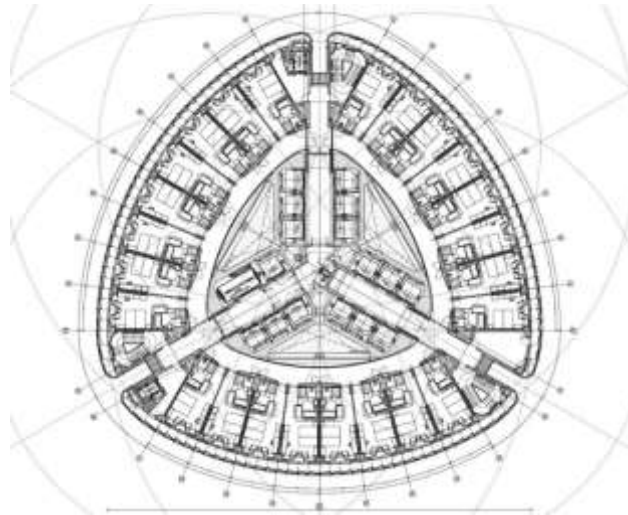
La Iglesia Notre-Dame, también de la ciudad de Brujas en Bélgica, más moderna (1270-1340), presenta esta figura varias veces en una serie de composiciones arquitectónicas que decoran una de sus cristaleras.



Esta figura también está presente en construcciones arquitectónicas posteriores a la edad media e incluso contemporáneas al autor. La siguiente imagen muestra una ventana de la iglesia escocesa (Scots Church) de la ciudad de Adelaide, en Australia (1850-1851):



En Madrid, la Torre PwC (anteriormente llamada Torre Sacyr Vallehermoso) con 236 metros es el tercer rascacielos más alto de España y el séptimo más alto de Europa. Es una construcción mucho más actual que las anteriores, ya que se terminó su construcción en 2008. Su planta tiene una forma muy similar al triángulo de Reuleaux.



Si observamos el plano de la base se ve claramente el parecido con el triángulo de Reuleaux, o con una variante ampliada de este con unas esquinas redondeadas.

En Barcelona, la Torre de Collserolla tiene una altura de 288,4 metros y fue diseñada por el arquitecto británico Norman Foster con el objetivo de crear “un nuevo símbolo para la ciudad, una torre constante en su lugar y a la vez cambiante según el momento y la perspectiva”.



Se creó para los Juegos Olímpicos de 1992 con el objetivo de cubrir las necesidades respecto a los servicios de telecomunicaciones.






La constancia también puede observarse en el diseño de su planta debido a que tiene forma de un triángulo de Reuleaux.

En Ulm, Alemania, se encuentra Energon, que es un edificio de oficinas basado en el estándar de casa pasiva (utiliza medios renovables para evitar un consumo excesivo de energía, utilizando energía geotérmica y placas fotovoltaicas). En el 2007 la Unión Europea calificó a Energon como modelo ideal de oficina. Tiene una superficie de 6.911 m^2 y cuatro plantas.

