SI ÉS CONVEXA HA DE SER SIMPLE

FME, UPC, 3/5/2017

Andreu Mas-Colell, UPF i Barcelona GSE

Basada en recerca conjunta amb el Professor Sergiu Hart de la Universitat Hebrea de Jerusalem (vegis: Hart i Mas-Colell: *Simple Adaptive Dynamics, from Regret- Matching to Uncoupled Dynamics*, World Scientific, 2013)

ÍNDEX:

1.-**Definició de joc i Equilibri de Nash**.

A_i : Accions del jugador *i*. Conjunt finit.

$A = A_1 \times ... \times A_N$

$u_i\ (a_1,..., a_N)$: utilitat de *i*

Definició: Una mesura de probabilitat producte μ sobre A es un equilibri de Nash si, per tot i, i per tot *j*, $k \epsilon A_i$:

$$\sum_{a \epsilon A, a_i = j} \mu(a)[u_i(k, a_{-i}) - u_i(a)] \leq 0$$

Teorema: Un equilibri de Nash existeix.
(la demostració apel·la a teoremes de punt fixe)

1,1	3,2
2,3	0,0

Matrius de pagament

Equilibris:

0	0
1	0

0	1
0	0

$$\frac{1}{16}\;\begin{array}{cc} 3/4 & 1/4 \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3/4 \\ 1/4 \end{array} \end{array}$$

0	1/2
1/2	0

1/3	1/3
1/3	0

Fig 1

2.- **Jocs repetits**

$a(t)\epsilon\ A$: jugada a t

U_i= $\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} u_i\ (a(t))$: valoració de la trajectòria per i

$\mu(T)$: distribució empírica sobre A, a T.

3.- **Joc fictici**

Definició: Per tot i i t, $a_i(t+1)$ resol:

$$Max_{a_i}\, E_{Marg_{a_{-i}}\mu(t)}\, u_i(a_i, a_{-i})$$

Teorema (Julia Robinson, 1951): Si N = 2 i el joc és de suma cero llavors qualsevol punt d'acumulació de la seqüencia $\mu(t)$ es un equilibri de Nash.

L. Shapley (1964) va proporcionar un exemple de no convergència per N = 2 i no suma cero.

4. **Altres dinàmiques simples ("adaptatives")?**

Què vol dir "simple"?

Un requisit mínim ("uncoupled"): la instrucció de joc a t + 1 a un jugador *i*, donada tota la història de joc de tots els jugadors, és independent de les funcions d'utilitat dels altres jugadors.

Sense esperança d'un resultat general. Raó essencial: un equilibri de Nash té la natura d'un punt fixe i, en general, no és matemàticament més simple que aquests (en particular: el conjunt d'equilibris pot ser un conjunt discret).

5. **Equilibri correlacionat.**

Va ser introduït per R. Aumann (1974).

Definició (Idèntica a la definició de l'equilibri de Nash, però sense el terme "producte"): Una mesura de probabilitat μ sobre A és un equilibri correlacionat si, per tot i, i per tot $j, k \in A_i$:

$$\sum_{a \in A, a_i = j} \mu(a)[u_i(k, a_{-i}) - u_i(a)] \leq 0$$

La randomització d'equilibris de Nash és un equilibri correlacionat, però hi ha equilibris correlacionats que no són equilibris de Nash.

6. **Arribar a l'equilibri correlacionat amb dinàmiques simples?**

Observació clau: el conjunt d'equilibris correlacionats està definit per desigualtats lineals. Per tant és **convexa.**

Consideració heurística: Si és convexa ha d'haver una dinàmica simple (adaptativa) que porti a l'equilibri correlacionat.

Nota: El joc fictici no aconsegueix convergir per tots els jocs.

7. **Mesures de penediment ("regret")**

Fixem una trajectòria $a(T)$, amb corresponents distribucions empíriques $\mu(T)$.

Per tot jugador *i,* i dues accions $j, k \in A_i$ podem definir el **penediment** de i a T per no haver jugat k cada vegada que en el passat ha jugat j, denotat $r_i^T(j, k)$, de la següent manera:

$$D_i^T = \frac{1}{T} \sum_{t \le T, a_i(t)=j} [u_i(k, a_{-i}(t)) - u_i(a(t))],$$

$$r_i^T(j, k) = \text{Max.} \{ 0, D_i^T \}$$

Constatació: Si, per tot *i*, $r_i^T(j, k) \to 0$ per tot *j, k* $\in A_i$, llavors qualsevol punt d'acumulació de la seqüència de distribucions empíriques $\mu(T)$ serà un equilibri correlacionat.