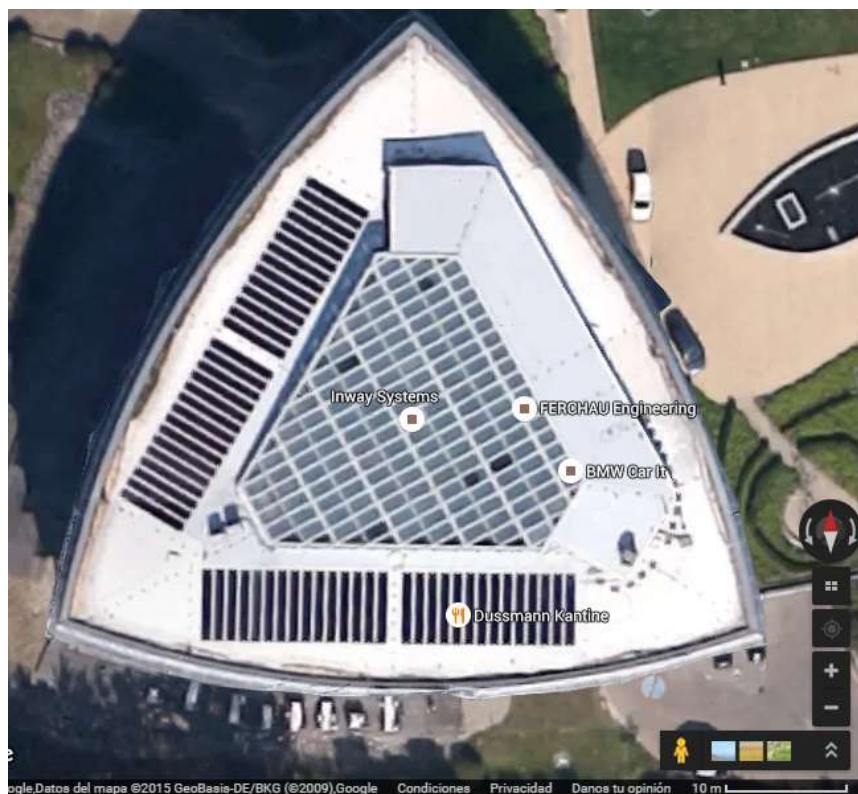


Su planta tiene forma de triángulo de Reuleaux.

	<p>Gartengeschoß Gesamtfläche: 1.400 qm Seminarräume 5 Stück Plan vergrößern</p>
	<p>Eingangsgeschoß Gesamtfläche: 1.400 qm Kleinste Mietfläche: 200 qm Größte Mietfläche: 1.400 qm Plan vergrößern</p>
	<p>1-3. Regelgeschoß Gesamtfläche: 1.400 qm Kleinste Mietfläche: 200 qm Größte Mietfläche: 1.400 qm Plan vergrößern</p>

Utilizando las especificaciones de los planos calcularemos el área para saber si se trata realmente de un triángulo de Reuleaux.

Para saber el lado del triángulo equilátero utilizamos Google Maps con sus mapas a escala.



Aproximadamente mide 55 metros el lado. Utilizando la fórmula que hemos calculado en el apartado sobre el área del triángulo de Reuleaux vemos sin los datos coinciden.

$$Area = \frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = \frac{55^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = 2131,9 m^2$$

Este resultado dista mucho de los $1400 m^2$ de los que hablan los planos.

Si observamos bien los planos, el área del edificio es el triángulo de Reuleaux externo menos un pequeño triángulo que parece ser una zona de comunicación entre las diferentes partes del edificio. Curiosamente también parece tener una forma de triángulo de Reuleaux.

Si calculamos este área mas pequeña con los datos de Google Maps que aproximan que el lado mide unos 30 metros y se la restamos al área obtenida anteriormente, puede que este resultado se parezca mas a los $1400 m^2$.

$$\frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = \frac{30^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = 634,3m^2$$

$$2131,9 - 634,3 = 1497m^2$$

Sumando algunos errores producidos al calcular los lados con los mapas a escala y que la figura central no es completamente un triángulo de Reuleaux este resultado se parece bastante a lo que dicen los planos, por lo que posiblemente la planta de este edificio sea un triángulo de Reuleaux.

El error absoluto y el error relativo son métodos para saber la exactitud de los cálculos respecto de las medidas reales.