8.- **El Teorema de Blackwell**

Tenim un decisor *i.*

Tenim conjunts (finits) d'accions per el decisor, S_i , i per un "oponent", S_{-i} .

El decisor té un vector de valoracions de dimensió L:

$$v(s_i, s_{-i}) \in R^L$$

Donada una trajectòria s(t) = $(s_i(t), s_{-i}(t))$ consideris la mitjana temporal del vector de valoracions:

$$D(T) = \frac{1}{T} \sum_{t \le T} v\big(s_i(t), s_{-i}(t)\big) \in R^L.$$

Definició: Un conjunt $C \subset R^L$, no–buit, convexa i tancat, és **aproximable** si el decisor disposa d'un procediment que li permeti garantir que $D(T) \rightarrow C$. És a dir, la distància del vector *D(T)* al conjunt *C* tendeix a cero (amb probabilitat 1), per qualsevol valors de s_{-i}.

Teorema de Blackwell (1956):

1.- Un mig espai $H = \{x \in R^L : q \cdot x - w \leq 0\}$ és aproximable si i només si per tot $x \notin H$ hi ha una probabilitat *p(x)* sobre S_i tal que:

$$E_{p(x)} v(s_i, s_{-i}) \in H \text{ , per tot } s_{-i}.$$

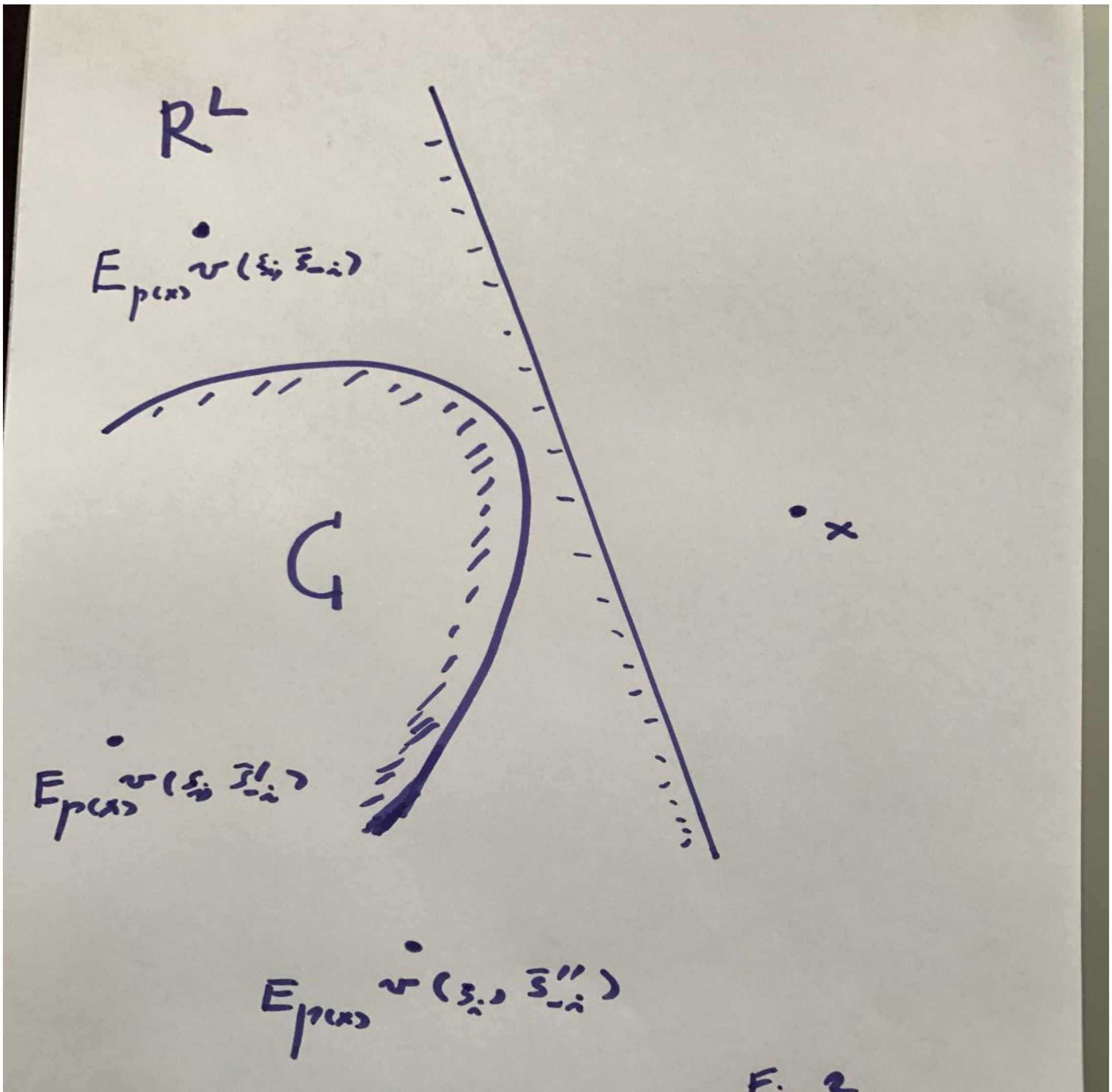
2.- Un conjunt $C \subset R^L$, no –buit, convexa i tancat, és aproximable si i només si tots els mig espais que contenen C son aproximables.