El error absoluto se calcula como la diferencia entre el resultado obtenido y el resultado real (en valor absoluto):

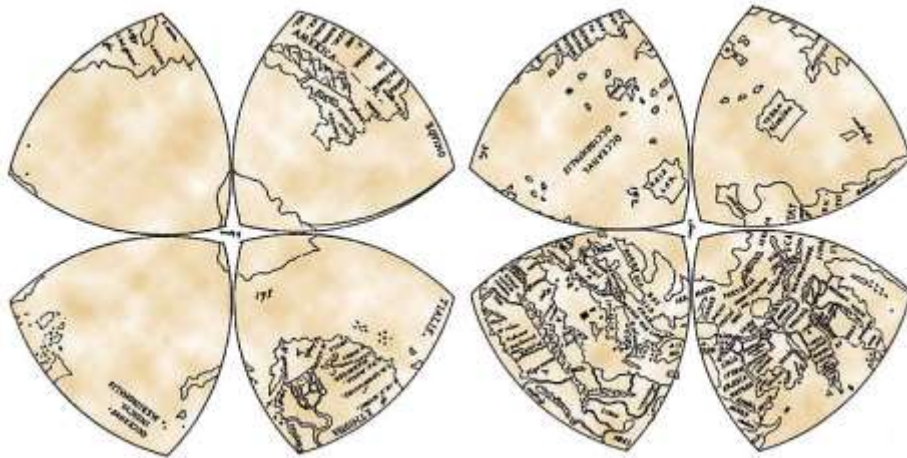
$$Error\ absoluto = 1497 - 1400 = 97$$

El error relativo se calcula dividiendo el valor absoluto entre el valor exacto para demostrar que dependiendo del tamaño de la medida el error es menor o mayor. En tanto por uno, el error relativo sería:

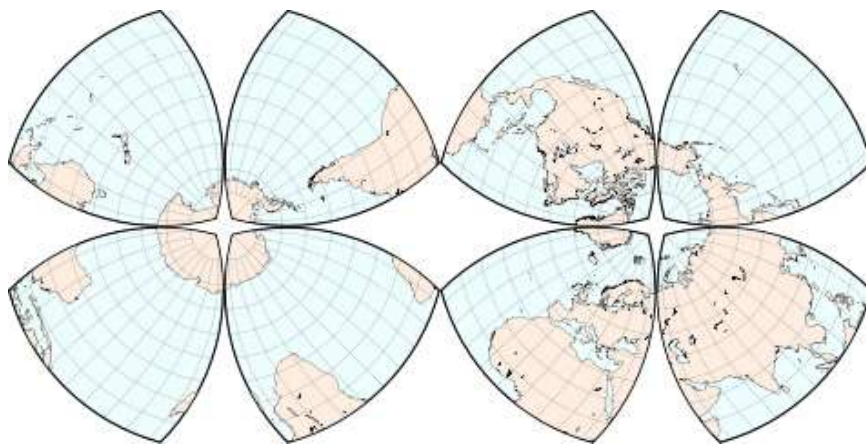
$$Error\ relativo = \frac{97}{1400} = 0,069$$

7.1.2. Mapa del mundo tipo octante

Los mapas de tipo octante son mapas donde la esfera terrestre se divide en ocho triángulos de Reuleaux delimitados por el ecuador y dos meridianos.



Este mapamundi, dibujado por el artista e inventor italiano Leonardo Da Vinci, es el primero de su tipo y está fechado oficialmente el año 1514 (aunque la península de Florida está representada como una isla, cosa que se desmintió el 1500 por los mapas de Juan de la Cosa).



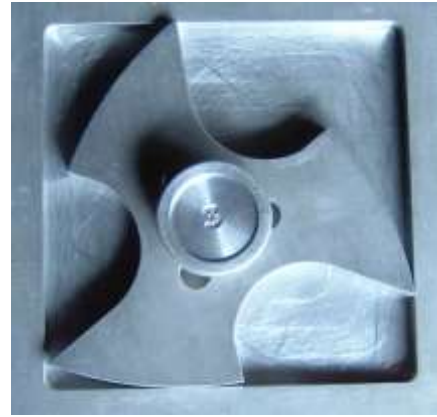
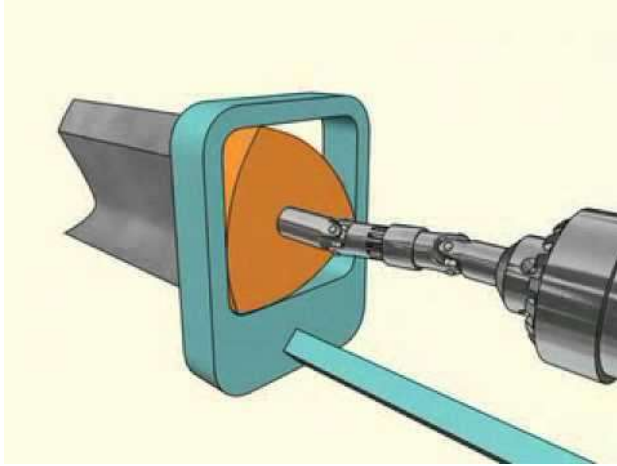
Este, en cambio, es un mapa actual de tipo octante.

7.1.3. Taladros

Como se ha dicho en el apartado sobre el área producida por el giro del triángulo de Reuleaux, esta curva puede girar sobre un soporte cuadrado y el área de su giro será un 98,77 % del cuadrado, por lo que, para taladrar un agujero con forma cuadrada utilizaremos el triángulo de Reuleaux

En 1914 el ingeniero británico Harry James Watt patentó una broca con forma de triángulo de Reuleaux. Esta broca va montada en un dispositivo especial que hace que

gire excéntricamente y así puede taladrar un agujero con una forma casi cuadrada (con las esquinas redondeadas).

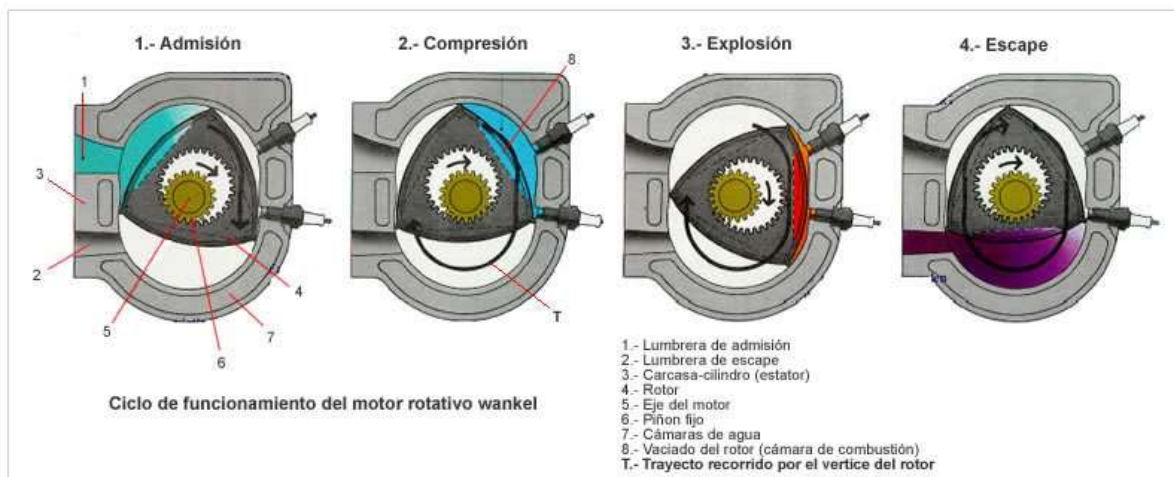


7.1.4. Motores

El motor Wankel es un tipo de motor de combustión interna que utiliza rotores en vez de pistones (motor rotativo). Inventado por el ingeniero alemán Felix Wankel el 1924, funciona con suavidad y de manera silenciosa debido a la simplicidad de su diseño.

A pesar de sus muchas ventajas, como la reducción de la vibración y que se produzcan tres explosiones en una sola rotación, el rotor Wankel no se utiliza mucho actualmente debido a problemas con los ajustes a las normas de emisiones contaminantes y por su corta vida útil.