3.- Si $C \subset R^L$ - no –buit, convexa i tancat - és aproximable llavors un procediment que garanteix l'aproximació és:

"si $x \notin C$, el decisor utilitza el *p(x)* corresponent en el mig espai

$$H = \{ y \in R^L : (x - F_C(x)) \cdot (y - F_C(x)) \leq 0\}"$$

on $F_C(x)$ és el vector de C més proper a x.



R^L
E p(x) v (s_i, s̄_-i)
G
x
E p(x) v (s_i, s̄'_-i)
E p(x) v (s_i, s̄''_-i)
Fig 2

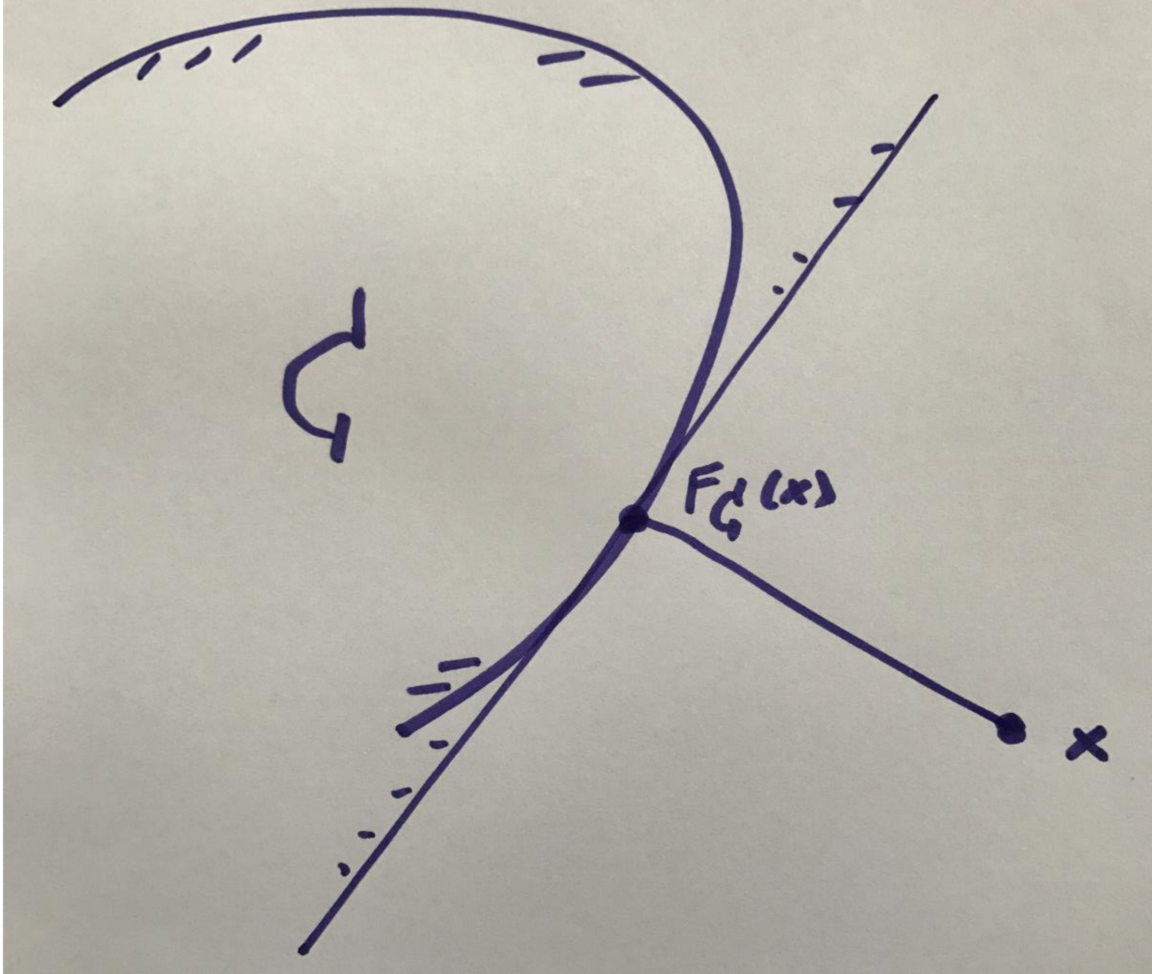


Fig.3

9. Una dinàmica basada en el no-penediment.

Fixem un jugador *i.*

Prenem L = { *(j, k) : j* $\neq k$}.

Definim un vector de valoracions $v_i(a)$, per $a \in A$, de dimensió L.

Per el component *(j, k)* posem:

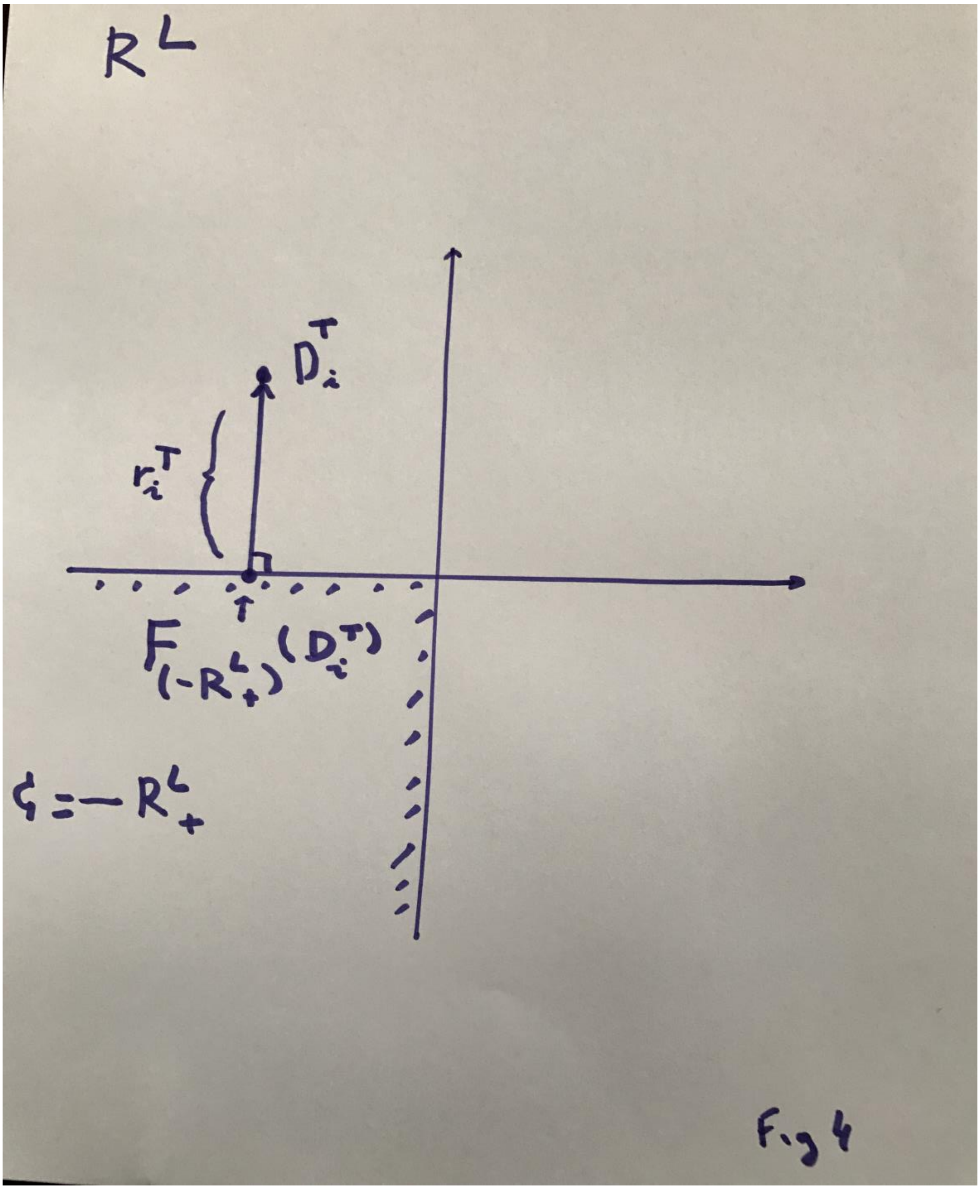
$v_i(a)(j, k) = 0 \qquad$ si $a_i \neq j$,