Este tipo de motor es conocido por ayudar a la escudería Mazda a ganar las 24 horas de Le Mans en 1991. Actualmente se utiliza en karts, aviones ultraligeros, motoplaneadores, generadores eléctricos... Además, utiliza una curva muy parecida al triángulo de Reuleaux pero con los lados más planos, por lo que no tiene anchura constante.



7.1.5. Lápices

Muchos de los lápices creados actualmente tienen forma de triángulo de Reuleaux. Las marcas más conocidas que utilizan esta forma son Faber-Castell y Staedtler. Posiblemente se utilice esta forma en lápices con un objetivo estético o tal vez exista algún tipo de objetivo ergonómico y mejore la escritura.



7.1.6. Smint

Las conocidas minipastillas SMINT creadas por la multinacional española Chupa Chups S.A. tienen una forma triangular muy similar al triángulo de Reuleaux. Seguramente la finalidad de esta forma sea simplemente estética o posiblemente las cajetillas tengan algún tipo de mecanismo adaptado a esta forma y sea más práctico utilizarla.



7.1.7. Vaso del Fórum de Barcelona

El vaso del Fórum Universal de las Culturas de Barcelona, en 2004, tiene una base con forma de triángulo de Reuleaux que ha sido reproducida y ampliada verticalmente para crear este vaso.



Fue diseñado por Arnau Solà, un estudiante de diseño industrial de la escuela Massana de Barcelona, con el objetivo de ganar un concurso de *merchandising* sobre el Fórum que se celebró en su escuela. Aunque ganó el tercer premio, su vaso se vendió oficialmente en el Fórum.

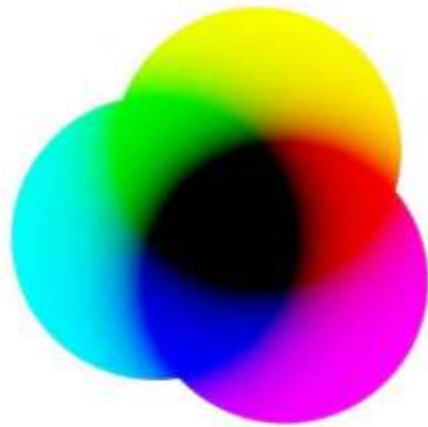
7.1.8. Modelos de colores

Algunos tipos de mezcla de colores utilizan círculos para determinar los tipos de subtipos de colores que pueden ser creados. El modelo RGB (de los colores rojo, verde y azul en inglés: *red*, *green* y *blue*) explica las composiciones de los colores de la luz blanca y curiosamente con su estructura forma en el centro un triángulo de Reuleaux:



Otro modelo es el CMY (de los colores cian, magenta y amarillo en inglés: *cyan*, *magenta* y *yellow*, a menudo también se llama CMYK añadiendo el color negro en inglés *black o key*) que explica las composiciones de colores formadas por la mezcla de

tintes o pinturas. Como en el modelo anterior, también tiene un triángulo de Reuleaux en el centro:



7.1.9. Lancia

El logo de Lancia, a partir de 1957, pasó de tener una forma circular a adoptar la forma que reconocemos actualmente. Si nos fijamos, nos damos cuenta de que tiene la forma del triángulo de Reuleaux.



Existen unos bocetos de 1911 diseñados por Carlo Biscaretti di Ruffia, un conde italiano conocido por sus trabajos como artista y como entusiasta del automóvil, que muestran las ideas de la marca por un logo triangular que acabaría siendo el más utilizado en toda la historia de dicha empresa.



7.1.10. Púas de guitarra

Muchas púas de guitarra utilizan la forma del triángulo de Reuleaux porque con su punta afilada puede producir una fuerte articulación y con su parte ancha puede producir un timbre cálido. Muchos guitarristas la encuentran muy ergonómica.



7.1.11. Montaña de Marte

El triángulo de Reuleaux puede ser encontrado en los sitios menos pensados. Una montaña situada en la superficie del planeta rojo tiene una base curiosamente parecida al triángulo de Reuleaux e incluso cumple la relación de la altura y el radio de la circunferencia que forma los lados del susodicho triángulo.

Esta montaña tan peculiar ha sido motivo de teorías sobre vida inteligente en Marte que explican que la habrían construido como si de una pirámide se tratara, debido a las proporciones matemáticas de su forma.



7.1.12. Relojes

La marca de relojes Hamilton tiene un modelo que recuerda mucho al triángulo de Reuleaux.



Otro tipo de reloj, mucho más extraordinario es el llamado $C_3H_5N_3O_9$, es decir, nitroglicerina. Este reloj es más un experimento que un objeto de lujo. Los creadores se basaron en los diseños de Wankel y en las figuras de anchura constante de Reuleaux.



Cuesta 130.000 francos suizos (unos 120.000 euros) y es exclusivo de la tienda The Hour Glass.



7.2. Otros polígonos

Además del triángulo de Reuleaux los otros polígonos de Reuleaux también se han utilizado de diversas formas.

7.2.1. Monedas

Hay muchos tipos de monedas que utilizan figuras de anchura constante como forma. Por ejemplo, las antiguas monedas de quinientas pesetas que utilizan un heptágono de anchura constante.



También algunas de las monedas utilizadas en el Reino Unido tienen como forma figuras como el heptágono de anchura constante, como por ejemplo las monedas de veinte y de cincuenta peniques.



FRONT

BACK

La moneda de un dólar canadiense tiene una forma de endecágono de anchura constante.



7.2.2. Bicicleta

Un hombre de nacionalidad china decidió en 2008, coincidiendo con los Juegos Olímpicos de Beijing, “reinventar la rueda”.



Durante dieciocho meses construyó su propia bicicleta pero, a diferencia de las bicicletas que estamos acostumbrados a ver, no utiliza ruedas circulares sino que tiene un pentágono y un triángulo de anchura constante que, aunque no lo parezca, funcionan casi tan bien como una rueda común.



7.3. Tapas de alcantarilla

Finalmente, como se ha propuesto al inicio, esta figura, al igual que el círculo, puede ser utilizada como tapa debido a que tiene una anchura constante. Como se ha explicado en el apartado de anchura del triángulo de Reuleaux, esta figura puede funcionar perfectamente como tapa de alcantarillado sin ningún tipo de problema. En algunas ciudades del mundo ya se utilizan este tipo de tapas.



Esta es una imagen de tapas de alcantarilla en San Francisco, Estados Unidos.

8. Conclusión

El trabajo ha sido satisfactorio por varios motivos. Ante todo, he respondido a las preguntas que originaron el trabajo y cuyo desarrollo posterior me ha revelado el potencial científico que pueden tener ciertas cuestiones aparentemente inocentes. Una visita al MMACA me proporcionó un primer contacto con las curvas de anchura constante, que no han sido más que ligeramente presentadas en este trabajo por cuestiones de espacio y por las limitaciones de extensión que el instituto fija para este tipo de trabajos. El objetivo principal era el estudio del triángulo de Reuleaux y sus propiedades matemáticas. Por otro lado, he sido capaz de demostrar sus propiedades por mí mismo, utilizando de manera diversa las diferentes herramientas de que he dispuesto, lo que me ha permitido comprobar, por ejemplo, el potencial de la tecnología para ayudar a conjeturar propiedades teóricas dentro de un contexto matemático. Por último, el sinfín de aplicaciones de la figura me ha mostrado que la Matemática no es una materia estabulada en los libros de texto, sino una disciplina científica presente en los ámbitos más dispares.