$v_i(a)(j, k) = u_i(k, a_{-i}) - u_i(j, a_{-i}), \quad$ si $a_i = j$.

Donada una trajectòria *a(t)* tenim, per tot *(j, k):*

$$\left(\frac{1}{T}\right)\sum_{t\leq T} v_i\big(a(t)\big)(j,k) = D_i^T(j,k)$$

Geomètricament, $\quad r_i^T = D_i^T - F_{-R^L}(D_i^T)$



R L
D i T
r i T
F (-R L +) (D i T)
ς = − R L +
Fig 4

Per tant, pregunta: És - R_+^L aproximable?

Verifiquem que sí.

Cal verificar que tots els migs-espais de R^Ldefinits per $q \geq 0$, w = 0, sén aproximables.

Fixem $q \geq 0$. Cal trobar un vector de probabilitats p definit sobre A_i tal que:

$$q \cdot E_p v_i(a_i, a_{-i}) \leq 0.$$

(de fet, veurem que = 0).

Desenvolupant l'expressió de la banda esquerra:

$$\sum_{j,k} q(j,k)\, p(j)(u_i(k, a_{-i}) - u_i(j, a_{-i}))$$

$$= \sum_j \alpha(j) u_i(j, a_{-i}),$$

on $\alpha(j) = \sum_k p_k\, q(k,j)$ - $p_j \sum_k q(j,k)$, per tot j.

Si p és un vector invariant de la matriu (de diagonal 0) que té $q(j,k)$ per entrada j,k (pre-multiplicada, si escau, per la matriu diagonal que te $1/\sum_k q(j,k)$ a la posició j) llavors $\alpha(j) = 0$ per tot j. Com que un vector invariant no-null i no-negatiu sempre existeix, obtenim el resultat desitjat :

$$-\boldsymbol{R_+^L}\textbf{es aproximable}.$$

Per tant, el Teorema de Blackwell ens diu que per portar els penediments a cero n'hi ha prou que per cada *i* i per cada T el jugador *i* determini el vector de probabilitats $p_i(T+1)$
de manera que aquest vector sigui un vector invariant de la matriu de penediments de *i* a T (corregida com més amunt).

10. Encara més simple (“ Regret matching”)

Calcular un vector invariant no és tan simple. Però podem aprofitar les propietats d’iteració de les matrius no- negatives (convergència a un vector invariant) per arribar a establir:

Teorema: Suposem que cada jugador, diguem *i*, segueix la següent estratègia (“regret matching”):

A la data T + 1 juga $k \neq a_i\,(T)$ amb probabilitat

$$\frac{1}{M} r_i^T\,(a_i(T), k)$$

(la constant ha de ser prou gran perquè la probabilitat de no canviar i quedar-se a $a_i\,(T)$ sigui positiva).

Llavors, els penediments de tots els jugadors tendeixen a cero (amb probabilitat 1) i, per tant, la distribució empírica del joc convergeix al *conjunt* d’equilibris correlacionats.