Las dificultades más reseñables han consistido, precisamente, en demostrar algunas de las propiedades del triángulo de Reuleaux, sobre todo por dos motivos: en primer lugar, la trigonometría necesaria para determinar las ecuaciones del centroide, sin ser

extremadamente complicada, requería una cierta atención y habilidad; en segundo lugar, el cálculo de integrales no lo había estudiado cuando comencé el trabajo, por lo que el cálculo de la integral que aparece en el trabajo ha requerido un análisis aparte. Además, he utilizado desenfadadamente el Geogebra (programa que desconocía antes de utilizarlo para este trabajo) tanto para dibujar las figuras que aparecen en el texto como para establecer conjeturas a alguna de las cuestiones planteadas. Por último, el Excel lo he empleado para calcular una aproximación a un área. Su cálculo exacto ha excedido mis capacidades, por lo que me ha parecido interesante utilizar una herramienta tan extendida en Estadística en una rama de la matemática aparentemente tan alejada. Esto refuerza una de las conclusiones obtenidas en este trabajo: ámbitos aparentemente aislados entre sí están interconectados por elementos comunes que las apariencias ocultan, lo que permite transitar de una disciplina a otra siempre que se sepa trabajar con los útiles y las estrategias adecuados.

Bibliografía

Alsina, Claudi, *Geometría para turistas*, Editoria Planeta, 2009

Alsina, Claudi, "Homenaje a Reuleaux", *SUMA: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 48, febrero 2005.

Garrido González, Antoni, *Matemàtiques II Batxillerat*, Barcelona, Edebé, 2009.

Moon, Francis C. *The Machines of Leonardo Da Vinci and Franz Reuleaux: Kinematics of Machines from the Renaissance to the 20th century*, Springer, 2007.

Posamentier, Alfred S.; Lehmann, Ingmar, *La proporción trascendental*, Barcelona, Ariel, 2006.

Páginas web consultadas

20 minutos, *blogs: Mati, una profesora muy particular:*

<<http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/poligonos-de-reuleaux/>>

Britton, *Drilling Square Holes, G. Smith, Scott:*

<http://britton.disted.camosun.bc.ca/drilling_square_holes.pdf>

C3H5N3O9: <<http://www.c3h5n3o9.com/about.php>>

Cara a cara, Arnau Solà: el got del Fòrum:

<<http://cac.drac.com/200406/20040608.html>>

Ciencia recreativa, *ruedas no circulares:*

<<http://lacienciarecreativa.blogspot.com.es/2013/08/ruedas-no-circulares.html>>

Energon Ulm: <<http://www.energon-ulm.de/>>

Epsilones, *Triangulo de Reuleaux:*

<<http://www.epsilones.com/paginas/historias/historias-028-reuleaux.html>>

Figuras de ancho constante: un tema por explorar, Molina Jaime, Oscar Javier:

<<http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a07.pdf>>

Geogebra, *Triangulo de Reuleaux:*

<<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/113502>>

MacSales, *OWC Guitar Pick:* <<http://eshop.macsales.com/item/OWC/PICKTOOL/>>

Matemáticas Cercanas, El triángulo de Reuleaux:

<<http://matematicascercanas.com/2014/04/28/el-triangulo-de-reuleaux/>>

Museo del marchio italiano, Lancia:

<<http://www.museodelmarchioitaliano.it/marchi/lancia.php>>

Pencil Revolution, *Review of staedtler Noris Ergosoft HB:*

<<http://www.pencilrevolution.com/2006/04/review-of-staedtler-noris-ergosoft-hb/>>

Proyecto Estalmat Castilla y Leon, *Matematicas en la catedral de Burgos*, de la Asuncion Azpiazu, Maite:

<<http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionCantabria2012/CyL-Catedral.pdf>>

Revista digital de matemáticas, triángulo de Reuleaux:

<<http://revistasacitametam.blogspot.com.es/2011/10/triangulo-de-reuleaux.html>>

Structurae, Structures and Large-Scale Projects <structurae.net/structures/enegon>

Wikipedia, Reuleaux Triangle: <http://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle>

WolframMathWorld, Reuleaux Triangle:

<<http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>>

ZTFNews, *Franz Reuleaux, sus triángulos y sus mecanismos:*

<<https://ztfnews.wordpress.com/2014/09/30/franz-reuleaux-sus-triangulos-y-sus-mecanismos/>>